UNIWERSYTET JAGIELLOŃSKI

Wydział Matematyki i Fizyki
Kierunek: Matematyka
Sekcja teoretyczna

PRACA MAGISTERSKA

DYSKRETNY NIELINIOWY UKŁAD SEMIDYNAMICZNY NA PŁASZCZYŹNIE

Zbigniew Galias

opiekun: doc. Jerzy Ombach

Kraków, rok 1992.

Spis treści

1 WSTĘP **3**
1.1 Sformułowanie zagadnienia 4

2 ANALIZA UKŁADU LINIOWEGO **7**

3 UKŁAD NIELINIOWY — ANALIZA SYMBOLICZNA **11**
3.1 Wyznaczanie orbit okresowych 12
3.2 Stabilność orbit okresowych 13
3.3 Punkty stałe 14
3.4 Orbity okresowe o okresie 2 15
3.5 Orbity okresowe o okresie 3 17
3.6 Orbity o okresie 4 21
3.7 Orbity okresowe — podsumowanie 22
3.8 Algorytm wyznaczania orbit okresowych 24

4 ZBIORY GRANICZNE TRAJEKTORII **27**
4.1 Zbiory graniczne dla $(a, b) \in T_1$ 28
4.2 Zbiory graniczne dla $(a, b) \in T_2$ 29
4.3 Zbiory graniczne dla $(a, b) \in Q_1 \cup P_1$ 29
4.4 Zbiory graniczne dla $(a, b) \in Q_2 \cup P_2$ 34
4.5 Zbiory graniczne dla $(a, b) \in Q_4 \cup P_3 \cup P_4$ 35

5 REDUKCJA UKŁADU DO ODWZOROWANIA OKRĘGU **41**
5.1 Zbiór niezmienniczy homeomorficzny z okręgiem 41
5.2 Zbiór $\mathbf{W}_\infty$ w postaci sześciokąta 47
5.3 Liczba obrotu 50
5.4 Języki Arnolda 53

Rozdział 1

WSTĘP

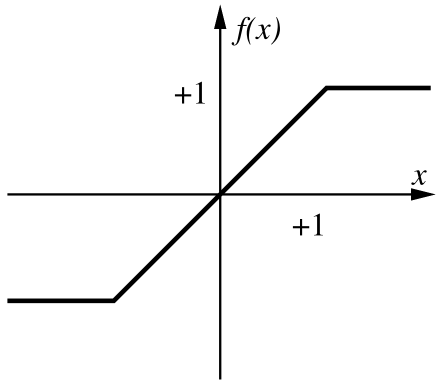
Tematem niniejszej pracy jest analiza dyskretnego układu semidynamicznego opisanego równaniem (1.1). Układ ten jest podstawowym blokiem, służącym do budowy filtrów cyfrowych. Z uwagi na swoje szerokie zastosowania jego zachowanie było wielokrotnie badane. W pracy [5] przedstawiona jest analiza układu opisanego równaniem (1.1) z charakterystyką modularną (1.3) dla parametrów położonych na brzegu obszaru stabilności. Wykazano, że system tego typu jest chaotycznym układem dynamicznym o trajektoriach wykazujących fraktalną geometrię. W pracy [6] podany jest warunek konieczny i wystarczający na to, aby układ (1.1) z charakterystyką modularną był stabilny. Wykazano również, że przy charakterystyce nasyceniowej (1.2) stabilność układu pokrywa się ze stabilnością układu liniowego.

W niniejszej pracy przeprowadzono analizę zachowania układu (1.1), (1.2) poza obszarem stabilności. Niektóre rezultaty były uprzednio opublikowane w pracach [7]–[10].

Rozważany układ posiada dwa parametry a i b, od wartości których zależy jego zachowanie. W rozdziale 2 przeprowadzona została pełna analiza układu liniowego (2.1) skojarzonego z rozważanym układem nieliniowym. Sklasyfikowane zostały trajektorie układu dla różnych wartości parametrów a i b. W rozdziale 3 wprowadzono metodę analizy rozważanego układu za pomocą sekwencji symboli. W rozdziale 3.1 udowodniono twierdzenie 3.1 pozwalające używając analizy symbolicznej na wyznaczanie orbit okresowych o danym okresie. W rozdziale 3.2 podano twierdzenia służące do badania stabilności orbit okresowych. W rozdziałach 3.3–3.6 na podstawie twierdzenia 3.1 wyznaczono wszystkie orbity okresowe o okresach 1–4 dla dowolnych wartości parametrów a i b. Ich stabilność rozstrzygnięto na podstawie twierdzeń 3.2 i 3.3.

W rozdziale 4 przedstawiono wyniki analizy dynamiki układu dla różnych parametrów. Dla (a,b) należących do T_1, T_2, P_1, P_2, Q_4 (rys. 2.3) przeprowadzono pełną klasyfikację zbiorów granicznych trajektorii. Dla (a, b) należących do Q_1 i Q_2 wyznaczono zbiory graniczne trajektorii dla $|b| \geqslant 1$. Dla $|b| < 1$ wykonano eksperymenty potwierdzające przypuszczenie, że w tym przypadku charakteryzacja jest taka jak dla $|b| \geqslant 1$.

Rozdział 5 został poświęcony analizie układu dla parametrów należących do Q_3.



Rysunek 1.1: Charakterystyka nasyceniowa

Udowodniono twierdzenie o istnieniu zbioru niezmienniczego w postaci brzegu absolutnie wypukłego wielokąta pochłaniającego wszystkie niezerowe trajektorie układu. W celu przeprowadzenia analizy układu podano uogólnienie twierdzenia o istnieniu liczby obrotu dla homeomorfizmu okręgu na odwzorowania okręgu słabo monotoniczne. Udowodniono również twierdzenie o zbieżnosci trajektorii takiego odwzorowania okręgu dla przypadku gdy liczba obrotu jest wymierna. Na podstawie tych twierdzeń podano częściową analizę dynamiki badnego układu dla (a,b) należących do Q_3.

1.1 Sformułowanie zagadnienia

Rozważany dyskretny układ semidynamiczny opisany jest równaniem:

$$\mathbf{x}[k+1] = \begin{pmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2[k] \\ f(b \cdot x_1[k] + a \cdot x_2[k]) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

z warunkiem początkowym $\mathbf{x}[0] = (x_1[0], x_2[0])^T \in \Omega = I^2 := \{\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T : x_1, x_2 \in [-1, 1]\}$, gdzie f jest charakterystyką nasyceniową:

$$f(x) = \frac{1}{2}(|x+1| - |x-1|). \tag{1.2}$$

Często stosuje się charakterystykę modularną:

$$h(x) = (x+1) \mod 2 - 1. \tag{1.3}$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$g(\mathbf{x}) = g((x_1, x_2)^T) := b \cdot x_1 + a \cdot x_2,$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}((x_1, x_2)^T) := (x_2, f(bx_1 + ax_2))^T,$$

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}((x_1, x_2)^T) := (x_2, bx_1 + ax_2)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix} \mathbf{x} =: \mathbf{A}\mathbf{x}$$

$O := (0,0)^T$, $A := (1,1)^T$, $B := (1,-1)^T$, $C := (-1,-1)^T$, $D := (-1,1)^T$. A, B, C, D są wierzchołkami kwadratu Ω zaś O jego środkiem. Wprowadźmy następujące definicje: X—zbiór, $h : X \mapsto X$—odwzorowanie, $h^0 := id_X$, $h^n := h^{n-1} \circ h$ dla $n \geqslant 1$.

Definicja 1.1. $x \in X$ nazywamy *punktem stałym* jeśli $h(x) = x$.

Definicja 1.2. $x \in X$ nazywamy *punktem okresowym* jeśli istnieje $n > 0$ takie, że $h^n(x) = x$. Najmniejszą liczbę naturalną n o tej własności nazywamy *okresem* punktu x.

Definicja 1.3. Zbiór $\varphi(x) := \{h^n(x) : n \geqslant 0\}$ nazywamy *trajektorią* punktu x.

Definicja 1.4. $A \subset X$ nazywamy *zbiorem niezmienniczym* jeśli $(x \in A \Rightarrow \varphi(x) \in A)$.

Definicja 1.5. $A, B \subset X$. A *pochłania* B jeśli A jest niezmienniczy oraz dla każdego $x \in B$ istnieje $n \geqslant 0$ takie, że $h^n(x) \in A$.

(X,d) — przestrzeń metryczna.

Definicja 1.6. Zbiór $\omega(x) := \{y \in X : \exists n_k \to \infty : h^{n_k}(x) \to y\}$ nazywamy *zbiorem granicznym* punktu x.

Definicja 1.7. Zbiór niezmienniczy A nazywamy *stabilnym* jeśli $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ takie, że $(d(A,x) \leqslant \delta \Rightarrow \forall n > 0 \quad d(A, h^n(x)) \leqslant \varepsilon)$.

Definicja 1.8. Zbiór niezmienniczy A nazywamy *asymptotycznie stabilnym* jeśli

1. A jest stabilny,
2. istnieje U — otoczenie A takie, że $\forall x \in U$ zachodzi $h^n(x) \xrightarrow{n\to\infty} A$.

Definicja 1.9. Zbiór niezmienniczy A nazywamy *absolutnie stabilnym* jeśli

1. A jest stabilny,
2. istnieje U — otoczenie A i istnieje $n > 0$ takie, że $h^n(U) \subset A$.

Rozdział 2

ANALIZA UKŁADU LINIOWEGO

Rozważmy najpierw skojarzony z układem nieliniowym (1.1) układ liniowy:

$$\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{G}(\mathbf{x}[k]) = \mathbf{A}\mathbf{x}[k], \tag{2.1}$$

z warunkiem początkowym $\mathbf{x}[0] \in \mathbb{R}^2$. Wielomian charakterystyczny macierzy $\mathbf{A}$ ma postać: $z^2 - az - b$. Jego pierwiastki są równe:

$$z_{1,2} = \frac{a \mp \sqrt{a+4b}}{2}. \tag{2.2}$$

Na rys. 2.1 linią ciągłą zaznaczona jest łamana utworzona z dwóch półprostych i odcinka, odpowiadająca punktom (a, b) dla których $|z_1| = 1$. Po prawej stronie łamanej leżą punkty (a, b) dla których $|z_1| < 1$, po lewej stronie punkty dla których $|z_1| > 1$. Podobne zbiory parametrów dla pierwiastka z_2 przdstawione zostały na rys. 2.2. Podzielmy płaszczyznę a, b na rozłączne podzbiory w sposób przedstawiony na rys. 2.3. Podział ten odpowiada położeniu pierwiastków równania charakterystycznego względem okręgu jednostkowego. Na podstawie położenia pierwiastków dla każdego z tych podzbiorów można scharakteryzować zbiory graniczne trajektorii dla układu liniowego. Charakteryzację taką można uzyskać sprowadzając układ liniowy (2.1) do sprzężonego z nim układu dynamicznego opisanego macierzą Jordana.

1. $(a, b) \in T$, $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$.

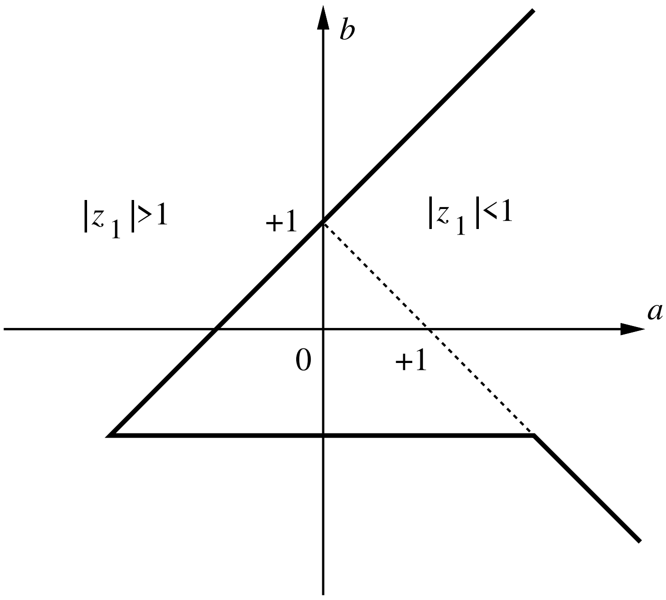
   Każda trajektoria zmierza do O.

2. $(a, b) \in Q_3 \cup Q_4$, $|z_1| > 1$, $|z_2| > 1$.

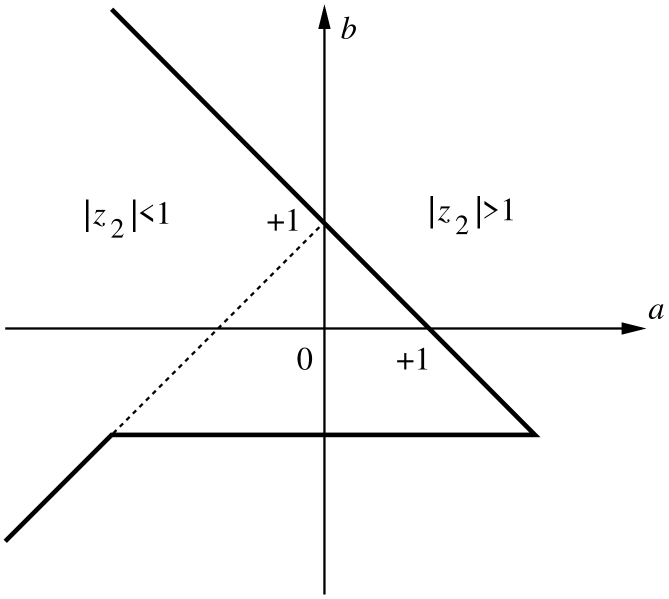
   Dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \setminus O$ zachodzi $|\mathbf{G}^n(\mathbf{x})| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

3. $(a, b) \in Q_1$, $|z_1| < 1$, $|z_2| > 1$.

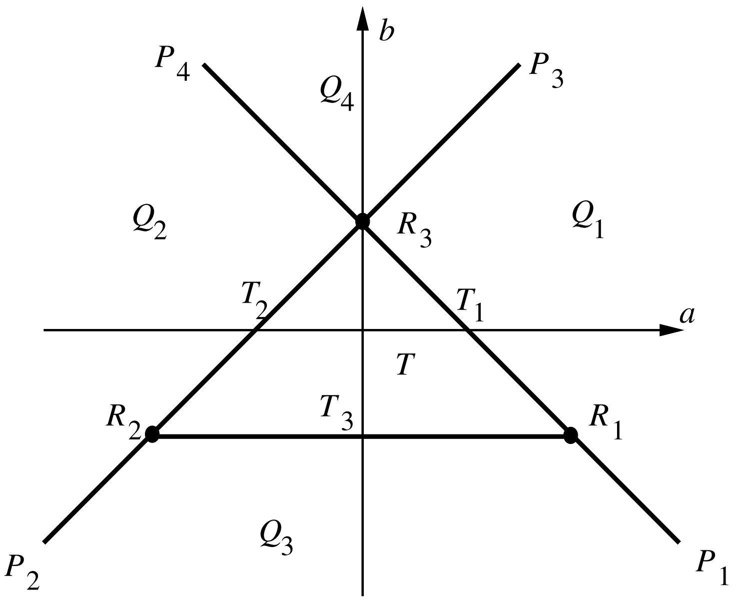
   Istnieje prosta k przechodząca przez O taka, że jeśli $\mathbf{x} \in k$ to $\mathbf{G}^n(\mathbf{x}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} O$. Jeśli $\mathbf{x} \notin k$ to $|\mathbf{G}^n(\mathbf{x})| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Można wykazać, że prosta k opisana jest równaniem:



Rysunek 2.1: Obszary $|z_1| > 1$, $|z_1| < 1$ na płaszczyźnie a, b



Rysunek 2.2: Obszary $|z_2| > 1$, $|z_2| < 1$ na płaszczyźnie a, b



Rysunek 2.3: Podział płaszczyzny (a, b) na zbiory T, T_1, T_2, T_3, R_1, R_2, R_3, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, P_1, P_2, P_3, P_4

$z_2x_2 + bx_1 = 0$. W tym przypadku pierwiastki z_1 i z_2 są rzeczywiste, bo mają rożne wartości bezwzględne. Zatem powyższe równanie na prostą k jest dobrze określone.

4. $(a, b) \in Q_2$, $|z_1| > 1$, $|z_2| < 1$. Istnieje prosta k (k: $z_1x_2 + bx_1 = 0$) taka, że jeśli $\mathbf{x} \in k$ to $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} O$. Jeśli $\mathbf{x} \notin k$ to $\mathbf{G}^n(\mathbf{x}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

5. $(a, b) \in T_1$, $|z_1| < 1$, $z_2 = 1$.

$$\mathbf{G}^n(\mathbf{x}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (B_x, B_x)^T \in \mathbb{R}^2 \text{ gdzie } B_x = (z_2x_2 + bx_1)/(z_2 - z_1).$$

6. $(a, b) \in T_2$, $z_1 = -1$, $|z_2| < 1$.

$$\mathbf{G}^n(\mathbf{x}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (-1)^n(-A_x, A_x)^T \text{ gdzie } A_x = (z_1x_2 + bx_1)/(z_1 - z_2).$$

7. $(a, b) \in T_3$, $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $z_1 \neq z_2$.

W tym przypadku dynamika układu jest bardziej skomplikowana. Zauważmy, że:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\Theta & \sin\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\Theta & \sin\Theta \\ -\sin\Theta & \cos\Theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \cos\Theta & \sin\Theta \end{pmatrix}^{-1} \\
&=: \mathbf{S}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{S}^{-1},
\end{aligned}$$

gdzie $a/2 = \cos\Theta$, $0 < \Theta < \pi$.

Zdefiniujmy liniową transformację $\bar{\mathbf{x}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}$. Otrzymamy wtedy sprzężony układ dynamiczny $\bar{\mathbf{x}}[k+1] = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}[k]$. Mnożenie przez $\bar{\mathbf{A}}$ odpowiada obrotowi o kąt Θ. Dla danego warunku początkowego $\mathbf{x}[0]$ jego trajektoria leży na okręgu o środku w punkcie zero i promieniu $\sqrt{\bar{\mathbf{x}}_1^2[0] + \bar{\mathbf{x}}_2^2[0]}$. Niech $\Theta = 2\pi r$. Jeśli r jest liczbą wymierną to trajektorie układu składają się ze skończonej ilości izolowanych punktów. Jeśli r jest niewymierne to trajektorie są złożone z nieskończonej ilości punktów i są gęste na okręgu.

Aby otrzymać trajektorie układu oryginalnego należy odwzorować trajektorię $\mathbf{x}[k]$ przez transformację $\mathbf{S}$. Obrazem okręgu przez transformację $\mathbf{S}$ jest elipsa. Zatem jeśli $\frac{1}{2\pi}\arccos(\frac{a}{2})$ jest liczbą wymierną to trajektorie są złożone ze skończonej ilości punktów. W przeciwnym przypadku trajektorie są gęste na elipsie.

8. $(a,b) \in R_3$, $z_1 = -1$, $z_2 = 1$. Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$.

   Jeśli $x_1 = x_2$ to $\mathbf{x}$ jest punktem stałym. Jeśli $x_1 \neq x_2$ to $\mathbf{x}$ jest punktem okresowym o okresie 2 ($\mathbf{G}^n(\mathbf{x}) = (-1)^n\mathbf{x}$).

9. $(a,b) \in R_1$, $z_1 = z_2 = 1$. $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$.

   Jeśli $x_1 = x_2$ to $\mathbf{x}$ jest punktem stałym. Jeśli $x_1 \neq x_2$ to $|\mathbf{G}^n(\mathbf{x})| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

10. $(a,b) \in R_2$, $z_1 = z_2 = -1$. $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$.

    O jest punktem stałym. Jeśli $x_1 \neq -x_2$ to $|\mathbf{G}^n(\mathbf{x})| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Jeśli $\mathbf{x} \neq O$, $x_1 = -x_2$ to $\mathbf{x}$ jest punktem okresowym o okresie 2.

11. $(a,b) \in P_1$, $z_1 = 1$, $|z_2| > 1$ lub $(a,b) \in P_4$, $|z_1| > 1$, $z_2 = 1$. $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$.

    Jeśli $x_1 = x_2$ to $\mathbf{x}$ jest punktem stałym. Jeśli $x_1 \neq x_2$ to $|\mathbf{G}^n(\mathbf{x})| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

12. $(a,b) \in P_2$, $|z_1| > 1$, $z_2 = -1$ lub $(a,b) \in P_3$, $z_1 = -1$, $|z_2| > 1$. $\mathbf{x} = (x_{1,2})^T$.

    O jest punktem stałym. Jeśli $x_1 \neq -x_2$ to $|\mathbf{G}^n(\mathbf{x})| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Jeśli $\mathbf{x} \neq O$, $x_1 = -x_2$ to $\mathbf{x}$ jest punktem okresowym o okresie 2.

Po sprowadzeniu macierzy $\mathbf{A}$ do postaci Jordana lub po zastosowaniu metody funkcji tworzących można również wypisać wzór na trajektorie w postaci nierekurencyjnej. Jeśli $z_1 \neq z_2$ to dla $k \geqslant 0$

$$x_1[k+1] = x_2[k] = A_x z_1^k + B_x z_2^k, \tag{2.3}$$

gdzie

$$A_x = \frac{z_1 x_2[0] + b x_1[0]}{z_1 - z_2}, \quad B_x = \frac{z_2 x_2[0] + b x_1[0]}{z_2 - z_1}.$$

Jeśli $z_1 = z_2 = a/2$ to dla $k > 0$

$$x_1[k+1] = x_2[k] = (A_x + B_x(k+1))z_1^{k-1}, \tag{2.4}$$

gdzie $A_x = -bx_1[0]$, $B_x = ax_2[0]/2 + bx_1[0]$.

Rozdział 3

UKŁAD NIELINIOWY — ANALIZA SYMBOLICZNA

Analizowany układ opisany jest równaniem:

$$\mathbf{x}[k+1] = \begin{pmatrix} x_1[k+1] \\ x_2[k+1] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2[k] \\ f(b \cdot x_1[k] + a \cdot x_2[k]) \end{pmatrix} = \mathbf{F}(\mathbf{x}[k]), \tag{3.1}$$

z warunkiem początkowym $\mathbf{x}[0] = (x_1[0], x_2[0])^T \in \Omega$. Zdefiniujmy odwzorowanie S prowadzące z Ω do przestrzeni ciągów o wyrazach $s_k \in \{-1, 0, 1\}$.

Definicja 3.1. $S : \Omega \ni \mathbf{x} \mapsto S(\mathbf{x}) \in \Sigma = \{(s_0 s_1 \dots) : s_k \in \{-1, 0, 1\}, k = 0, 1, 2...\}$, $k \geqslant 0$, $\mathbf{x}^k := \mathbf{F}^k(\mathbf{x})$

$$s_k = S(\mathbf{x})_k := \begin{cases} -1 & bx_1^k + ax_2^k < -1, \\ 0 & |bx_1^k + ax_2^k| \leqslant 1, \\ 1 & bx_1^k + ax_2^k > 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Oznaczmy:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Na podstawie znajomości s_k i $\mathbf{x}^k$ możemy wyznaczyć wartość $\mathbf{x}^{k+1}$:

Lemat 3.1. *Niech* $\mathbf{x} \in \Omega$, $s_k := S(\mathbf{x})_k$, $\mathbf{x}^k := \mathbf{F}^k(\mathbf{x})$, $\mathbf{A}_k = \mathbf{A} - \mathbf{D}|s_k|$. *Wówczas*

$$\forall k \geqslant 0 \qquad \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{x}^k + \mathbf{b} s_k. \tag{3.3}$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{k+1} &= \mathbf{F}(\mathbf{x}^k) = \begin{pmatrix} x_2^k \\ f(bx_1^k + ax_2^k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^k \\ bx_1^k + ax_2^k - |s_k|(bx_1^k + ax_2^k) + s_k \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} x_2^k \\ bx_1^k + ax_2^k \end{pmatrix} - |s_k| \begin{pmatrix} 0 \\ bx_1^k + ax_2^k \end{pmatrix} + s_k \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}^k - \mathbf{D}|s_k|\mathbf{x}^k + s_k \mathbf{b} = (\mathbf{A} - \mathbf{D}|s_k|)\mathbf{x}^k + \mathbf{b} s_k = \mathbf{A}_k \mathbf{x}^k + \mathbf{b} s_k. \end{aligned}$$

□

Lemat 3.1 pokazuje, iż układ semidynamiczny (3.1) może być rozważony jako liniowy, niestacjonarny (macierz $\mathbf{A}_k$ zależy od k), układ dyskretny opisany równaniem (3.3) z warunkiem początkowym $\mathbf{x}[0]$ sterowany przez sekwencję s_0, s_1, s_2, ... Znajomość sekwencji s_k oraz punktu początkowego $\mathbf{x}$ pozwala na wyznaczenie trajektorii w następujący sposób:

Lemat 3.2. *Niech* $\mathbf{x} \in \Omega$, $s_k := S(\mathbf{x})_k$, $\mathbf{A}_k = \mathbf{A} - \mathbf{D}|s_k|$. *Wówczas* $\forall k \geqslant 0$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_k\mathbf{A}_{k-1}\dots\mathbf{A}_0\mathbf{x} + (\mathbf{A}_k\dots\mathbf{A}_1 s_0 + \dots + \mathbf{A}_k s_k + \mathbf{I}s_k)\mathbf{b} \tag{3.4}$$

Dowód. $k \geqslant 0$. Teza wynika z k krotnego zastosowania lematu 3.1. □

3.1 Wyznaczanie orbit okresowych

Poniżej sformułowane i udowodnione zostanie twierdzenie, pozwalające na skonstruowanie algorytmu wyznaczania wszystkich orbit okresowych o danym okresie.

Twierdzenie 3.1. $\mathbf{x} \in \Omega$, $k \geqslant 0$. *Następujące warunki są równoważne:*

1. $\mathbf{x}$ *jest punktem okresowym odwzorowania* $\mathbf{F}$ *o okresie* $k+1$,
2. *istnieją liczby* s_0, s_1, $\dots s_k \in \{-1, 0, 1\}$ *takie, że* $\mathbf{x}$ *spełnia równanie:*

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}_k\mathbf{A}_{k-1}..\mathbf{A}_0\mathbf{x} + (\mathbf{A}_k\dots\mathbf{A}_1 s_0 + \dots + \mathbf{A}_k s_{k-1} + \mathbf{I}s_k)\mathbf{b}, \tag{3.5}$$

gdzie $\mathbf{A}_j = \mathbf{A} - \mathbf{D}|s_j|$ *i ponadto punkty* $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}^1$, $\dots$, $\mathbf{x}^{k-1}$ *zdefiniowane następująco:*

$$\mathbf{x}^0 := \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^{j+1} := \mathbf{A}_j\mathbf{x}^j + \mathbf{b}s_j \ \textit{dla } j = 0, ..., k-1, \tag{3.6}$$

spełniają warunki:

$$\begin{cases} |bx_1^j + ax_2^j| \leqslant 1 & \textit{dla} \quad s_j = 0 \\ bx_1^j + ax_2^j > 1 & \textit{dla} \quad s_j = 1 \\ bx_1^j + ax_2^j < -1 & \textit{dla} \quad s_j = -1 \end{cases} \qquad \textit{dla } j = 0, \dots, k \tag{3.7}$$

oraz

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^j \ \textit{dla } j = 1, \dots, k. \tag{3.8}$$

Dowód. $(2 \Rightarrow 1)$ Należy wykazać, że $\mathbf{F}^{k+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ oraz że $k+1$ jest okresem punktu $\mathbf{x}$. Z warunków (3.6) i (3.7) wynika, że $\mathbf{x}^j = \mathbf{F}^j(\mathbf{x})$ oraz $s_j = S(\mathbf{x})_j$ dla $j = 0, \dots, k$. Stąd na podstawie (3.5) i lematu 3.2 $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{k+1}) = \mathbf{x}$. Na podstawie (3.8) $k+1$ jest okresem punktu $\mathbf{x}$.

$(1 \Rightarrow 2)$ Niech $s_j = S(\mathbf{x})_j$, $\mathbf{x}^j = \mathbf{F}^j(\mathbf{x})$ dla $j = 0, \dots, k$. Ponieważ $\mathbf{F}^{k+1}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ to na podstawie lematu 3.2 otrzymujemy (3.5). Na podstawie lematu 3.1 otrzymujemy warunki (3.6). Warunki (3.7) wynikają bezpośrednio z definicji odwzorowania S. Ponieważ $k+1$ jest okresem punktu $\mathbf{x}$ to $\mathbf{x}^j \neq \mathbf{x}$ dla $j = 1, \dots, k$. □

Uwaga 3.1. Równanie (3.5) może nie mieć rozwiązań. Może również istnieć wiele rozwiązań tego równania. Oznaczmy

$$\mathbf{E} := \mathbf{I} - \mathbf{A}_k\mathbf{A}_{k-1}\dots\mathbf{A}_0.$$

Jeśli $\det\mathbf{E} \neq 0$ to rozwiązanie istnieje i jest tylko jedno.

Uwaga 3.2. Wystarczy ograniczyć się do sprawdzania ciągów k-elementowych dających różne cykle. Mówimy, że ciągi $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$ i $t_0, t_1, \dots, t_{k-1}$ dają ten sam cykl jeśli $\exists j \in \mathbb{N}$ takie, że ciągi $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$ i $t_j, t_{j+1}, \dots, t_{k-1}, t_0, \dots, t_{j-1}$ są sobie równe.

Dowód. Ciągi $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$ i $s_j, s_{j+1}, \dots, s_{k-1}, s_0, \dots, s_{j-1}$ prowadzą do wyznaczenia tych samych orbit okresowych. Jeśli $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{k-1}$ jest orbitą okresową o okresie k, to $\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^{j+1}, \dots, \mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{x}^0, \dots, \mathbf{x}^{j-1}$ jest również taką orbitą. Jeśli sprawdzenie ciągu $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$ prowadzi do wyznaczenia orbity $\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{k-1}$, to sprawdzenie ciągu $s_j, s_{j+1}, \dots, s_{k-1}, s_0, \dots, s_{j-1}$ prowadzi do wyznaczenia orbity $\mathbf{x}^j, \mathbf{x}^{j+1}, \dots, \mathbf{x}^{k-1}, \mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{x}^{j-1}$. □

Uwaga 3.3. Jeśli ciąg $s_0, s_1, \dots, s_{k-1}$ prowadzi do wyznaczenia punktu okresowego $\mathbf{x}$ to ciąg $-s_0, -s_1, \dots, -s_{k-1}$ prowadzi do wyznaczenia punktu okresowego $-\mathbf{x}$.

Dowód. Odwzorowanie $\mathbf{F}$ jest symetryczne względem początku układu tzn. $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\mathbf{F}(-\mathbf{x})$. Z definicji odwzorowania S wynika, że $S(\mathbf{x}) = -S(-\mathbf{x})$. Z twierdzenia 3.1 wynika powyższa uwaga. □

3.2 Stabilność orbit okresowych

W wielu przypadkach stabilność orbit okresowych można rozstrzygnąć na podstawie następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3.2. *Jeżeli $\mathbf{K} = (\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, \dots, \mathbf{x}^{k-1})$ jest orbitą okresową o okresie k, jeden z wierzchołków kwadratu Ω należy do orbity $\mathbf{K}$ oraz $|g(\mathbf{x}^j)| \neq 1$ dla $j = 0, \dots, k-1$ (gdzie $g(\mathbf{x}) = bx_1 + ax_2$) to orbita $\mathbf{K}$ jest absolutnie stabilna.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy dla przypadku gdy $A = (1,1)^T$ należy do orbity $\mathbf{K}$. Bez straty ogólności można założyć, że $\mathbf{x}^0$ spełnia warunek $\mathbf{F}^2(\mathbf{x}^0) = A$. $\mathbf{F}^2(\mathbf{x}^0) = \mathbf{F}^2((x_1^0, x_2^0)^T) = (f(bx_1^0+ax_2^0), f(bx_2^0+af(bx_1^0+ax_2^0)))^T = (1,1)^T$. Stąd $f(bx_1^0+ax_2^0) = 1$ i zatem $bx_1^0 + ax_2^0 \geqslant 1$. Ponieważ $bx_1^0 + ax_2^0 = |g(\mathbf{x}^0)| \neq 1$ to $bx_1^0 + ax_2^0 > 1$. Podobnie pokazuje się, że $b_2^0x + a > 1$. Ponieważ $bx_1^0 + ax_2^0 > 1$ i $bx_2^0 + a > 1$ to istnieje U — otoczenie $\mathbf{x}^0$ w Ω takie, że jeśli $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in U$ to $bx_1 + ax_2 > 1$ i $bx_2 + a > 1$. Wobec tego $\mathbf{F}^2(U) = A$.

Niech $\mathbf{x} \in \mathbf{K}$. Wówczas istnieje $p \leqslant k$ takie, że $\mathbf{F}^p(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^0$. Ponieważ f jest funkcją ciągłą oraz zestawienie odwzorowań ciągłych jest ciągłe, to $\mathbf{F}$ jest ciągłe. $\mathbf{F}^p$ jest ciągłe jako złożenie odwzorowań ciągłych. $V := (\mathbf{F}^p)^{-1}(U)$ jest zbiorem otwartym w Ω jako przeciwobraz zbioru otwartego U przez odwzorowanie ciągłe. Oczywiście $\mathbf{x} \in V$. Zatem dla każdego $\mathbf{x}$ z orbity okresowej $\mathbf{K}$ istnieje V — otoczenie $\mathbf{x}$ oraz liczba naturalna $p \leqslant k$ takie, że $\mathbf{F}^{p+2}(V) = (1,1)^T$. Wobec tego orbita $\mathbf{K}$ jest absolutnie stabilna. □

Wniosek 3.1. *Niech $\mathbf{x}$ będzie punktem okresowym o okresie k, $s_j = S(\mathbf{x})_j$. Załóżmy, że istnieje $p \geqslant 0$ takie, że $|s_p| = |s_{p+1}| = 1$. Wówczas orbita okresowa zawierająca punkt $\mathbf{x}$ jest absolutnie stabilna.*

Dowód. Warunek $|s_p| = |s_{p+1}| = 1$ oznacza, że $\mathbf{x}_{p+2}$ jest jednym z wierzchołków kwadratu Ω. Z definicji odwzorowania S (definicja 3.1) wynika, że $|g(\mathbf{x}^p)| \neq 1$ i $|g(\mathbf{x}^{p+1})| \neq 1$. Powtarzając dowód twierdzenia 3.2 otrzymujemy tezę. □

Twierdzenie 3.2 i wniosek 3.1 nie obejmują przypadku gdy orbita okresowa nie zawiera ani jednego wierzchołka kwadratu Ω. Wówczas często w celu rozstrzygnięcia stabilności orbity okresowej można zastosować następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.3. *Jeżeli $\mathbf{K} = (\mathbf{x}^0, \mathbf{x}^1, ..., \mathbf{x}^{k-1})$ jest orbitą okresową o okresie k, $s_j := S(\mathbf{x}^0)_j$, $\mathbf{A}_j = \mathbf{A} - \mathbf{D}|s_j|$, $|g(\mathbf{x}^j)| \neq 1$ dla $j = 0, \ldots, k-1$, to*

1. *jeśli macierz $\mathbf{A}_{k-1} \ldots \mathbf{A}_1\mathbf{A}_0$ ma wartości własne wewnątrz okręgu jednostkowego to orbita $\mathbf{K}$ jest asymptotycznie stabilna,*

2. *jeśli przynajmniej jedna z wartości własnych macierzy $\mathbf{A}_{k-1} \ldots \mathbf{A}_1\mathbf{A}_0$ leży na zewnątrz okręgu jednostkowego to orbita $\mathbf{K}$ nie jest asymptotycznie stabilna.*

Dowód. Warunek $|g(\mathbf{x})| \neq 1$ oznacza, że odwzorowanie $\mathbf{F}$ jest afiniczne w otoczeniu punktu $\mathbf{x}$. Ponieważ $|g(\mathbf{x}^j)| \neq 1$ dla $j = 0, \ldots, k-1$ to istnieje otoczenie U punktu $\mathbf{x}^0$ takie, że odwzorowanie $\mathbf{F}^k$ jest afiniczne na U. Niech $\mathbf{y} := \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$. Wówczas $O \in \mathbb{R}^2$ jest punktem stałym odwzorowania liniowego $U \ni \mathbf{y} \mapsto \mathbf{F}^k(\mathbf{y})$. Stabilność punktu stałego zależy od wartości własnych macierzy $\mathbf{A}_{k-1} \ldots \mathbf{A}_1\mathbf{A}_0$ i jest równoważna stabilności orbity $\mathbf{K}$. □

W przypadku gdy do orbity okresowej należy punkt $\mathbf{x}$ taki, że $|g(\mathbf{x})| = 1$ to nie można wybrać otoczenia punktu $\mathbf{x}$ na którym $\mathbf{F}$ jest afiniczne. Stwierdzono istnienie takich orbit okresowych jednak nie znaleziono stabilnej orbity okresowej tego typu.

Uwaga 3.4. $\mathbf{K}$ jest orbitą okresową. Jeśli istnieje punkt z orbity $\mathbf{K}$, taki, że w każdym jego otoczeniu znajduje się punkt należący do innej orbity okresowej, to orbita $\mathbf{K}$ nie jest asymptotycznie stabilna.

3.3 Punkty stałe

Poszukujemy orbit o okresie 1. Skorzystamy z twierdzenia 3.1 dla k=0. Wystarczy rozważyć 3 przypadki ($s_0 = 0, 1, -1$). Dla $k = 0$ równanie (3.5) ma postać: $\mathbf{x} = \mathbf{A}_0\mathbf{x} + \mathbf{b}s_0$, $\mathbf{E} := \mathbf{I} - \mathbf{A}_0$.

I. $s_0 = 0$. Równanie (3.5):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -b & 1-a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Jeśli $\det \mathbf{E} \neq 0$ to istnieje tylko jeden punkt stały $\mathbf{x}^0 = (x_1, x_2)^T = (0,0)^T$.

b) $\det \mathbf{E} = 0$ $(a + b = 1)$.

Rozwiązania równania (3.5): $\mathbf{x}^0 = (x, x)^T$ dla $x \in \mathbb{R}$.

Warunek (3.7): $1 \geqslant |bx + ax| = |b + a||x| = |x|$. Zatem $(x, x)^T$ jest punktem stałym przy $a + b = 1$ dla każdego $x \in [-1, 1]$.

II. . $s_0 = 1$. Równanie (3.5):

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Rozwiązanie: $(x_1, x_2)^T = (1,1)^T \in \Omega$. Warunek (3.7): $1 < bx_1 + ax_2 = b + a$.

III. $s_o = -1$. Na podstawie (II) i uwagi 3.3 $(-1,-1)^T$ jest punktem stałym dla $a + b > 1$.

Stabilność punktów stałych

1. a, b — dowolne; $O = (0,0)^T$ — punkt stały. Dla $(a, b) \in T$ punkt ten jest asymptotycznie stabilny, zaś dla $(a, b) \notin T$ nie jest on asymptotycznie stabilny (na podstawie analizy układu liniowego i twierdzenia 3.3).

2. $a + b > 1$; $(1,1)^T, (-1,-1)^T$ — punkty stałe absolutnie stabilne (Wn.3.1).

3. $a + b = 1$; $(x, x)^T$, $(x \in [-1, 1])$ — nie asymptotycznie stabilne (uwaga 3.4).

3.4 Orbity okresowe o okresie 2

Skorzystamy z twierdzenia 3.1 dla $k = 1$. Na podstawie uwagi 3.2 wystarczy sprawdzić następujące ciągi dwuelementowe: 00, 11, $-1-1$, $1-1$, 01, $0-1$. Dla $k = 1$ równanie (3.5) ma postać: $\mathbf{x} = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_0\mathbf{x} + (\mathbf{A}_1 s_0 + \mathbf{I}s_1)\mathbf{b}$, $\mathbf{E} := \mathbf{I} - \mathbf{A}_1\mathbf{A}_0$.

I. 00

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1-b & -a \\ -ab & 1-b-a^2 \end{pmatrix},$$

$$\det \mathbf{E} = 1 - b - a^2 - b + b^2 + ba^2 - ba^2 = (b-1)^2 - a^2.$$

a) Jeśli $\det \mathbf{E} \neq 0$ to rozwiązanie $\mathbf{x} = (0,0)^T$ jest punktem stałym.

b) $\det \mathbf{E} = 0$

(1) $1-b=-a \Rightarrow ax_1+ax_2=0$,

(i) Jeśli $a=0$ to rozwiązaniem (3.5) są dowolne x_1, x_2. Orbita: $((x_1,x_2)^T,(x_2,x_1)^T)$, warunki (3.7): $|x_1| \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant 1$, warunek (3.8): $x_1 \neq x_2$.

(ii) Jeśli $a \neq 0$ to rozwiązaniem (3.5) jest $x_1=-x_2$.

Orbita $((x,-x)^T,(-x,x)^T)$, warunki (3.7): $|x| \leqslant 1$, warunek (3.8): $x \neq 0$.

(2) $1-b=a \Rightarrow ax_1-ax_2=0$

(i) Jeśli a=0 to otrzymujemy orbity jak w przypadku (1i).

(ii) Jesli $a \neq 0$ to rozwiązaniem jest $x_1=x_2$ (punkt stały).

II. 11 prowadzi do wyznaczenia punktu stałego $(1,1)^T$.

III. $-1-1$ prowadzi do wyznaczenia punktu stałego $(-1,-1)^T$.

IV. $1-1$

Równanie (3.5):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Orbita: $((1,-1)^T,(-1,1)^T)$. Warunki (3.7): $bx_1^1+ax_2^1=b-a>1$, $bx_1^2+ax_2^2=-b+a<-1$.

V. 01

Równanie (3.5):

$$\begin{pmatrix} 1-b & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \det \mathbf{E}=1-b,$$

a) $\det \mathbf{E}=0$ $(b=1)$,

1. Dla $a=0$ otrzymujemy rozwiązanie: $\mathbf{x}^0=(x,1)^T$, $\mathbf{x}^1=(1,x)^T$. Warunki (3.7): $|bx| \leqslant 1$, $b>1$ są sprzeczne.
2. Dla $a \neq 0$ równanie (3.5) jest sprzeczne.

b) $\det \mathbf{E} \neq 0$ $(b \neq 1)$, Rozwiązanie

$$\mathbf{x}^0=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a/(1-b) \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}^1=\begin{pmatrix} 1 \\ a/(1-b) \end{pmatrix}.$$

Przekształcając warunki (3.7) otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
|bx_1^1 + ax_2^1| &= |\frac{ba}{1-b} + a| \leqslant 1 \iff \\
&\iff |\frac{a}{1-b}| \leqslant 1 \iff |a| \leqslant |1-b| \iff \\
&\iff (b-1 \geqslant |a|) \text{ lub } (b-1 \leqslant -|a|) \iff \\
&\iff (b \geqslant 1+|a|) \text{ lub } (b \leqslant 1-|a|) \\
bx_1^2 + ax_2^2 &= b + aa/(1-b) > 1 \iff \\
&\iff \frac{2b - b^2 + a^2 - 1}{1-b} > 0 \iff \\
&\iff (a^2 - (b-1)^2)(1-b) > 0 \iff \\
&\iff (b-a-1)(b+a-1)(b-1) > 0
\end{aligned}$$

i ostatecznie $b > 1 + |a|$.

VI. $0 - 1$

Na podstawie przypadku (V) i uwagi 3.3 dla $b > 1+|a|$ istnieje orbita okresowa: $((-a/(1-b), -1)^T, (-1, -a/(1-b))^T)$.

Stabilność orbit okresowych o okresie 2

1. $(a, b) = (0, 1)$;

   $((x_1, x_2)^T, (x_2, x_1)^T)$ dla $(x_1, x_2) \in I^2$, $x_1 \neq x_2$.

   Nie są asymptotycznie stabilne (uwaga 3.4),

2. $b = a + 1$;

   $((x, -x)^T, (-x, x)^T)$ dla $x \in [-1, 1]$, $x \neq 0$.

   Nie są asymptotycznie stabilne (uwaga 3.4),

3. $b > a + 1$; $((1, -1)^T, (-1, 1)^T)$ — orbita absolutnie stabilna (wniosek 3.1),

4. $b > |a|+1$; $((-a/(1-b), -1)^T, (-1, -a/(1-b))^T), ((a/(1-b), 1)^T, (1, a/(1-b))^T)$,

   Dla obu tych orbit jedna z wartości własnych macierzy $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_0$ leży poza okręgiem jednostkowym czyli orbity te są niestabilne (twierdzenie 3.3).

3.5 Orbity okresowe o okresie 3

Skorzystamy z twierdzenia 3.1 dla $k = 2$. Na podstawie uwagi 3.2 wystarczy sprawdzić sekwencje: 111, $-1-1-1$, $1-11$, $-11-1$, 011, $0-1-1$, $01-1$, $0-11$, 000, 001, $00-1$.

Dla $k = 2$ równanie (3.5) ma postać:

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_0\mathbf{x}^0 + (\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 s_0 + \mathbf{A}_2 s_1 + \mathbf{I} s_2)\mathbf{b},$$

$$\mathbf{E} := \mathbf{I} - \mathbf{A}_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_0.$$

I. 111 prowadzi do wyznaczenia punktu stałego $(1,1)^T$.

II. $-1-1-1$ prowadzi do wyznaczenia punktu stałego $(-1,-1)^T$.

III. $1-11$

Równanie (3.5):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Orbita: $((-1,1)^T, (1,1)^T, (1,-1)^T)$.

Warunki (3.7):

$$\begin{cases} -b + a > 1 & \text{(i)} \\ a + b < -1 & \text{(ii)} \\ b - a > 1 & \text{(iii)} \end{cases}$$

(i) i (iii) są sprzeczne.

IV. $-11-1$ warunki sprzeczne podobnie jak dla przypadku III.

V. 011

Równanie (3.5):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Orbita: $((1,1)^T, (1, a+b)^T, (a+b, 1)^T)$.

Warunki (3.7):

$$\begin{cases} |b + a| \leqslant 1 & \text{(i)} \\ b + a(a+b) > 1 & \text{(ii)} \\ (a+b)b + a > 1 & \text{(iii)} \end{cases}$$

(ii) $\iff b + a^2 + ab - 1 > 0 \iff b(a+1) + (a+1)(a-1) > 0 \iff (b + a - 1)(a+1) > 0$,

(iii) $\iff ab + b^2 + a - 1 > 0 \iff a(b+1) + (b+1)(b-1) > 0 \iff (b + a - 1)(b+1) > 0$.

Ponieważ $b + a - 1 \leqslant 0$ (z (i)) to $a + 1 < 0$ (z (ii)) i $b + 1 < 0$ (z (iii)). Zatem $a + b < -1 - 1 = -2$. Na podstawie (i) $a + b > -1$. Czyli warunki (i)..(iii) są sprzeczne.

VI. $0-1-1$ warunki sprzeczne podobnie jak dla przypadku V.

VII. $01-1$

Równanie (3.5):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Orbita: $((1,-1)^T, (-1, b-a)^T, (b-a, 1)^T)$.

Warunki (3.7):

$$\begin{cases} |b-a| \leqslant 1 & \text{(i)} \\ -b + a(b-a) > 1 & \text{(ii)} \\ b(b-a) + a < -1 & \text{(iii)} \end{cases}$$

Niech $\mathbf{W}_1 := \{(a,b) : a < -1, b < -1, b < (a^2+1)/(a-1), a < (b^2+1)/(b-1)\}$.

Można wykazać, że warunki (3.7) są spełnione dokładnie wtedy gdy $(a,b) \in \mathbf{W}_1$.

VIII. $0-11$

Na podstawie (VII) i uwagi 3.3 dla $(a,b) \in \mathbf{W}_1$ istnieje orbita:

$((-1,1)^T, (1, a-b)^T, (a-b, -1)^T)$.

IX. 000

Równanie (3.5):

$$\begin{pmatrix} 1-ab & -(b+a^2) \\ -b(b+a^2) & 1-2ab-a^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$\det \mathbf{E} = (1-ab)(1-2ab-a^3) - b(b+a^2)^2 = a^3 + b^3 + 3ab - 1 = (a+b-1)(a^2 + b^2 + a + b - ab + 1) = (a+b-1)[(a+b+2)^2 + 3(a-b)^2]/4$.

Rozwiązania niezerowe występują dla $\det \mathbf{E} = 0$.

$\det \mathbf{E} = 0 \iff a+b-1 = 0$ lub $(a+b+2)^2 + 3(a-b)^2 = 0 \iff a+b-1=0$ lub $(a,b) = (-1,-1)$.

a) $a = b = -1$

Orbita: $((x_1,x_2)^T, (x_2, -x_1-x_2)^T, (-x_1-x_2, x_2)^T)$.

Warunki (3.7):

$$\begin{cases} |x_2| \leqslant 1 & \text{(i)} \\ |x_1| \leqslant 1 & \text{(ii)} \\ |x_1 + x_2| \leqslant 1 & \text{(iii)} \end{cases}$$

b) $a + b = 1$

Z układu (3.5) otrzymujemy $(a^2 - a + 1)x_1 - (a^2 - a + 1)x_2 = 0$. Ponieważ dla dowolnego a: $a^2 - a + 1 > 0$ to $x_1 = x_2$. Przypadek ten prowadzi do wyznaczenia punktu stałego.

X. 001

Równanie (3.5) ma postać:

$$\begin{pmatrix} 1 - ab & -b - a^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a) $\det \mathbf{E} = 1 - ab = 0$.

Z równania (3.5) otrzymujemy:

$(x_2 = 1 \text{ i } x_2(b + a)^2 = 0) \Rightarrow b = -a^2$

$ab = 1 \Rightarrow a^3 = -1 \Rightarrow a = -1, b = -1$.

Warunki (3.7):

$$\begin{cases} |1 + x| \leqslant 1 & \text{(i)} \\ |-1 + 1 + x| \leqslant 1 & \text{(ii)} \\ 1 + x - x > 1 & \text{(iii)} \end{cases}$$

Warunek (iii) jest sprzeczny.

b) $ab - 1 \neq 0$, orbita:

$(((b+a^2)/(1-ab), 1)^T, (1, (a+b^2)/(1-ab))^T, ((a+b^2)/(1-ab), (b+a^2)/(1-ab))^T)$

Warunki (3.7): {

$$\begin{cases} |a + b^2| \leqslant |1 - ab| & \text{(i)} \\ |b + a^2| \leqslant |1 - ab| & \text{(ii)} \\ b(a + b^2)/(1 - ab) + a(b + a^2)/(1 - ab) > 1 & \text{(iii)} \end{cases}$$

(iii) $\iff (a^3+b^3+3ab-1)/(1-ab) > 0 \iff (a^3+b^3+3ab-1)(1-ab) > 0$

Ponieważ $(a^3 + b^3 + 3ab - 1) = (a + b - 1)[(a + b + 2)^2 + 3(a - b)^2]/4$ oraz $[(a + b + 2)^2 + 3(a - b)^2] \geqslant 0$ to (iii) $\iff (a + b - 1)(1 - ab) > 0$.

Niech $\mathbf{W}_2 = \overline{\mathbf{W}_1} \setminus \{(-1, -1)\}$. Można wykazać, że warunki (i)..(iii) są spełnione gdy $(a, b) \in \mathbf{W}_2$.

XI. $00 - 1$

Podobnie jak w przypadku X otrzymujemy dla $(a, b) \in \mathbf{W}_2$ orbitę:

$((-(b+a^2)/(1-ab), -1)^T, (-1, -(a+b^2)/(1-ab))^T, (-(a+b^2)/(1-ab), -(b+a^2)/(1-ab))^T)$.

Stabilność orbit okresowych o okresie 3

1. $(a,b)=(-1,-1)$; Jeśli $(x_1,x_2)^T \in I^2$ oraz $|x_1+x_2| \leqslant 1$ to
   $((x_1,x_2)^T,(x_2,-x_1-x_2)^T,(-x_1-x_2,x_1)^T)$ jest orbitą, która nie jest asymptotycznie stabilna (uwaga 3.4).

2. $(a,b) \in \mathbf{W}_1 = \{(a,b) : a < -1, b < -1, b < (a^2+1)/(a-1), a < (b^2+1)/(b-1)\}$;
   $((1,-1)^T,(-1,b-a)^T,(b-a,1)^T),((-1,1)^T,(1,a-b)^T,(a-b,-1)^T)$

   Orbity absolutnie stabilne (wniosek 3.1).

3. $(a,b) \in \mathbf{W}_2 = \overline{\mathbf{W}_1} \setminus \{(-1,-1)\}$;
   $(((b+a^2)/(1-ab),1)^T,(1,(a+b^2)/(1-ab))^T,((a+b^2)/(1-ab),(b+a^2)/(1-ab))^T)$,
   $((-(b+a^2)/(1-ab),-1)^T,(-1,-(a+b^2)/(1-ab))^T,(-(a+b^2)/(1-ab),-(b+a^2)/(1-ab))^T)$

   Orbity te nie są asymtotycznie stabilne.

3.6 Orbity o okresie 4

Na podstawie twierdzenia 3.1 można wyznaczyć wszystkie orbity o okresie 4. Ograniczymy się do kilku sekwencji, które prowadzą do wyznaczenia orbit o tym okresie. Dla $k=3$ równanie (3.5) ma postać:

$$\mathbf{x}^0 = \mathbf{A}_3\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_0\mathbf{x}^0 + (\mathbf{A}_3\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1 s_0 + \mathbf{A}_3\mathbf{A}_2 s_1 + \mathbf{A}_3 s_2 + \mathbf{I}s_3)\mathbf{b},$$
$$\mathbf{E} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_3\mathbf{A}_2\mathbf{A}_1\mathbf{A}_0.$$

I. $-1-111$

Równanie (3.5):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Orbita: (A,B,C,D).

Warunki (3.7):

$$\begin{cases} a+b < -1 \\ b-a < -1 \end{cases}$$

Na podstawie Wniosku 3.1 jest to orbita stabilna.

II. $0-101$

Sekwencja ta prowadzi do wyznaczenia orbity:

$((-a/(1+b),1)^T,(1,a/(1+b))^T,(a/(1+b),-1)^T,(-1,-a/(1+b))^T)$.

Warunki (3.7):

$$\begin{cases} a+b \leqslant -1 \\ b-a \leqslant -1 \end{cases}$$

III. 0000 Sekwencja ta prowadzi do wyznaczenia nieskończenie wielu orbit o okresie 4 dla $(a,b) = (0,-1)$: $((x_1,x_2)^T, (x_2,-x_1)^T, (-x_1,-x_2)^T, (-x_2,x_1)^T)$ dla dowolnych $(x_1,x_2)^T \in I^2$. Na podstawie uwagi 3.4 orbity te nie są asymptotycznie stabilne.

3.7 Orbity okresowe — podsumowanie

Powyżej wyznaczone zostały wszystkie orbity o okresach 1–4 dla dowolnych parametrów a, b. Przy poszukiwaniu orbit o okresie k pojawiają się w wyrażeniu $\det \mathbf{E}$ składniki typu a^k i b^k. Ponieważ w celu wyznaczenia wszystkich orbit konieczne jest rozwiązanie równania $\det \mathbf{E} = 0$, to wydaje się, iż nie jest możliwe wyznaczenie analityczne zbiorów par (a,b), dla których istnieją orbity o dużych okresach. Podział płaszczyzny (a,b) na obszary, w których istnieją punkty stałe oraz orbity o okresie 2,3 i 4 przedstawiono na rys. 3.1. Objaśnienia do rys. 3.1:

- $T = \{(a,b) : b > -1, b < 1-a, b < 1+a\}$;

  O — punkt stały asymptotycznie stabilny,
- $(a,b) \notin T$;

  O — punkt stały niestabilny,
- $Q_1 = \{(a,b) : b > 1-a, b < 1+a\}$;

  A, C — absolutnie stabilne punkty stałe,
- $Q_2 = \{(a,b) : b < 1-a, b > 1+a\}$;

  (B,D) — absolutnie stabilna orbita o okresie 2,
- $Q_4 = \{(a,b) : b > 1-a, b > 1+a\}$;

  A, C — absolutnie stabilne punkty stałe,

  (B,D) — absolutnie stabilna orbita o okresie 2,

  $((-a/(1-b),-1)^T, (1,-a/(1-b))^T)$, $((a/(1-b),1)^T, (1,a/(1-b))^T)$ — orbity niestabilne,
- $T_1 \cup R_1 \cup P_1 = \{(a,b) : b+a = 1, a > 0\}$;

  $(x,x)^T$ — niestabilne punkty stałe,
- $T_2 \cup R_2 \cup P_2 = \{(a,b) : b-a = 1, a < 0\}$;

  $((x,-x)^T, (-x,x)^T)$; $x \neq 0$ — niestabilne orbity o okresie 2,

- $P_3 = \{(a, b) : b - a = 1, a > 0\}$;

  A, C — absolutnie stabilne punkty stałe,

  $((x, -x)^T, (-x, x)^T)$; $x \neq 0$ — niestabilne orbity o okresie 2,

- $P_4 = \{(a, b) : b + a = 1, a < 0\}$;

  (B, D) — stabilna orbita o okresie 2,

  $(x, x)^T$ — niestabilne punkty stałe,

- $R_1 = \{(0, 1)\}$;

  $((x_1, x_2)^T, (x_2, x_1)^T)$; $x_1 \neq x_2$ — nie asymptotycznie stabilne orbity o okresie 2,

- $R_{1/3} = \{(-1, -1)\}$;

  $((x_1, x_2)^T, (x_2, -x_1 - x_2)^T, (-x_1 - x_2, x_1)^T)$; $x_1 \neq x_2$ — niestabilne orbity o okresie 3,

- $Q_{1/3} = \mathbf{W}_1 = \{(a, b) : a < -1, b < -1, b < (a^2+1)/(a-1), a < (b^2+1)/(b-1)\}$;

  cztery orbity o okresie 3, pierwsze dwie stabilne, pozostałe niestabilne.

  $(B, (-1, b - a)^T, (b - a, 1)^T)$, $(D, (1, a - b)^T, (a - b, -1)^T)$,

  $(((b+a^2)/(1-ab), 1)^T, (1, (a+b^2)/(1-ab)], ((a+b^2)/(1-ab), (b+a^2)/(1-ab))^T)$,

  $((-(b+a^2)/(1-ab), -1)^T, (-1, -(a+b^2)/(1-ab))^T, (-(a+b^2)/(1-ab), -(b+a^2)/(1-ab))^T)$,

- $P_{1/3} = \partial Q_{1/3} \setminus R_{1/3} = \partial \mathbf{W}_1 \setminus \{(-1, -1)\} = \{(a, b) : a < -1, b < -1, b = (a^2 + 1)/(a - 1)$ lub $a = (b^2 + 1)/(b - 1)\}$;

  dwie niestabilne orbity o okresie 3:

  $(B, (-1, b - a)^T, (b - a, 1)^T)$; $(D, (1, a - b)^T, (a - b, -1)^T)$,

- $R_{1/4} = \{(-1, -1)\}$;

  $((x_1, x_2)^T, (x_2, -x_1)^T, (-x_1, -x_2)^T, (-x_1, x_2)^T)$ — niestabilne orbity o okresie 4,

- $Q_{1/4} = \{(a, b) : b < -1 - a, b < -1 + a\}$;

  (A, B, C, D) - absolutnie stabilna orbita o okresie 4,

  $((1, a/(1 + b))^T, (a/(1 + b), -1)^T, (-1, -a/(1 + b))^T, (-a/(1 + b), 1)^T)$ — orbita niestabilna,

- $P_{1/4} = \partial Q_{1/4} \setminus R_{1/4} = \{(a, b) : b = -1 - |a|, b < -1\}$;

  (A, B, C, D) — niestabilna orbita o okresie 4.

3.8 Algorytm wyznaczania orbit okresowych

W celu znalezienia wszystkich orbit okresowych o okresie k należy wyznaczyć i rozwiązać 3^k (dla wszystkich możliwych ciągów symboli $s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$) układów równań rzędu drugiego postaci (3.5) oraz sprawdzić warunki (3.7) i (3.8). Liczba układów, które należy sprawdzać maleje znacznie dzięki wykorzystaniu uwag 3.2 i 3.3. Sporządzono program komputerowy wyznaczający orbity okresowe dla ustalonych wartości parametrów a, b. Sprawdzanie wszystkich układów symboli s_i dla większych k jest uciążliwe rachunkowo i pozwoliło wyznaczyć dla danych a i b wszystkie orbity o okresie k przy $k < 15$. Dla konkretnych wartości a, b możliwe jest wyeliminowanie wielu sekwencji co przyspiesza znacznie algorytm. Przykładowo zawsze można wykluczyć sekwencje zawierające podciąg 1110. Udało się w ten sposób wyznaczyć wszystkie orbity o okresach $k \leqslant 32$ dla wybranych wartości parametrów a, b. Wykonano wiele eksperymentów poszukiwania orbit okresowych. Dla wybranych a, b sprawdzano istnienie orbit o okresach nie większych niż 32. Nie znaleziono, dla $(a,b) \notin T_3 \cup Q_3$ orbit okresowych o okresach większych niż dwa. Przykładowe wyniki dla $(a,b) \in Q_3$:

a	b	orbity stabilne ilość i okres	orbity niestab. ilość i okres
0.5	-1.1	14,1	14,1
0.5	-1.154	23,2	23,2
0.5	-1.18	32,1	32,1
0.5	-1.25	9,2	9,2
0.5	-1.35	22,1	22,1
0.5	-1.4	13,2	13,2
0.5	-1.46	17,2	17,2
0.5	-1.6	4,1	4,1

Wyniki te pozwalają postawić następujące hipotezy.

1. Dla $(a,b)Q_3 \cup T_3$ występują tylko orbity okresowe o okresach 1 lub 2. Wszystkie trajektorie zmierzają do pewnej orbity okresowej o okresie 1 lub 2.

2. Dla ustalonych $(a,b) \in Q_3$ wszystkie orbity okresowe mają ten sam okres (oprócz niestabilnego punktu stałego O).

3. Jeśli okres ten jest parzysty to istnieje dokładnie jedna orbita stabilna i jedna niestabilna (np. $Q_{1/4}$) lub tylko jedna niestabilna (np. $P_{1/4}$). Jeśli jest on nieparzysty to istnieją dwie orbity stabilne i dwie niestabilne (np. $Q_{1/3}$) lub tylko dwie orbity niestabilne (np. $P_{1/3}$).

W dalszej części pracy spróbujemy zweryfikować te hipotezy. Hipoteza 1 zostanie sprawdzona w rozdziale 4. Udowodnimy, że wszystkie orbity okresowe dla $(a,b) \in T_1 \cup T_2 \cup Q_{11} \cup P_1 \cup Q_{12} \cup Q_{21} \cup P_2 \cup Q_{22} \cup Q_3 \cup P_3 \cup P_4$ mają okres 1 lub 2. Hipoteza ta jest nierozstrzygnięta dla (a,b) należących do Q_{13} i Q_{23}, ale wydaje się, że zachowanie układu jest w tym przypadku podobne jak dla Q_{11} i Q_{12}. Hipoteza

2 będzie udowodniona w rozdziale 5, przy okazji rozważań na temat nieazależności liczby obrotu odwzorowania $\mathbf{F}$ od warunków początkowych dla $(a, b) \in Q_3$ (twierdzenie 5.6). Nie udało się udowodnić hipotezy 3. Została ona potwierdzona wieloma doświadczeniami komputerowymi i analitycznymi dla wybranych wartości a i b.

Rozdział 4

ZBIORY GRANICZNE TRAJEKTORII

Zajmiemy się obecnie badaniem zbiorów granicznych trajektorii dla różnych punktów startowych i różnych wartości parametrów a, b. Będziemy używać następujących oznaczeń:

$\mathbf{x}[0] \in \Omega$ — punkt początkowy trajektorii,

$\mathbf{x}[k] = \mathbf{F}^k(\mathbf{x}[0])$, $\mathbf{x}' = \mathbf{G}(\mathbf{x})$,

$\overline{\mathbf{xy}}$- odcinek o końcach $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$.

Uwaga 4.1. Niech $\mathbf{x} \in \Omega$. Jeśli $\mathbf{G}^k(\mathbf{x}) \in \Omega$ dla każdego k naturalnego to $\mathbf{G}^k(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^k(\mathbf{x})$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Zatem w tym przypadku trajektorie układu nieliniowego (3.1) i skojarzonego z nim układu liniowego (2.1) pokrywają się.

Lemat 4.1. *Jeśli* $\mathbf{x}[0] \in \Omega$*,* $|\mathbf{G}^n(\mathbf{x}[0])| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *to istnieje* $k \in \mathbb{N}$ *takie, że* $|x_2[k]| = 1$.

Dowód. Oznaczmy $\mathbf{x} := \mathbf{x}[0]$. Niech k będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $\mathbf{G}^p(\mathbf{x}) \notin \Omega$. Takie k istnieje bo odpowiedź układu liniowego rośnie w sposób nieograniczony. Ponieważ $\mathbf{G}^0(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \in \Omega$ to $k > 0$. Oznaczmy $\mathbf{G}^k(\mathbf{x}) = (y_1, y_2)^T$. Gdyby $|y_1| > 1$ to $\mathbf{G}^{k-1}(\mathbf{x}) \notin \Omega$ ($y_1 = x_2[k-1]$) co jest sprzeczne z minimalnością k. Zatem $|y_1| \leqslant 1$ i wobec tego $|y_2| > 1$. Ponieważ $\mathbf{G}^p(\mathbf{x}) \in \Omega$ dla każdego $p < k$ to $\mathbf{G}^{p-1}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}^{p-1}(\mathbf{x})$. Zatem $\mathbf{F}^p(\mathbf{x}) = (y_1, f(y_2))^T$. Ponieważ $|y_2| > 1$ to $|x_2[k]| = |f(y_2)| = 1$. $\square$

Wniosek 4.1. *Jeśli* $\mathbf{x}[0] \in \Omega$*,* $|\mathbf{G}^n(\mathbf{x}[0])| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$ *to istnieje* $k \in \mathbb{N}$ *takie, że* $\mathbf{x}[k] \in \overline{AD} \cup \overline{BC}$.

Lemat 4.2. $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$*,* $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{y}) \Rightarrow \mathbf{F}(\overline{\mathbf{xy}}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

Dowód. Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2)^T$, Z warunku $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{y})$ wynika, że $f(bx_2 + ax_1) = f(by_2 + ay_1)$. Rozważmy trzy przypadki zależnie od wartości $bx_2 + ax_1$.

1. $bx_2 + ax_1 > 1$, wtedy $by_2 + ay_1 > 1$,

   $\mathbf{G}$ jest odwzorowaniem liniowym. Oznacza to, że obrazem odcinka $\overline{\mathbf{xy}}$ przez odwzorowanie $\mathbf{G}$ jest odcinek $\overline{\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{y})}$. Weźmy dowolne $\mathbf{z} \in \overline{\mathbf{xy}}$. Wtedy $\mathbf{G}(\mathbf{z}) \in \overline{\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{G}(\mathbf{y})}$. Zatem $z_2 = x_2$ i $bz_1 + az_2 > 1$ i w konsekwencji $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$.

2. $bx_2 + ax_1 < -1$, dowód jak w przypadku 1.

3. $|bx_2 + ax_1| \leqslant 1$.

Z warunków $x_2 = y_2$ i $bx_2 + ax_1 = by_2 + ay_1$ wynika, że $ax_1 = ay_1$. Jeśli $a \neq 0$ to $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ i $\mathbf{F}(\overline{\mathbf{xy}}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. Niech zatem $a = 0$. Jeśli $\mathbf{z} \in \overline{\mathbf{xy}}$ to $x_2 \leqslant z_2 \leqslant y_2 = x_2$. Stąd $x_2 = z_2$. Wobec tego $\mathbf{F}(\mathbf{z}) = (z_2, bz_2)^T = (x_2, bx_2)^T = \mathbf{F}(\mathbf{x})$) i ostatecznie $\mathbf{F}(\overline{\mathbf{xy}}) = \mathbf{F}(\mathbf{x})$. □

4.1 Zbiory graniczne dla $(a, b) \in T_1$

$$T_1 := \{(a, b) : a \in (0, 2), b = 1 - a\}.$$

Podstawiając $b = 1 - a$ do (2.2) można wyznaczyć: $z_1 = -b$, $z_2 = 1$.

Twierdzenie 4.1 (Charakteryzacja zbiorów granicznych dla T_1).
$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \Omega$, $A_x := b(x_2 - x_1)/(b + 1)$, $B_x := (x_2 + bx_1)/(b + 1)$.

1. *Jeśli* $b \in [0, 1)$, $a = 1 - b \in (0, 1]$ *to* $\mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (B_x, B_x)^T$.

2. *Jeśli* $b \in (-1, 0)$, $a = 1 - b \in (1, 2)$ *to*

   a) *jeśli* $|x_2 + bx_1| \leqslant 1 + b$ *to* $\mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} (B_x, B_x)^T$.

   b) *jeśli* $x_2 + bx_1 > 1 + b$ *to* $\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \geqslant n \;\; \mathbf{F}^n(\mathbf{x}) = A = (1, 1)^T$.

   c) *jeśli* $-1 - b < x_2 + bx_1$ *to* $\exists n \in \mathbb{N} : \forall k \geqslant n \;\; \mathbf{F}^n(\mathbf{x}) = C = (-1, -1)^T$.

Dowód. ad.1. Niech $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \Omega$. Wtedy $|g(\mathbf{x})| = |bx_1 + ax_2| \leqslant |b||x_1| + |a||x_2| \leqslant |b| + |a| = b + a = 1$. Ponieważ $|g(\mathbf{x})| \leqslant 1$ to $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$, i stąd $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}(\mathbf{x})$. Rozważany układ zachowuje się jak układ liniowy i zbiór graniczny trajektorii będzie taki jak dla układu liniowego (porównaj rozdział 2 p.5).

ad.2. Niech $\mathbf{x} = (x, 1)^T \in \overline{DA}$, $g(\mathbf{x}) = bx + a \geqslant |a| - |b| = a + b = 1$. $\mathbf{F}((x, 1)^T) = (1, f(g(\mathbf{x})))^T = A$. Zatem jeśli trajektoria trafi w odcinek $\overline{DA}$ to w następnej iteracji osiągnie punkt A i tam pozostanie. Podobnie wykazuje się, że jeśli trajektoria osiągnie odcinek $\overline{BC}$ to w następnej iteracji osiągnie punkt C i tam pozostanie. Na podstawie (2.3):

$$x_2[k] = A_x z_1^k + B_x z_2^k = A_x(-b)^k + B_x 1^k. \tag{4.1}$$

Przed zakończeniem dowodu twierdzenia udowodnimy następujący lemat:

Lemat 4.3. *B_x jest zdefiniowane jak wyżej. Wówczas* ($|B_x| \leqslant 1 \iff \forall k \in \mathbb{N} \;\; \mathbf{G}^k(\mathbf{x}) \in \Omega$).

Dowód lematu.. ($\Leftarrow$) Ponieważ $\mathbf{G}^k(\mathbf{x}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (B_x, B_x)^T$ to na podstawie domkniętości Ω i prawej strony równoważności jest $(B_x, B_x)^T \in I^2$. Stąd $|B_x| \leqslant 1$.

($\Rightarrow$) Ponieważ $-b \in (0,1)$ to $x_2[k]$ (4.1) jest monotoniczne względem k i w granicy przyjmuje wartość B_x. Ponieważ $x_2[0] \in [-1,1]$ i $x_2[\infty] = B_x \in [-1,1]$ to dla każdej liczby naturalnej k zachodzi $x_2[k] \in [-1,1]$. Ponieważ $x_1[k] = x_2[k+1]$ $(k \geqslant 0)$ to $x_1[k] \in [-1,1]$ również dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Stąd wynika prawa strona równoważności. $\square$

ad.a. Niech $|x_2 + bx_1| \leqslant 1 + b$. Jest to równoważne warunkowi $|B_x| \leqslant 1$. Na podstawie lematu 4.3 wnioskujemy, że cała trajektoria układu liniowego leży wewnątrz Ω. Zatem układ liniowy i nieliniowy zachowują się tak samo i wobec tego $\mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} (B_x, B_x)^T$.

ad.b. Przyjmijmy teraz założenia warunku b. Niech k będzie minimalną liczbą naturalną taką, że $g(\mathbf{G}^k(\mathbf{x})) > 1$. Takie k istnieje bo $\mathbf{G}^k(\mathbf{x})$ zmierza do $(B_x, B_x)^T$ przy $n \to \infty$ oraz $B_x > 1$. Stąd $\mathbf{x}[k+1] = (x_2[k], f(\mathbf{G}^k(\mathbf{x})))^T \in \overline{DA}$ i $\mathbf{x}[k+2] = A$. Podobnie wykazuje się warunek c, co kończy dowód twierdzenia 4.1.

$\square$

4.2 Zbiory graniczne dla $(a, b) \in T_2$

$$T_2 := \{(a,b) : a \in (-2,0), b = 1 + a\}$$

Twierdzenie 4.2 (Charakteryzacja zbiorów granicznych dla T_2). $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \Omega$, $A_x := (x_2 - bx_1)/(b+1)$, $B_x := b(x_2 + x_1)/(b+1)$.

1. *Jeśli* $b \in [0,1)$, $a = b - 1 \in [-1, 0)$ *to* $\omega(\mathbf{x}) = \{(A_x, -A_x)^T, (-A_x, A_x)^T\}$.
2. *Jeśli* $b \in (-1, 0)$, $a = b - 1 \in (-2, -1)$ *to*
   a) *jeśli* $|x_2 - bx_1| \leqslant b + 1$ *to* $\omega(\mathbf{x}) = \{(A_x, -A_x)^T, (-A_x, A_x)^T\}$.
   b) *Jeśli* $|x_2 - bx_1| > b + 1$ *to* $\omega(\mathbf{x}) = \{B, D\}$.

Dowód jest podobny do dowodu twierdzenia 4.1.

4.3 Zbiory graniczne dla $(a, b) \in Q_1 \cup P_1$

$$\begin{aligned} Q_1 &:= \{(a,b) : b < 1 + a, b > 1 - a\}, \\ P_1 &:= \{(a,b) : b = 1 - a, a > 2\} \end{aligned}$$

Podzielmy zbiór Q_1 na trzy rozłączne podzbiory: $Q_1 = Q_{11} \cup Q_{12} \cup Q_{13}$.
$Q_{11} = \{(a,b) : b \leqslant a - 1, b > 1 - a\}$,
$Q_{12} = \{(a,b) : |b - a| < 1, a \geqslant 1\}$
$Q_{13} = \{(a,b) : b > 1 - a, b < 1 + a, a < 1\}$

Lemat 4.4. *$b + a \geqslant 1$, $b - a \leqslant -1 \Rightarrow \mathbf{F}(\overline{AD}) = A$ i $\mathbf{F}(\overline{BC}) = C$.*

Dowód. Ponieważ $\mathbf{F}(A) = \mathbf{F}((1,1)^T) = (1, f(b+a))^T = (1,1)^T = A$ oraz $\mathbf{F}(D) = \mathbf{F}((-1,1)^T) = (1, f(-b+a))^T = (1,1)^T = A$ to na podstawie lematu 4.2 mamy $\mathbf{F}(\overline{AD}) = A$.

Podobnie ponieważ $\mathbf{F}(B) = \mathbf{F}((1,-1)^T) = (-1, f(b-a))^T = (-1,-1)^T = C$ oraz $\mathbf{F}(C) = \mathbf{F}((-1,-1)^T) = (1, f(-b-a))^T = (-1,-1)^T = C$ to $\mathbf{F}(\overline{BC}) = C$. □

Twierdzenie 4.3 (Charakteryzacja zbiorów granicznych dla Q_{11}).
$(a,b) \in Q_{11}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \Omega$,

1. *jeśli $z_2x_2 + bx_1 = 0$ to $\mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} O$.*

2. *jeśli $z_2x_2 + bx_1 \neq 0$ to trajektoria $\mathbf{x}$ po skończonym czasie osiągnie punkt stały A lub C.*

Dowód. ad.1. W tym przypadku na podstawie analizy układu liniowego i uwagi 4.1 trajektorie układu liniowego i nieliniowego pokrywają się.

ad.2. Trajektoria układu liniowego jest rozbieżna do nieskończoności. Na podstawie wniosku 4.1 istnieje liczba naturalna k taka, że $\mathbf{x}[k] \in \overline{AD} \cup \overline{BC}$. Dla $(a,b) \in Q_{11}$ spełnione są założenia lematu 4.4, zatem $\mathbf{x}[k+1] = \mathbf{F}(\mathbf{x}[k]) \in \mathbf{F}(\overline{AD} \cup \overline{BC}) \subset \{A, C\}$. $F(A) = A$, $F(C) = C$.

□

Twierdzenie 4.4 (Charakteryzacja zbiorów granicznych dla P_1).
$(a,b) \in P_1$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \Omega$

1. *Jeśli $\mathbf{x} = (x,x)^T \in \overline{AC}$ to trajektoria $\mathbf{x}$ jest punktem stałym $(x,x)^T$.*

2. *Jeśli $\mathbf{x} \notin \overline{AC}$ to trajektoria $\mathbf{x}$ osiąga punkt stały A lub C.*

Dowód. ad.1. Na podstawie analizy układu liniowego (rozdział 2, p.11) i uwagi 4.1 trajektoria punktu $\mathbf{x} = (x,x)^T$ jest punktem stałym.

ad.2. Trajektoria układu liniowego jest rozbieżna, spełnione są założenia lematu 4.4, zatem można powtórzyć dowód drugiej części twierdzenia 4.4.

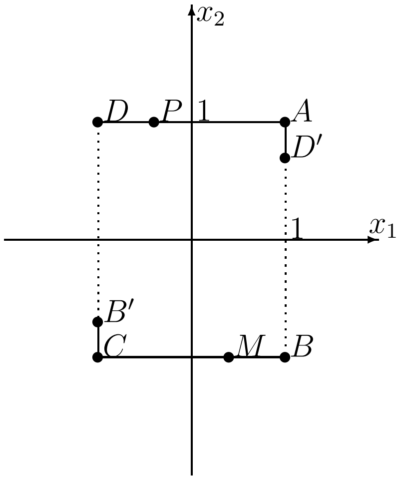
□

Twierdzenie 4.5 (Charakteryzacja zbiorów granicznych dla Q_{12}).
$(a,b) \in Q_{12} = \{(a,b) : |b-a| < 1, a \geqslant 1\}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \Omega$

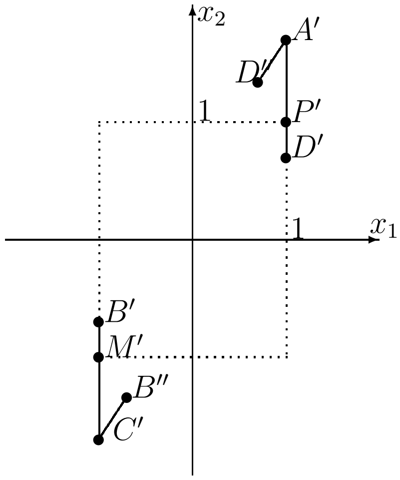
1. *$z_2x_2 + bx_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} O$.*

2. *jeśli $z_2x_2 + bx_1 \neq 0$ to trajektoria $\mathbf{x}$ po skończonym czasie osiągnie punkt stały A lub C. (Teza jest taka jak w twierdzeniu 4.3 dla $(a,b) \in Q_{11}$)*

Dowód. ad.1. Dowód jak w twierdzeniu 4.3.



Rysunek 4.1



Rysunek 4.2

ad.2. W tym przypadku dowód jest bardziej skomplikowany i zostanie przeprowadzony w oparciu o konstrukcję sprzężonego z badanym układem dynamicznym odwzorowania odcinka w odcinek.

Oznaczmy $B' = \mathbf{G}(B)$, $D' = \mathbf{G}(D)$, $\mathbf{K}_1 := \overline{BC} \cup \overline{CB'}$, $\mathbf{K}_2 := \overline{DA} \cup \overline{AD'}$, $\mathbf{K} := \mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2$. Niech $M := G^{-1}(C) = ((-1+a)/b, -1)^T$, $P := G^{-1}(A) = ((1-a)/b, 1)^T$(porównaj rys. 4.1 i 4.2).

Lemat 4.5. $(a, b) \in Q_{12} \Rightarrow b > 0$ *i* $b(a-1) \leqslant a^2 - 1$.

Dowód. Z definicji Q_{12} $b > a - 1$ i $a \geqslant 1$. Zatem $b > a - 1 \geqslant 1 - 1 = 0$. Ponieważ $b - a + 1 < 0$ i $a - 1 \geqslant 0$ to $(b - a + 1)(a - 1) \leqslant 0$ i stąd $b(a-1) \leqslant a^2 - 1$. $\square$

Lemat 4.6. $\mathbf{F}(\mathbf{K}_1) \subset \mathbf{K}_1$, $\mathbf{F}(\mathbf{K}_2) \subset \mathbf{K}_2$.

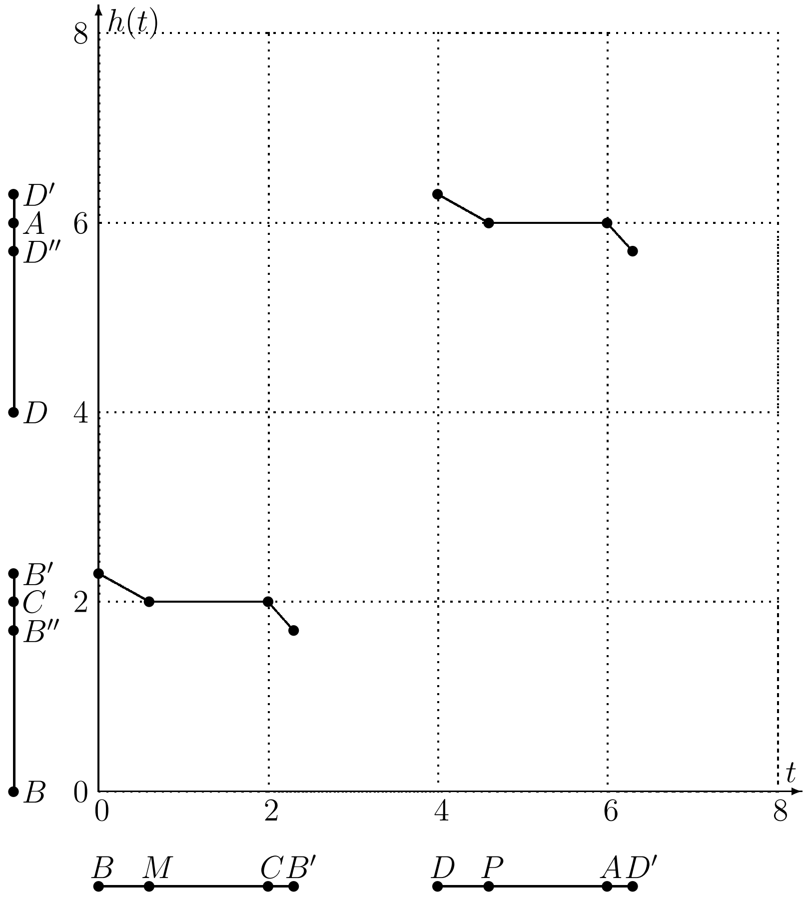
Dowód. Wykażemy pierwszy z warunków. Dowód drugiego jest analogiczny. Ponieważ $F(B) = (-1, b-a)^T = B'$ oraz $F(M) = C$ to $F(\overline{BM}) = \overline{CB'} \subset \mathbf{K}_1$. Podobnie $F(M) = C, F(C) = (-1, f(-b-a))^T = C \Rightarrow F(\overline{MC}) = \{C\} \subset \mathbf{K}_1$.

$F(B') = F((-1, b-a]^T) = (b-a, -b+ab-a^2)^T = (b-a, -1)^T$ (z lematu 4.5 $-b+ab-a^2 \leqslant -1$).

Zatem $F(B') = (b-a, -1)^T \in \overline{BC}, F(C) = C \Rightarrow F(\overline{B'C}) \subset \overline{BC} \subset \mathbf{K}_1$ $\square$

Niech $\mathbf{x}[0]$ będzie punktem początkowym spełniającym założenia drugiej części twierdzenia. Trajektoria układu liniowego jest nieograniczona i na podstawie wniosku 4.1 istnieje liczba naturalna k taka, że $\mathbf{x}[k] \in \overline{BC} \cup \overline{AD} \subset \mathbf{K}_1 \cup \mathbf{K}_2 = \mathbf{K}$.

Ponieważ $\mathbf{F}(\mathbf{K}) \subset \mathbf{K}$ to trajektoria punktu $\mathbf{x}[0]$ po skończonym czasie wejdzie do zbioru $\mathbf{K}$ i tam pozostanie. Skonstruujemy obecnie odwzorowanie odcinka w odcinek odpowiadające zachowaniu badanego układu dynamicznego na zbiorze $\mathbf{K}_1$.



Rysunek 4.3: Odwzorowanie sprzężone z $\mathbf{F}|\mathbf{K}$ dla $(a, b) \in Q_{12}$

Homeomorfizm φ zbioru $\mathbf{K}_1$ na odcinek

$$\varphi(X) = \begin{cases} |BX| & \text{dla} \quad X \in BC \\ |BC| + |CX| & \text{dla} \quad X \in CB' \end{cases}$$

Zbiór $\mathbf{K}_1$ jest homeomorficzny z odcinkiem o długości $[0, 2 + |CB'|]$.

Odwzorowanie odcinka w siebie

$$h(t) = \begin{cases} -bt + 3 + b - a & t \in [0, 1 + (1-a)/b) \\ 2t & t \in [1 + (1-a)/b, 2) \\ -t + 4 & t \in [2, 3 + b - a] \end{cases}$$

Odwzorowanie h przedstawione zostało na rys. 4.3. Jest ono odcinkami liniowe. Odwzorowanie odcinka φ i odwzorowanie $\mathbf{F}|_{\mathbf{K}_1}$ są topologicznie sprzężone. Mówi o tym następujący lemat:

Lemat 4.7. *$h\varphi(X) = \varphi\mathbf{F}(X)$ dla każdego $X \in \mathbf{K}_1$.*

Dowód. Rozważymy trzy przypadki

1. $X = (1, x)^T \in \overline{BM}$, $x \in [(a-1)/b, 1]$,

   $h\varphi(X) = h(|\overline{BX}|) = h(1-x) = -b(1-x) + 3 + b - a = bx - a + 3$,

   $\varphi\mathbf{F}(X) = \varphi((-1, bx - a)^T) = 2 + bx - a + 1 = bx - a + 3$,

2. $X = (1, x)^T \in \overline{MC}$, $x \in [-1, (a-1)/b]$,

   $h\varphi(X) = h(1-x) = 2, \varphi\mathbf{F}(X) = \varphi(C) = 2$,

3. $X = (-1, x)^T \in \overline{CB'}$,

   $h\varphi(X) = h(2 + x + 1) = h(3 + x) = -(3 + x) + 4 = -x + 1$, $\varphi\mathbf{F}(X) = \varphi((x, f(-b + ax))^T) = \varphi((x, -1)^T) = -x + 1$.

□

$t = 2$ jest punktem stałym odwzorowania. Odpowiada to punktowi stałemu C odwzorowania $\mathbf{F}$. Wykażemy, że każda trajektoria dla odwzorowania h osiąga punkt stały $t = 2$.

Lemat 4.8. *$t_0 \in [0, 2 + |CB'|] \Rightarrow$ istnieje liczba naturalna n taka, że $h^n(t_0) = 2$.*

Dowód. Rozważmy trzy przypadki:

1. $t_0 \in [1 + (1-a)/b, 2]$, wtedy z definicji h wynika, że $h(t_0) = 2$.

2. $t_0 \in [0, 1 + (1-a)/b)$. $h(t_0) = -bt_0 + 3 + b - a$, $h^2(t_0) = -h(t_0) + 4 = bt_0 + 1 - b + a$. Ponieważ $(a, b) \in Q_1$ to $1 - b + a > 0$, $b > 0$ z lematu 4.5. Zatem ciąg określony wzorem $x_{n+1} = bx_n + 1 - b + a$ jest rozbieżny do nieskończoności. Niech n będzie najmniejszą liczbą naturalną taką, że $h^{2n}(t_0) \geqslant 1 + (1-a)/b$. Wówczas $t_1 := h^{2n-2}(t_0) < 1 + (1-a)/b$, $h^{2n}(t_0) = h^{2n}(t_1) \leqslant h^{2n}(1 + (1-a)/b) = 2$. Zatem $h^{2n}(t_0) \in [1 + (1-a)/b, 2]$ i $h^{2n+1}(t_0) = 2$.

3. $t_0 \in (2, 3+b-a)$ wtedy $h(t_0) = -t_0 + 4 < 2$ i $h(t_0)$ spełnia przypadek 1 lub 2.

□

Zachowanie odwzorowania h na odcinku odpowiada zachowaniu $\mathbf{F}$ na zbiorze $\mathbf{K}_1$. Na podstawie lematu 4.8 można wywnioskować, że każda trajektoria startująca ze zbioru $\mathbf{K}_1$ po skończonym czasie osiągnie punkt stały C. Analogicznie konstruuje się odwzorowania ϕ i h dla zbioru $\mathbf{K}_2$ oraz pokazuje się, że każda trajektoria, która zahaczy o zbiór $\mathbf{K}_2$ pozostaje w nim i osiąga punkt stały A. Wykazane zostało w ten sposób twierdzenie 4.5. □

W rozdziale 3 wykazane zostało, że jedynymi punktami stałymi dla układów o parametrach (a, b) ze zbioru Q_{13} są A, C i O oraz że nie istnieją orbity o okresach 2,3 i 4. Przeprowadzono doświadczenia dotyczące zachowania trajektorii w tym przypadku. Potwierdzają one przypuszczenie, że typy trajektorii są takie same jak dla obszarów Q_{11} i Q_{12} jednakże nie udało się tego udowodnić.

4.4 Zbiory graniczne dla $(a, b) \in Q_2 \cup P_2$

$$\begin{aligned} Q_2 &:= \{(a,b) : b < 1-a, b > 1+a\}, \\ P_2 &:= \{(a,b) : b = 1+a, a < -2\} \end{aligned}$$

Podzielmy zbiór Q_2 na trzy rozłączne podzbiory: $Q_2 = Q_{21} \cup Q_{22} \cup Q_{23}$.
$Q_{21} = \{(a,b) : b \leqslant -a-1, b > 1+a\}$,
$Q_{22} = \{(a,b) : |b+a| < 1, a \leqslant -1\}$,
$Q_{23} = \{(a,b) : b > 1+a, b < 1-a, a > -1\}$.

Lemat 4.9. *$b + a \leqslant 1$, $b - a \geqslant 1 \Rightarrow \mathbf{F}(\overline{AD}) = B$ i $\mathbf{F}(\overline{BC}) = D$*

Twierdzenie 4.6 (Charakteryzacja zbiorów granicznych dla Q_{21}).
$(a, b) \in Q_{21}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \Omega$

1. *Jeśli $z_1 x_2 + b x_1 = 0$ to $\mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \xrightarrow{n\to\infty} O$.*

2. *Jeśli $z_1 x_2 + b x_1 \neq 0$ to trajektoria po skończonym czasie osiąga orbitę (B, D).*

Twierdzenie 4.7 (Charakteryzacja zbiorów granicznych dla P_2).
$(a, b) \in P_2$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in \Omega$,

1. *$\mathbf{x} = O$ jest punktem stałym,*

2. *Jeśli $\mathbf{x} = (x, -x)^T \in \overline{BD} \setminus \{O\}$ to trajektoria jest orbitą okresową $((x, -x)^T, (-x, x)^T)$,*

3. *Jeśli $\mathbf{x} \notin \overline{BD}$ to trajektoria osiąga orbitę (B, D).*

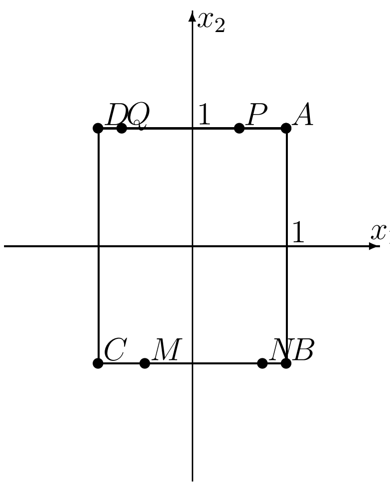
Twierdzenie 4.8 (Charakteryzacja zbiorów granicznych dla Q_{22}).
$(a, b) \in Q_{22}$, teza jest taka jak w twierdzeniu 4.6.

Wydaje się, że dla układów o parametrach $(a, b) \in Q_{23}$ typy trajektorii są takie same jak dla obszarów Q_{21} i Q_{22}. Dowody lematów i twierdzeń z tego rozdziału przebiegają podobnie do dowodów w rozdziale 4.3. W przypadku twierdzenia 4.8 konstruuje się homeomorfizm zbioru $\mathbf{K}$ z sumą dwóch odcinków rozłącznych. Nie jest tym razem możliwy rozkład $\mathbf{K}$ na dwa podzbiory niezmiennicze i odwzorowanie sprzężone z $\mathbf{F}|\mathbf{K}$ jest złożone z sześciu kawałków liniowych.

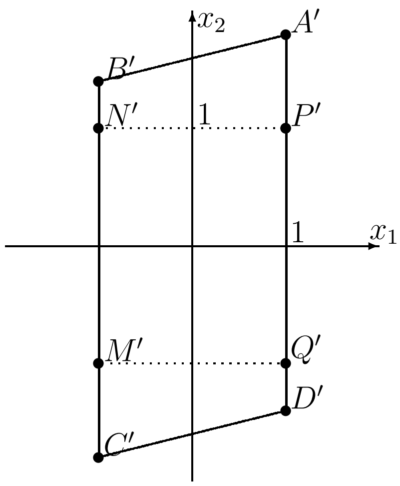
4.5 Zbiory graniczne dla $(a, b) \in Q_4 \cup P_3 \cup P_4$

$$\begin{aligned} Q_4 &:= \{(a,b) : b > 1 - a, b > 1 + a\}, \\ P_3 &:= \{(a,b) : b = 1 + a, a > 0\}, \\ P_4 &:= \{(a,b) : b = 1 - a, a < 0\}. \end{aligned}$$

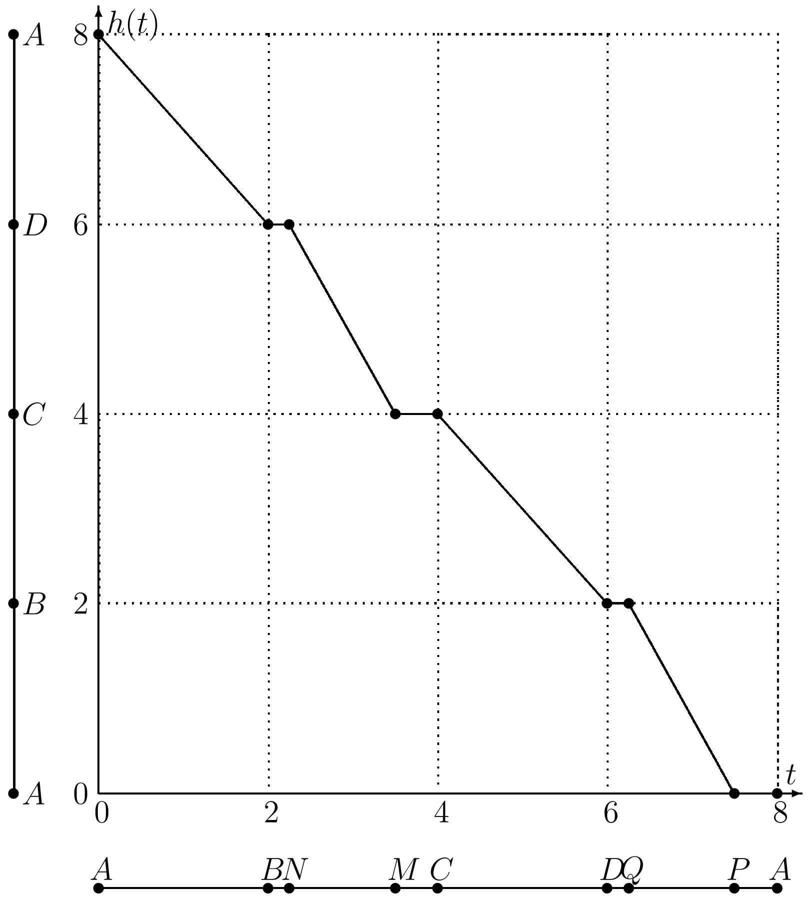
Dla wyznaczenia trajektorii posłużymy się metodą wykorzystaną przy analizie zachowania układu dla Q_{12} w rozdziale 4.3. Wykażemy, że zbiór $\mathbf{K} := \partial\Omega$ jest zbiorem niezmienniczym, pochłaniającym zbiór $\Omega \setminus O$, skonstruujemy odwzorowanie okręgu sprzężone z odwzorowaniem $\mathbf{F}$ na zbiorze $\mathbf{K}$ i na podstawie jego analizy wyznaczymy wszystkie zbiory graniczne trajektorii.



Rysunek 4.4



Rysunek 4.5



Rysunek 4.6: Odwzorowanie sprzężone z $\mathbf{F}|\mathbf{K}$ dla $(a,b) \in Q_4$

Homeomorfizm φ zbioru K na okrąg

Zbiór $\mathbf{K}$ jest homeomorficzny z odcinkiem o utożsamionych końcach. $\varphi : \partial\Omega \ni X \mapsto \varphi(X) \in \mathbb{S} := \mathbb{R}/8\mathbb{Z} = [0, 8)$.

$$\varphi(X) = \begin{cases} |AX| & dla \quad X \in \overline{AB}, \\ |AB| + |BX| & dla \quad X \in \overline{BC}, \\ |AB| + |BC| + |CX| & dla \quad X \in \overline{CD}, \\ |AB| + |BC| + |CD| + |DX| & dla \quad X \in \overline{DA} \setminus \{A\}. \end{cases}$$

$|AB| + |BC| + |CD| + |DA| = 8$, ($|XY|$ oznacza długość odcinka $\overline{XY}$).

Odwzorowanie okręgu w siebie

$h : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$ odcinkami liniowe.

$$h(t) = \begin{cases} 8 - t & t \in [0, 2), \\ 6 & t \in [2, 3 - (a+1)/b), \\ -bt + 5 + 3b - a & t \in [3 - (a+1)/b, 3 - (a-1)/b), \\ 4 & t \in [3 - (a-1)/b, 4), \\ 8 - t & t \in [4, 6), \\ 2 & t \in [6, 7 + (-1-a)/b), \\ -bt + 1 + 7b - a & t \in [7 + (-1-a)/b, 7 + (1-a)/b), \\ 0 & t \in [7 + (1-a)/b, 8). \end{cases}$$

Wykres h przedstawiono na rys. 4.6.

Lemat 4.10. *$(a, b) \in Q_4$, $\mathbf{K} := \partial\Omega$ spełnia warunki*

1. $\mathbf{F}(\mathbf{K}) = \mathbf{K}$,

2. *Zbiór $\mathbf{K}$ pochłania zbiór $\Omega \setminus O$ (dla każdego $\mathbf{x}[0] \in \Omega \setminus \{O\}$ istnieje $k \in \mathbb{N}$: $\mathbf{x}[k] \in \mathbf{K}$).*

Dowód. ad.1. Wprost z warunków $b > 1 - a$, $b > 1 + a$ podobnie jak w dowodzie lematu 4.6 (porównaj rys. 4.4 i 4.5).

ad.2. Jeśli $\mathbf{x}[0] \neq O$ to trajektoria układu liniowego jest nieograniczona. Na podstawie wniosku 4.1 istnieje liczba naturalna k taka, że $x[k] \in \overline{AD} \cup \overline{BC} \subset \mathbf{K}$.

□

Odwzorowanie h jest sprzężone z odwzorowaniem $\mathbf{F}|\mathbf{K}$.

Lemat 4.11. *$h\varphi(X) = \varphi\mathbf{F}(X) \ \ \forall X \in \mathbf{K}$.*

Dowód. przebiega podobnie jak lematu 4.7. □

Twierdzenie 4.9 (Charakteryzacja zbiorów granicznych dla Q_4).
$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in I^2, (a, b) \in Q_4 \Rightarrow$

1. *$\mathbf{x} = O$ jest punktem stałym,*

2. *Jeśli $\mathbf{x} \neq O$ to trajektoria osiąga punkt stały A lub C lub jedną z trzech orbit o okresie 2 : $O_1 = (B, D)$, $O_2 = ((1, -a/(1-b))^T, (-a/(1-b), 1)^T)$, $O_3 = ((-1, a/(1-b))^T, (a/(1-b), -1)^T)$.*

Dowód. W poprzedniej części pracy (rozdziały 3.3 i 3.4) wykazane zostało, iż dla parametrów $(a, b) \in Q_4$ jedynymi punktami stałymi są A i C oraz że istnieją trzy orbity o okresie 2: O_1, O_2, O_3. Odpowiada to punktom stałym 0 i 4 orbicie okresowej (2,6) oraz dwóm innym orbitom okresowym dla odwzorowania h. W każdym z przedziałów $(0, 2)$, $(2, 4)$, $(4, 6)$, $(6, 8)$ jest dokładnie jeden punkt okresowy odwzorowania h o okresie 2. Wykażemy, że nie ma innych punktów okresowych i wszystkie trajektorie po skończonym czasie osiągają jedną z orbit okresowych wypisanych powyżej. Niech $t_0 \in (0, 2)$ będzie takim punktem, że jego trajektoria nie osiąga żadnej z orbit okresowych wypisanych powyżej. Łatwo zauważyć, że $h([0, 2]) = [6, 8]$ i $h([6, 8]) = [0, 2]$. Zatem $h^2([0, 2]) \in [0, 2]$ i dla dowolnego k naturalnego $h^{2k}(t_0) \in [0, 2]$. Ponieważ trajektoria t_0 nie osiąga żadnej z wypisanych orbit okresowych to $\forall n \in \mathbb{N} \;\; h^n(t_0) \notin \{0, 2, 4, 6\}$. Wobec tego $h^n(t_0)$ nie wpada w obszar gdzie funkcja h ma nachylenie zero dla dowolnego n. Można zatem wypisać wzór $h^2(t_0) = h(8 - t_0) = bt_0 + 1 - b - a$. Niech s_0 będzie punktem okresowym o okresie 2 należącym do przedziału $(0, 2)$. Taki punkt istnieje i jest dokładnie jeden (porównaj rozdział 3.4).

$h^2(t_0) = h^2(s_0) + (s_0 - t_0)b = s_0 + (s_0 - t_0)b$. Podobnie $h^{2n}(t_0) = s_0 + (s_0 - t_0)b^n$. Ponieważ $b > 1$ i $s_0 \neq t_0$ to otrzymujemy sprzeczność z warunkiem $h^{2n}(t_0) \in [0, 2] \;\; \forall n \in \mathbb{N}$. Zatem t_0 nie spełnia zadanego warunku i jego trajektoria po skończonym czasie osiąga jedną z wypisanych orbit okresowych. Jeśli $t_0 \in [6, 8]$ to $h(t_0) \in [0, 2]$ i można powtórzyć powyższe rozumowanie. Dla pozostałych t_0 dowód jest podobny. Dla dowolnego $\mathbf{x} \in \Omega \setminus O$ trajektoria osiąga zbiór $\mathbf{K}$ (lemat 4.9) i jak wykazaliśmy wyżej osiąga jedną z wypisanych wyżej orbit okresowych. □

Twierdzenie 4.10 (Charakteryzacja zbiorów granicznych dla P_3).
$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in I^2, (a, b) \in P_3$

1. *$\mathbf{x} = O$ jest punktem stałym,*

2. *$\mathbf{x} = (x, -x)^T \in \overline{BD}$ jest punktem okresowym o okresie 2,*

3. *Jeśli $\mathbf{x} \in I^2 \setminus \overline{BD}$ to po skończonym czasie trajektoria osiągnie punkt stały A lub C.*

Dowód. Dla przypadków 1 i 2 trajektoria układu liniowego nie opuszcza kwadratu I^2. Zatem układ nieliniowy zachowuje się tak jak liniowy. W przypadku 3 trajektoria układu liniowego jest nieograniczona zatem po skończonym czasie trajektoria układu nieliniowego osiąga zbiór $\mathbf{K}$. Orbity O_2 i O_3 pokrywają się z punktami stałymi A i C. Podobnie jak w twierdzeniu 4.9 można wykazać, że trajektoria osiąga jedną z orbit okresowych A, C, (B, D). □

Twierdzenie 4.11 (Charakteryzacja zbiorów granicznych dla P_4).
$\mathbf{x} = (x_1, x_2)^T \in I^2, (a, b) \in P_4$,

1. *$\mathbf{x} = O$ jest punktem stałym,*
2. *$\mathbf{x} = (x, x)^T \in \overline{AC}$ jest punktem stałym,*
3. *Jeśli $\mathbf{x} \in I^2 \setminus \overline{AC}$ to po skończonym czasie trajektoria osiągnie orbitę okresową (B, D).*

Dowód. Podobnie jak w twierdzeniu 4.10. $\square$

Rozdział 5

REDUKCJA UKŁADU DO ODWZOROWANIA OKRĘGU

W rozdziale 5 zakładamy, że $(a,b) \in Q_3$. Dla parametrów $(a,b) \in Q_3$ skonstruujemy zbiór niezmienniczy homoemorficzny z okręgiem pochłaniający wszystkie (poza zerową) trajektorie układu.

Definicja 5.1. $E \subset \mathbb{R}^2$ jest *wypukły* jeśli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $t \in [0,1] \ \Rightarrow\ \mathbf{x}t + (1-t)\mathbf{y} \in E$.

Definicja 5.2. $E \subset \mathbb{R}^2$ jest *absolutnie wypukły* jeśli $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$, $|\alpha| + |\beta| \leqslant 1 \ \Rightarrow\ \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y} \in E$ Zbiór jest absolutnie wypukły jeśli jest wypukły i symetryczny względem punktu O.

Lemat 5.1. *$(a,b) \in Q_3$, $\mathbf{x} \neq O \ \Rightarrow\$ istnieje $k \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathbf{F}^k(\mathbf{x}) \in \overline{BC} \cup \overline{AD}$*

Dowód. Na podstawie analizy układu liniowego wiemy, że dla każdego $\mathbf{x} \neq O$ $|\mathbf{G}^n(\mathbf{x})| \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$. Stosując wniosek 4.1 otrzymujemy tezę. □

Lemat 5.2. *$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\mathbf{F}(-\mathbf{x})$ dla każdego $\mathbf{x} \in \Omega$.*

Dowód. Wynika to z symetrii odwzorowania f. □

5.1 Zbiór niezmienniczy homeomorficzny z okręgiem

Oznaczmy $\Omega_0 := \Omega$, $\Omega_n := \mathbf{F}^n(\Omega)$ dla $n > 0$.

Lemat 5.3. *$\Omega_{n+1} \subset \Omega_n$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$.*

Dowód. Z definicji $\mathbf{F}$ wynika, że jeśli $\mathbf{x} \in \Omega$ to $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \Omega$. Zatem $\Omega = \Omega_0 \supset \mathbf{F}^1(\Omega)$. Ponieważ $\mathbf{U} \subset \mathbf{V} \ \Rightarrow\ \mathbf{F}(\mathbf{U}) \subset \mathbf{F}(\mathbf{V})$ dla dowolnych $\mathbf{U}, \mathbf{V} \subset \mathbb{R}^2$ to $\mathbf{F}^k(\Omega) \supset \mathbf{F}^{k+1}(\Omega) \ \Rightarrow\ \mathbf{F}^{k+1}(\Omega) \supset \mathbf{F}^{k+2}(\Omega)$ dla dowolnego $k \geqslant 0$. □

Ponieważ Ω_n jest zstępującym ciągiem zbiorów to istnieje

$$\Omega_\infty := \lim_{n\to\infty} \Omega_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega_n \tag{5.1}$$

Z lematu 5.2 i definicji Ω_n wynika, że zbiór Ω_∞ jest symetryczny względem punktu O. Oznaczmy $\mathrm{int}\overline{XY} := \overline{XY} \setminus \{X, Y\}$ (jest to odcinek $\overline{XY}$ bez końców).

Lemat 5.4. $(a, b) \in Q_3 \ \Rightarrow$

1. $\Omega_\infty \cap \overline{DA} \neq \emptyset$, $\Omega_\infty \cap \overline{BC} \neq \emptyset$,

2. $\Omega_\infty \cap \mathrm{int}\overline{AB} \neq \emptyset$, $\Omega_\infty \cap \mathrm{int}\overline{CD} \neq \emptyset$.

Dowód. ad.1. $\forall n \in \mathbb{N} \quad O \in \Omega_n$ zatem $O \in \Omega_\infty$. $\{O\} \neq \Omega_\infty$ (gdyby $\{O\} = \Omega_\infty$ to $\forall \mathbf{x} \in \Omega \quad \mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} O$ co jest sprzeczne z lematem 5.1). Zatem istnieje $\mathbf{x} \neq O$ takie, że $\mathbf{x} \in \Omega_\infty$. Na podstawie lematu 5.1 istnieje liczba naturalna n taka, że $\mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \in \overline{AD} \cup \overline{BC}$. Ponieważ $\mathbf{F}(\Omega_\infty) = \Omega_\infty$ to $\mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \in \Omega_\infty$ czyli $\Omega_\infty \cap (\overline{AD} \cup \overline{BC}) \neq \emptyset$. Na podstawie symetrii zbioru Ω_∞ mamy $\Omega_\infty \cap \overline{DA} \neq \emptyset$ i $\Omega_\infty \cap \overline{BC} \neq \emptyset$.

ad.2. Podzielmy zbiór Q_3 na trzy rozłączne podzbiory: $Q_3 = \mathbf{D}_0 \cup \mathbf{D}_1 \cup \mathbf{D}_2$. $\mathbf{D}_0 := \{(a, b) : b < -1, b \leqslant a - 1, b \leqslant -a - 1\}$, $\mathbf{D}_1 := \{(a, b) : b < -1, |b + a| < 1\}$, $\mathbf{D}_2 := \{(a, b) : b < -1, |b - a| < 1\}$.

a) $(a, b) \in \mathbf{D}_0$, można łatwo wykazać, że $\mathbf{F}(\Omega) = \Omega$ i w konsekwencji $\Omega_n = \Omega$ dla każdego n.

b) $(a, b) \in \mathbf{D}_1$, na podstawie 1 istnieje $\mathbf{x} = (x, 1)^T \in \Omega_\infty \cap \overline{AB}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (1, f(bx + a))^T$. $bx + a \geqslant b + a > -1$ (dla $x \in [-1, 1]$, $(a, b) \in \mathbf{D}_1$). Jeśli $bx + a < 1$ to $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \in \mathrm{int}\overline{AB}$. Jeśli nie to $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (1, 1)^T = A$. Wtedy $\mathbf{F}^2(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(A) = (1, b + a)^T \in \mathrm{int}\overline{AB}$. W obu przypadkach na podstawie niezmienniczości zbioru Ω_∞ mamy $\Omega_\infty \cap \mathrm{int}\overline{AB} \neq \emptyset$. Na podstawie symetrii Ω_∞ mamy również $\Omega_\infty \cap \mathrm{int}\overline{CD} \neq \emptyset$.

c) $(a, b) \in \mathbf{D}_2$. Podobnie jak dla $(a, b) \in \mathbf{D}_1$ wykazuje się że $\Omega_\infty \cap \mathrm{int}\overline{CD} \neq \emptyset$. Ponieważ zbiór Ω_∞ jest symetryczny to $\Omega_\infty \cap \mathrm{int}\overline{AB} \neq \emptyset$.

□

Lemat 5.5. $(a, b) \in Q_3$, $n \geqslant 0 \Rightarrow \Omega_n$ *jest wielokątem absolutnie wypukłym.*

Dowód. Dla $k = 0$ mamy $\mathbf{F}^0(\Omega) = \Omega$ i lemat jest prawdziwy. Przypuśćmy, że $\mathbf{F}^k(\Omega)$ jest wielokątem absolutnie wypukłym. Wykażemy, że $\mathbf{F}^{k+1}(\Omega)$ jest wielokątem absolutnie wypukłym. Symetria względem punktu O wynika z lematu 5.2 i symetrii $\mathbf{F}^k(\Omega)$ względem punktu O. Obrazem wielokąta wypukłego symetrycznego względem O zawartego w Ω przez odwzorowanie $\mathbf{G}$ jest wielokąt wypukły symetryczny względem O i zawarty w pasie domkniętym $|x| \leqslant 1$ (symetria i wypukłość wynikają z własności odwzorowań liniowych, dla $b \neq 0$ odwzorowanie $\mathbf{G}$ jest odwzorowaniem liniowym o nieznikającym Jakobianie, co wyklucza przypadek, że obrazem wielokąta przez odwzorowanie $\mathbf{G}$ jest odcinek). Zatem $\mathbf{G}(\mathbf{F}^k(\Omega))$ jest wielokątem wypukłym symetrycznym względem punktu O. Na podstawie lematu 5.4 $\mathbf{G}(\mathbf{F}^k(\Omega))$ posiada niepuste przecięcie z wnętrzami odcinków $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Wobec tego $\Omega_{k+1} = \mathbf{F}(\mathbf{F}^k(\Omega)) = \mathbf{G}(\mathbf{F}^k(\Omega)) \cap \Omega$.

Ponieważ przecięcie dwu wielokątów absolutnie wypukłych jest niepuste i jest wielokątem absolutnie wypukłym to $\mathbf{F}(\mathbf{F}^k(\Omega))$ jest wielokątem absolutnie wypukłym. $\square$

Lemat 5.6. $(a, b) \in Q_3 \Rightarrow \Omega_\infty$ *jest zbiorem domkniętym, absolutnie wypukłym.*

Dowód. Ω_∞ jest zbiorem domkniętym jako przecięcie zbiorów domkniętych. Jako przecięcie zbiorów absolutnie wypukłych jest zbiorem absolutnie wypukłym. $\square$

Niech $\mathbf{W}_\infty$ będzie brzegiem zbioru Ω_∞:

$$\mathbf{W}_\infty := \partial\Omega_\infty. \tag{5.2}$$

Wykażemy obecnie kilka własności zbioru $\mathbf{W}_\infty$.

Lemat 5.7. $(a, b) \in Q_3 \Rightarrow$

1. $\mathbf{F}(\mathbf{W}_\infty) = \mathbf{W}_\infty$,
2. *a)* $\mathbf{W}_\infty \cap \overline{DA} \neq \emptyset$, $\mathbf{W}_\infty \cap \overline{BC} \neq \emptyset$,
   b) $\mathbf{W}_\infty \cap \mathrm{int}\overline{AB} \neq \emptyset$, $\mathbf{W}_\infty \cap \mathrm{int}\overline{CD} \neq \emptyset$,
3. $\mathbf{W}_\infty$ *jest homeomorficzne z okręgiem. Przykładem homoeomorfizmu może być*

$$\psi\colon \mathbf{W} \ni \mathbf{x} \mapsto \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} \in S^1, \tag{5.3}$$

gdzie $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

Dowód. ad.1. $\mathbf{F}(\Omega_\infty) = \Omega_\infty$. Zbiór Ω_∞ powstaje ze zbioru $\mathbf{G}(\Omega_\infty)$ przez zrzutowanie prostopadłe punktów zbioru $\mathbf{G}(\Omega_\infty)$ leżących poza zbiorem Ω na proste $x_2 = 1$ i $x_2 = -1$. Stąd można wywnioskować, że obrazem brzegu Ω_∞ jest brzeg Ω_∞.

ad.2. Wynika z lematu 5.4.

ad.3. Ω_∞ jest domknięte, absolutnie wypukłe, posiada niepuste wnętrze (konsekwencja lematu 5.4) zatem jego brzeg jest homeomorficzny z okręgiem.

$\square$

Niech

$$\phi := \mathbf{F}|\mathbf{W}_\infty : \mathbf{W}_\infty \mapsto \mathbf{W}_\infty. \tag{5.4}$$

Lemat 5.8. $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}_\infty$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{w}$, $\phi(\mathbf{w}) = \phi(\mathbf{z}) \Rightarrow$

1. *$\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \overline{AD}$ lub $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \overline{BC}$,*

2. *$\overline{\mathbf{zw}} \subset \mathbf{W}_\infty$,*

3. *$\phi(\overline{\mathbf{zw}})$ jest jednym z wierzchołków kwadratu Ω.*

Dowód. Niech $\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$. Ponieważ $\phi(\mathbf{z}) = \phi(\mathbf{w})$ to $w_2 = z_2$ i $f(bw_1 + aw_2) = f(bz_1 + az_1)$. Zatem $w_2 = z_2$ i $|f(bw_1 + aw_2)| = 1$ (gdyby $|f(bw_1 + aw_2)| \leqslant 1$ to $bw_1 + aw_2 = f(bw_1 + aw_2) = f(bz_1 + az_2) = bz_1 + az_2 = bz_1 + aw_2 \Rightarrow bw_1 = bz_1 \Rightarrow w_1 = z_1$ (bo $b < -1$) $\Rightarrow \mathbf{w} = \mathbf{z}$).

Przypuśćmy, że $|w_2| \neq 1$. Niech $l_1 := \{\mathbf{x} \in \mathbf{W}_\infty : x_1 = w_2\}$, $l_2 := \{\mathbf{x} \in \mathbf{W}_\infty : x_2 = w_2\}$. Zbiory l_1 i l_2 są przecięciami zbioru $\mathbf{W}_\infty$ z prostymi pionową i poziomą. Zbiory l_1 i l_2 są dwupunktowe na podstawie własności zbioru Ω_∞ (lemat 5.4) i warunku $|w_2| \neq 1$.

$\mathbf{x} \in \phi^{-1}(l_2) \Rightarrow \phi(\mathbf{x}) \in l_2 \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{W}_\infty$ i $(x_2, f(bx_1 + ax_2))^T \in l_2 \Rightarrow \mathbf{x} \in \mathbf{W}_\infty$ i $x_2 = w_2 \Rightarrow \mathbf{x} \in l_1$.

Zatem $\phi^{-1}(l_2) \subset l_1$, $l_2 = \phi\phi^{-1}(l_2) \subset \phi(l_1) = \phi(\{\mathbf{w}, \mathbf{z}\}) = \{\phi(\mathbf{w}), \phi(\mathbf{z})\} = \{\phi(\mathbf{w})\}$. Doszliśmy do sprzeczności bo zbiór dwupunktowy l_2 nie może być zawarty w zbiorze jednopunktowym $\{\phi(\mathbf{w})\}$. Wobec tego $|w_2| = 1$ skąd wynika 1.

ad.2. Bez straty ogólności można założyć, że $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \overline{AD}$. Stąd na podstawie absolutnej wypukłości zbioru Ω_∞ mamy 2.

ad.3. Ponieważ $\phi(\mathbf{w}) = \phi(\mathbf{z})$ to z lematu 4.2 wynika, że $\phi(\overline{\mathbf{zw}}) = \phi(\mathbf{w})$. Pokazaliśmy, że $|w_2| = 1$ i $|f(bw_1 + aw_2)| = 1$. Zatem $\phi(\mathbf{w})$ jest jednym z wierzchołków kwadratu Ω. □

Definicja 5.3. $\phi = \mathbf{F}|\mathbf{W}_\infty : \mathbf{W}_\infty \mapsto \mathbf{W}_\infty$. Niech h będzie podniesieniem ϕ do prostej $\mathbb{R}$,tzn. dla $\psi(\mathbf{z}) = \mathrm{e}^{2\pi x}$ jest $\phi(\psi(\mathbf{z})) = \mathrm{e}^{2\pi h(x)}$ oraz h jest funkcją ciągłą. Każde dwa podniesienia różnią się o liczbę całkowitą. Podniesienie ciągłego odwzorowania okręgu spełnia warunek: $h(x+1) = h(x)+k$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Dla ustalonego odwzorowania okręgu liczba k nie zależy od wyboru podniesienia i jest nazywane *rzędem* odwzorowania okręgu.

Wartość k można interpretować jako ilość nawinięć okręgu (ile razy nawinięty okrąg jest obrazem okręgu). Gdy odwzorowanie okręgu jest homeomorfizmem to $k = \pm 1$. $k = 1$ oznacza, że homeomorfizm nie zmienia orientacji okręgu zaś przy $k = -1$ homeomorfizm zmienia orientację okręgu.

Twierdzenie 5.1. $(a, b) \in Q_3$

1. *ϕ jest ciągłą surjekcją,*

2. *ϕ jest niemalejące (w tym sensie, że jego podniesienie jest niemalejące) i rząd odwzorowania ϕ jest równy $+1$,*

3. *jeśli* $\mathbf{W}_\infty \cap \{A, B, C, D\} = \emptyset$ *to* ϕ *jest homeomorfizmem.*

Dowód. ad.1. Ciągłość ϕ wynika z ciągłości $\mathbf{F}$, zaś surjektywność z lematu 5.7 (p.1).

ad.2. Słaba monotoniczność wynika z lematu 5.8, stąd też wynika, że rząd odwzorowania ϕ jest równy $+1$.

ad.3. Wystarczy pokazać, że ϕ jest injekcją. Gdyby $\mathbf{z}, \mathbf{w} \in \mathbf{W}_\infty$, $\mathbf{z} \neq \mathbf{w}$, $\phi(\mathbf{w}) = \phi(\mathbf{z})$ to na podstawie lematu 5.8 (punkt 3) $\phi(\mathbf{w}) \in \{A, B, C, D\}$ co jest sprzeczne z założeniem.

□

Lemat 5.9. $(a, b) \in Q_3$, Ω_∞ *jest wielokątem.*

Dowód. Niech E, F, G, H będą punktami takimi, że $\overline{EF} = \Omega_\infty \cap \overline{AD}$, $\overline{GH} = \Omega_\infty \cap \overline{BC}$. Wykażemy, że $E \neq F$. Rozważmy trzy przypadki

1. $E = F \notin \{A, D\}$ wówczas ϕ jest homeomorfizmem (twierdzenie 5.1).

   Zbiór $\bigcup_{n=0}^{\infty} \phi^{-n}(\{E, G\})$ jest przeliczalny.

   Czyli $\exists \mathbf{x} \in \mathbf{W}_\infty : \forall n \geqslant 0 \ \ \mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \notin E \cup G = \mathbf{W}_\infty \cap (\overline{AD} \cup \overline{BC})$ co jest sprzeczne z lematem 5.1.

2. $E = F = A$, $\phi^{-1}(\overline{AB} \cap \Omega_\infty) \subset \overline{AD} \cap \Omega_\infty = \overline{EF} = \{A\}$. $\overline{AB} \cap \Omega_\infty = \phi(\phi^{-1}(\overline{AB} \cap \Omega_\infty)) \subset \phi(\{A\})$. Czyli $\overline{AB} \cap \Omega_\infty$ jest jednopunktowe a ponieważ $A \in \overline{AB} \cap \Omega_\infty$ to mamy sprzeczność z lematem 5.4.

3. $E = F = D$, podobnie jak 2.

Podobnie dowodzi się, że $G \neq H$.

Na podstawie lematu 5.1 $\{\mathbf{G}^{-n}(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega)\}_{n=0}^{\infty}$ jest pokryciem $\Omega \setminus \{O\}$. Na podstawie zwartości $\mathbf{W}_\infty$ istnieje k takie, że $\{\mathbf{G}^{-n}(\mathbb{R}^2 \setminus \Omega)\}_{n=0}^{k}$ jest pokryciem $\mathbf{W}_\infty$. Zatem istnieje liczba naturalna k taka, że dla każdego $\mathbf{x} \in \mathbf{W}_\infty$ istnieje najmniejsza liczba $n \leqslant k$ taka, że $\mathbf{G}^n(\mathbf{x}) \notin \Omega$. Zatem $\mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \in \partial\Omega$. Na podstawie niezmienniczości Ω_∞ mamy $\mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \in \Omega_\infty$, czyli $\mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \in \overline{EF} \cup \overline{GH}$. Wobec tego

$$\Omega_\infty = \bigcup_{n=0}^{k} \phi^{-n}(\overline{EF} \cup \overline{GH})$$

jest wielokątem. □

Ponieważ zbiór Ω_∞ jest wielokątem to powstaje pytanie czy istnieje liczba n taka, że $\Omega_\infty = \Omega_n$. Przypuśćmy najpierw, że punkty E, F, G, H nie są okresowe. $A_n := \phi^{-n}(\mathrm{int}\overline{EF} \cup \mathrm{int}\overline{GH})$, A_n są zbiorami otwartymi bo ϕ jest ciągłe. $\{A_n\}_{n=0}^{\infty}$ — pokrycie $\mathbf{W}_\infty$ zbiorami otwartymi (na podstawie lematu 5.1). Gdyby istniało $\mathbf{x} \in \mathbf{W}_\infty$ takie, że $\mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \notin \mathrm{int}\overline{EF} \cup \mathrm{int}\overline{GH}$ dla każdego n to na podstawie lematu 5.1 istnieje $k \in \mathbb{N}$

takie, że $\mathbf{F}^k(\mathbf{x}) \in \{E, F, G, H\}$. Ponieważ dla każdego n $\mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \notin \mathrm{int}\overline{EF} \cup \mathrm{int}\overline{GH}$ to jeden z punktów E, F, G, H musi być okresowy wbrew założeniu.

$\mathbf{W}_\infty$ jest zbiorem zwartym zatem istnieje p takie, że $\{A_n\}_{n=0}^{p}$ jest pokryciem $\mathbf{W}_\infty$.

Dobierzmy U_1, U_2 — zbiory otwarte w Ω tak, aby $\mathrm{int}\overline{EF} \subset U_1 \subset \Omega_\infty$ oraz $\mathrm{int}\overline{GH} \subset U_2 \subset \Omega_\infty$. Niech $U := \bigcup_{n=1}^{p} \mathbf{F}^n(U_1 \cup U_2)$, $V := \Omega_\infty \cup U$, V jest otwartym w Ω otoczeniem Ω_∞.

Niech $\mathbf{x} \in V = \Omega_\infty \cup U$, $\mathbf{x} \in \Omega_\infty \Rightarrow \mathbf{F}^p(\mathbf{x}) \in \Omega_\infty$, $\mathbf{x} \in U \Rightarrow \exists n \leqslant p : \mathbf{F}^n(\mathbf{x}) \in U_1 \cup U_2 \subset \Omega_\infty \Rightarrow \mathbf{F}^p(\mathbf{x}) \in \Omega_\infty$. Zatem $\mathbf{F}^p(V) \subset \Omega_\infty$. Ponieważ $\Omega_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Omega_\infty$ to $\exists m \in \mathbb{N} : \Omega_m \subset V$. $\Omega_{m+p} = \mathbf{F}^{m+p}(\Omega) = \mathbf{F}^p(\Omega_m) \subset \mathbf{F}^p(V) \subset \Omega_\infty$. Zatem istnieje $N := m + p$ takie, że $\Omega_N = \Omega_\infty$ czyli ciąg Ω_n stabilizuje się. Załóżmy teraz, że któryś z punktów E, F, G, H jest okresowy. Jeśli $\mathbf{W}_\infty$ zawiera co najmniej jeden z wierzchołków kwadratu to modyfikując nieco powyższy dowód można wykazać, że ciąg Ω_n również stabilizuje się.

Prawdopodobnie ciąg Ω_n stabilizuje się w każdym przypadku, ale nie udało się tego wykazać dla przypadku gdy $\mathbf{W}_\infty$ nie zawiera żadnego z wierzchołków kwadratu i któryś z punktów E, F, G, H jest okresowy.

Twierdzenie 5.2. $(a, b) \in Q_3$, $\Omega_\infty := \lim_{n\to\infty} \Omega_n = \bigcap_{n=0}^{\infty} \Omega_n$, $\mathbf{W} = \partial\Omega_\infty$. *Wówczas*

1. $\mathbf{W}_\infty$ *jest brzegiem absolutnie wypukłego wielokąta,*
2. $\forall \mathbf{x} \neq O$ *zbiór graniczny* $\omega(\mathbf{x}) \subset \mathbf{W}_\infty$.

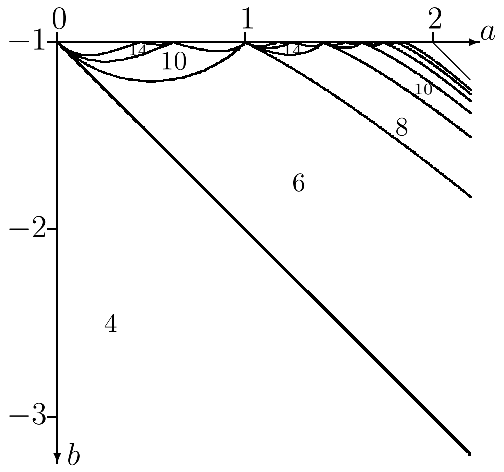
Dowód. ad.1. Jest to wniosek z lematów 5.5 i 5.9.

ad.2. Załóżmy najpierw, że $\mathbf{x} \in \Omega_\infty$. Na podstawie lematu 5.1 istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathbf{F}^k(\mathbf{x}) \in \overline{AD} \cup \overline{BC}$. Na podstawie niezmienniczości zbioru Ω_∞ mamy $\mathbf{F}^k(\mathbf{x}) \in \Omega_\infty$. Zatem $\mathbf{F}^k(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}_\infty$. Z niezmienniczości zbioru $\mathbf{W}_\infty$ wynika, że $\forall p \geqslant k$ $\mathbf{F}^p(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}_\infty$. Stąd wynika, że $\omega(\mathbf{x}) \subset \mathbf{W}_\infty$.

Niech teraz $\mathbf{x} \notin \Omega_\infty$. Jeśli istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathbf{F}^k(\mathbf{x}) \in \Omega_\infty$ to możemy powtórzyć powyższe rozumowanie. Załóżmy zatem, że $\mathbf{F}^k(\mathbf{x}) \notin \Omega_\infty$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Wybierzmy dowolne $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x})$. Wówczas $\mathbf{y} \notin \mathrm{int}\Omega_\infty$ bo $\mathbf{F}^k(\mathbf{x}) \notin \Omega_\infty$ dla każdego $k \in \mathbb{N}$. Gdyby $\mathbf{y} \notin \Omega_\infty$ to otrzymalibyśmy sprzeczność z warunkiem $\Omega_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Omega_\infty$. Zatem $\mathbf{y} \in \Omega_\infty \setminus \mathrm{int}\Omega_\infty = \mathbf{W}_\infty$.

□

Wykazane zostało, że $\mathbf{W}_\infty$ jest brzegiem wielokąta. Wyznaczono na płaszczyźnie (a, b) zbiory, dla których $\mathbf{W}_\infty$ jest brzegiem kwadratu, sześciokąta, 8, 10, 12, 14, 16-kąta. Wyniki zostały przedstawione na rys. 5.1. Zaobserwowano, że ilość boków wielokąta Ω_∞ rośnie do nieskończoności gdy zbliżamy się na płaszczyźnie (a, b) do prostych $b = 1 - a$, $b = 1 + a$ ograniczających zbiór Q_3. Podobne zjawiska zaobserwowano przy zbliżaniu się do prostej $b = -1$ od dołu wzdłuż wybranych prostych pionowych. Stwierdzono również, że możliwe jest, aby ilość boków wielokąta Ω_∞ była stała przy zbliżaniu się do prostej $b = -1$ (np. obszar parametrów (a, b), dla których zbiór Ω_∞ jest 6-kątem dochodzi do prostej $b = -1$, porównaj rys. 5.1).



Rysunek 5.1: Zbiór niezmienniczy w postaci wielokąta

5.2 Zbiór $\mathbf{W}_\infty$ w postaci sześciokąta

Podamy obecnie przykład gdy $\mathbf{W}_\infty$ jest sześciokątem. Załóżmy, że

$$\begin{cases} |b+a| < 1, \\ b < -1, \\ b^2 + b + a^2 - a \geqslant 0, \\ b(1+a) + 1 + a^2 \leqslant 0. \end{cases} \tag{5.5}$$

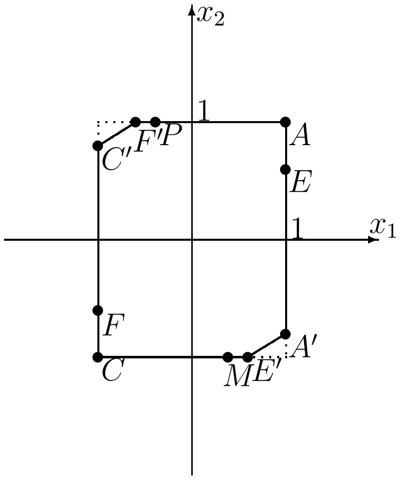
Można wykazać, że dla parametrów spełniających warunki (5.5) zbiór $\mathbf{W}_\infty$ jest sześciokątem (porównaj rys. 5.1). Wykazuje się to wyznaczając $\mathbf{F}(\Omega)$, które dla parametrów spełniających (5.5) jest sześciokątem i sprawdzając, że $\mathbf{F}^2(\Omega) = \mathbf{F}(\Omega)$. Dzięki takiemu postępowaniu otrzymuje się współrzędne sześciokąta $\mathbf{W}_\infty$.

Na rys. 5.2 przedstawiono zbiór $\mathbf{W}_\infty$, zaś na rys. 5.3 jego obraz przez odwzorowanie $\mathbf{G}$. Aby otrzymać $\mathbf{F}(\mathbf{W}_\infty)$ należy $\mathbf{G}(\mathbf{W}_\infty)$ zrzutować prostopadle na proste $x_2 = 1$, $x_2 = -1$.

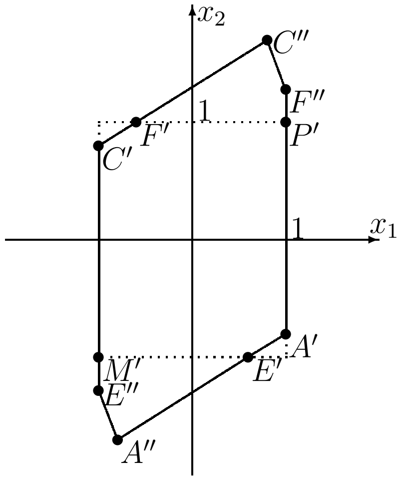
Niech E będzie przeciwobrazem przez odwzorowanie $\mathbf{G}$ punktu przeciecia odcinków: $\overline{BC}$ i $\overline{\mathbf{G}(A)\mathbf{G}(B)}$. $E = (1,(-1-b)/a)^T$. Niech $M =, \mathbf{G}^{-1}(C) = ((-1+a)/b,-1)^T$. Niech F będzie przeciwobrazem przez odwzorowanie $,\mathbf{G}$ punktu przecięcia odcinków: $\overline{DA}$ i $\overline{,\mathbf{G}(C),\mathbf{G}(D)}$. $F = (-1,(1+b)/a)^T$. Niech $P =, \mathbf{G}^{-1}(A) = ((1-a)/b,1)^T$.

Współrzędne punktów z rys. 5.2 możemy obecnie zapisać w postaci : $A = (1,1)^T$, $E = (1,(-1-b)/a)^T$, $A' = (1,b+a)^T$, $E' = ((-1-b)/a,-1)^T$, $M = ((-1+a)/b,-1)^T$, $C = (-1,-1)^T$, $F = (-1,(1+b)/a)^T$, $C' = (1,-b-a)^T$, $F' = ((1+b)/a,1)^T$, $P = ((1-a)/b,1)^T$.

Przyjmijmy następujące oznaczenia : $X_1 := |AE|$, $X_2 := |EA'|$, $X_3 := |A'E'|$, $X_4 := |E'M|$, $X_5 := |MC|$, $X_6 := |CF|$, $X_7 := |FC'|$, $X_8 := |C'F'|$, $X_9 := |F'P|$, $X_{10} := |PA|$, $Y_1 := |A'E'|$, $Y_2 := |E'A''|$, $Y_3 := |A''E''|$, $Y_4 := |E''M'|$, $Y_5 := |M'C'|$,



Rysunek 5.2



Rysunek 5.3

$Y_6 := |C'F'|$, $Y_7 := |F'C''|$, $Y_8 := |C''F''|$, $Y_9 := |F''P'|$, $Y_{10} := |P'A'|$, $S := X_1 + ... + X_5 = Y_1 + ... + Y_5$.

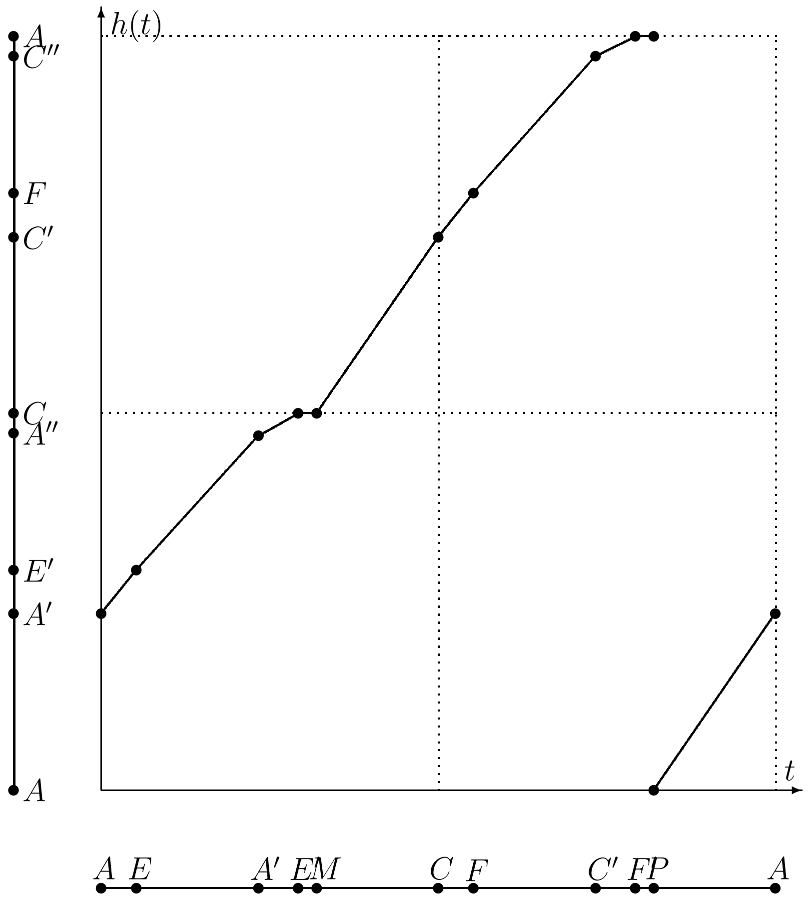
$2S$ jest sumą długości boków sześciokąta $\mathbf{W}_\infty$. Wstawiając wartości współrzędnych punktów A, E, A', E', M, C, F, C', F', P do wzorów na X_i i Y_i otrzymujemy:

$$
\begin{aligned}
X_1 &= X_6 = \frac{1+a+b}{a}, & X_2 &= X_7 = -\frac{b(1+a)+1+a^2}{a},\\
X_3 &= X_8 = \frac{1+a+b}{a}(1+a^2)^{1/2}, & X_4 &= X_9 = -\frac{b+b^2+a^2-a}{ab},\\
X_5 &= X_{10} = \frac{a+b-1}{b}, & Y_1 &= Y_6 = \frac{1+a+b}{a}(1+a^2)^{1/2},\\
Y_2 &= Y_7 = X_2, & Y_3 &= Y_8 = 1+a+b,\\
Y_4 &= Y_9 = 0, & Y_5 &= Y_{10} = 1-b-a,
\end{aligned}
$$

$$S = \frac{1+a+b}{a}(1+a^2)^{1/2} - \frac{b(1+a)+1+a^2}{a} + 2.$$

Homeomorfizm φ zbioru $\mathbf{W}_\infty$ na okrąg.

W tym przypadku homeomorfizm zbioru $\mathbf{W}_\infty$ z okręgiem określimy inaczej niż we wzorze (5.3). Ustalmy punkt $X_0 \in \mathbf{W}_\infty$. Dowolnemu punktowi $X \in \mathbf{W}_\infty$ przypiszmy długość łamanej skierowanej X_0X. W ten sposób otrzymamy homeomorfizm zbioru $\mathbf{W}_\infty$ z odcinkiem o długości $2S$ o utożsamionych końcach. Dzięki takiemu zdefiniowaniu homeomorfizmu odwzorowanie okręgu sprzężone z ϕ jest odcinkami liniowe.



Rysunek 5.4: Odwzorowanie sprzężone z $\mathbf{F}|\mathbf{K}$ dla (a, b) spełniających warunki (5.5)

$$\varphi : \mathbf{W}_\infty \ni X \mapsto \varphi(X) \in \mathbb{S} = \mathbb{R}/2S\mathbb{Z}$$

$\mathbb{R}/2S\mathbb{Z}$ — odcinek o długości $2S$ o utożsamionych końcach.

$$\varphi(X) = \begin{cases} |AX| & X \in \overline{AA'}, \\ X_1 + X_2 + |A'X| & X \in \overline{A'E'}, \\ X_1 + X_2 + X_3 + |E'X| & X \in \overline{E'C}, \\ S + |CX| & X \in \overline{CC'}, \\ S + X_1 + X_2 + |C'X| & X \in \overline{C'F'}, \\ S + X_1 + X_2 + X_3 + |F'X| & X \in \overline{F'A} \setminus \{A\}. \end{cases}$$

Odwzorowanie okręgu sprzężone z ϕ (tzn. spełniające zależność: $h\varphi = \varphi\phi$) ma postać: $h : \mathbb{S} \ni t \mapsto h(t) \in \mathbb{S}$.

$$h(t) = \begin{cases} \sqrt{1+a^2}t + Y_5 & t \in [0, X_1), \\ (t - X_1) + Y_5 + Y_1 & t - X_1 \in [0, X_2), \\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}(t - X_1 - X_2) + Y_5 + Y_1 + Y_2 & t - X_1 - X_2 \in [0, X_3), \\ S & t - X_1 - X_2 - X_3 \in [0, X_4), \\ -b(t - X_1 - X_2 - X_3 - X_4) + S & t - X_1 - X_2 - X_3 - X_4 \in [0, X_5), \\ \sqrt{1+a^2}(t - S) + S + Y_5 & t - S \in [0, X_1), \\ (t - S - X_1) + S + Y_5 + Y_1 & t - S - X_1 \in [0, X_2), \\ \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}(t - S - X_1 - X_2) + S + Y_5 + Y_1 + Y_2 & t - S - X_1 - X_2 \in [0, X_3), \\ 2S & t - S - X_1 - X_2 - X_3 \in [0, X_4), \\ -b(t - S - X_1 - X_2 - X_3 - X_4) & t \in [2S - X_5, 2S). \end{cases}$$

Odwzorowanie h zostało przedstawione na rys. 5.4. Postępowanie powyższe pozwala dla dowolnych parametrów $(a, b) \in Q_3$ skonstruować odwzorowanie h sprzężone z ϕ w ten sposób, że h jest odcinkami liniowe. Wynika to z faktu, że $\mathbf{W}_\infty$ jest wielokątem a odwzorowanie $\mathbf{F}$ jest kawałkami liniowe.

5.3 Liczba obrotu

Zdefiniujemy najpierw liczbę obrotu odwzorowania okręgu, potem liczbę obrotu odwzorowania $\mathbf{F}$ i spróbujemy scharakteryzować badany układ dynamiczny poprzez jego liczbę obrotu.

Twierdzenie 5.3. *φ — homeomorfizm okręgu, h — jego podniesienie $\Rightarrow$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$ istnieje*

$$\varrho_h(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{h^n(x)}{n} \tag{5.6}$$

i nie zależy od wyboru punktu początkowego x. Liczba $\varrho_h(x)$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy gdy φ ma punkt okresowy.

Twierdzenie to pochodzi z pracy [1] (twierdzenie 2.4.2).

Twierdzenie 5.4. *φ — odwzorowanie okręgu, h — jego podniesienie, h jest ciągłe i słabo monotoniczne, funkcja h jest niemalejąca i $h(x+1) = h(x) + 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ teza jak w twierdzeniu 5.3.*

Dowód. Przebiega tak jak dowód twierdzenia 2.4.2 [1] z niewielkimi modyfikacjami. □

Twierdzenie 5.5. *φ — odwzorowanie okręgu, h — jego podniesienie, h jest ciągłe i słabo monotoniczne, funkcja h jest niemalejąca i $h(x+1) = h(x) + 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$ liczba obrotu ϱ jest wymierna $\Rightarrow$ każda trajektoria zmierza do pewnej orbity okresowej (o liczbie obrotu ϱ).*

Dowód. Jeśli już trajektoria zmierza do jakiejś orbity okresowej to musi ona mieć liczbę obrotu ϱ bo liczba obrotu odwzorowania φ nie zależy od punktu początkowego (twierdzenie 5.4). Liczba obrotu ϱ jest wymierna. Zatem istnieją liczby całkowite m i k takie, że $m\varrho + k = 0$. Niech $g(x) := f^m(x) + k$. Łatwo zauważyć, że g jest podniesieniem ϕ^m do $\mathbb{R}$. Dla każdego $n \geqslant 0$ mamy $g^n(x) = f^{mn}(x) + k$.

Niech $z \in \mathbb{S}^1$, $z = \mathrm{e}^{2\pi x}$. Wykażemy, że $g^n(x) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} c$ punktu stałego odwzorowania g. Jeśli x jest punktem stałym g to jest to prawda. Załóżmy zatem, że x nie jest punktem stałym g. Na podstawie dowodu tw 2.4.2 [1] istnieje x_0 — punkt stały g. Ponieważ $\forall x \in \mathbb{R} \ \ g(x+1) = g(x) + 1$ to istnieją x_1, x_2 punkty stałe g takie, że $x_1 < x < x_2$. Możemy tak dobrać x_1 i x_2, że w przedziale (x_1, x_2) nie ma punktów stałych (gdyby było to niemożliwe to x byłoby punktem skupienia punktów stałych a zatem punktem stałym wbrew założeniu). Zatem $\forall y \in (x_1, x_2)$ mamy $g(y) \neq y$. Na podstawie ciągłości g $\forall y \in (x_1, x_2) \quad g(y) < y$ lub $\forall y \in (x_1, x_2) \quad g(y) > y$. W obu przypadkach ciąg $g^n(x)$ jest monotoniczny i ograniczony, zatem ma granicę. Niech $c := \lim_{n\to\infty} g^n(x)$. Łatwo zauważyć, że $g(c) = c$. Wykazaliśmy zatem, że $g^n(x)$ zmierza do c — punktu stałego odwzorowania g. Zatem trajektoria punktu $z = \mathrm{e}^{2\pi x}$ zmierza do trajektorii okresowej: $(\mathrm{e}^{2\pi i c}, \mathrm{e}^{2\pi i f(c)}, \ldots, \mathrm{e}^{2\pi i f^{m-1}(c)})$. □

Powyższe twierdzenie można również uzyskać jako wniosek z twierdzenia IX.21 [2], mówiącego że jeśli zbiór punktów okresowych φ jest domknięty i niepusty to zbiór punktów niewędrujących pokrywa się ze zbiorem punktów okresowych. W naszym przypadku gdy liczba obrotu jest wymierna to zbiór punktów okresowych jest niepusty (twierdzenie 5.4) i domknięty. Ponieważ każdy punkt graniczny jest niewędrujący to na podstawie zacytowanego twierdzenia każda trajektoria zmierza do pewnej orbity okresowej.

Definicja 5.4. *Liczbą obrotu odwzorowania h* nazywamy liczbę $\varrho_h = \varrho_h(x)$ określoną wzorem (5.6). *Liczbą obrotu odwzorowania ϕ* (5.4) nazywamy liczbę $\varrho = \varrho_h \pmod 1 \in [0, 1)$ gdzie h jest dowolnie wybranym podniesieniem ϕ do $\mathbb{R}$ (definicja 5.3) (ponieważ dowolne dwa podniesienia różnią się o liczbę całkowitą to łatwo zauważyć, że definicja ϱ postawiona jest poprawnie.

Liczbę obrotu można interpretować jako średni kąt (podzielony przez 2π) o jaki posuwa się punkt pod działaniem ϕ.

Definicja 5.5. $(a,b) \in Q_3$, $\mathbf{x} \in \Omega \backslash O$. *Liczbą obrotu punktu* $\mathbf{x}$ *względem odwzorowania* $\mathbf{F}$ nazywamy

$$\varrho_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (\tau(\mathbf{x}^{n-1}) - \tau(\mathbf{x}^{n})) \mod 1$$

o ile taka granica istnieje, gdzie $\tau : \mathbb{R}^2 \setminus O \ni \mathbf{x} \mapsto \tau(\mathbf{x}) \in [0,1)$, $\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\| \mathrm{e}^{2\pi\tau(\mathbf{x})}$.

Ponieważ obrazem punktu $\mathbf{x} \neq O$ jest punkt $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \neq O$ to $\tau(\mathbf{x}^{n-1})$ jest dobrze określone. O ile liczba obrotu istnieje to jest to średni kąt obrotu wokół punktu O przypadający na jedną iterację podzielony przez 2π. Łatwo zauważyć, że jeśli $\mathbf{x} \in \mathbf{W}_\infty$ to liczba obrotu punktu $\mathbf{x}$ względem $\mathbf{F}$ i liczba obrotu odwzorowania ϕ pokrywają się ($\phi = \mathbf{F}|\mathbf{W}_\infty$).

Twierdzenie 5.6. $(a,b) \in Q_3$, $\mathbf{x} \neq O$, *ϱ jest liczbą obrotu odwzorowania* $\phi \Rightarrow$

1. *Jeśli ϱ jest wymierne to trajektoria punktu* $\mathbf{x}$ *zmierza do trajektorii okresowej zawartej w* $\mathbf{W}_\infty$,

2. $\varrho_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ *istnieje oraz* $\varrho_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \varrho$.

Dowód. ad.1. Weźmy dowolne $\mathbf{x} \neq O$. Na podstawie twierdzenia 5.2 $\omega(\mathbf{x}) \subset \mathbf{W}_\infty$. Niech $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x}) \subset \mathbf{W}_\infty$. Na podstawie twierdzenia 5.5 i wymierności ϱ każda trajektoria startująca z $\mathbf{W}_\infty$ zmierza do pewnej orbity okresowej. Zatem $\omega(\mathbf{y})$ jest orbitą okresową.

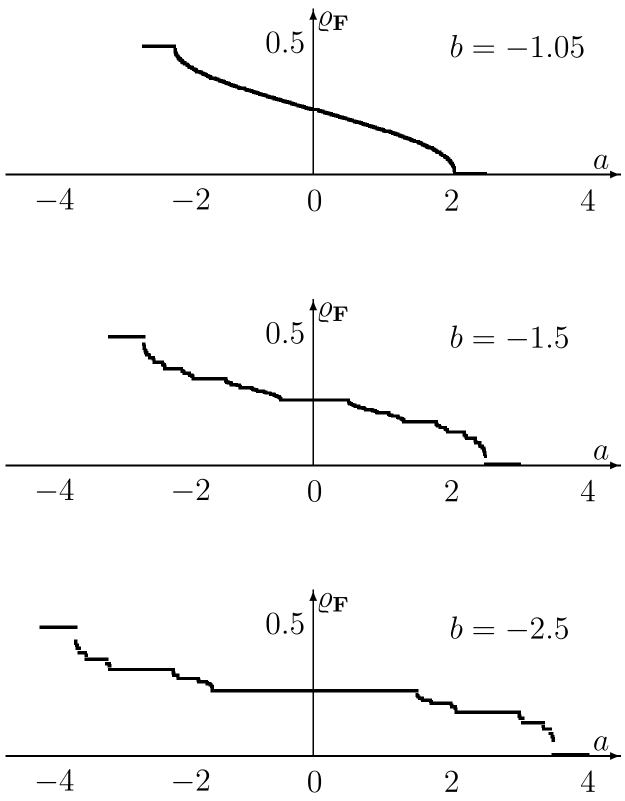
Ponieważ $\mathbf{y} \in \omega(\mathbf{x})$ to na podstawie własności zbiorów granicznych $\omega(\mathbf{y}) = \omega(\mathbf{x})$. Zatem $\omega(\mathbf{x})$ jest orbitą okresową.

ad.2. Załóżmy, że istnieje $k \in \mathbb{N}$ takie, że $\mathbf{F}^k(\mathbf{x}) \in \mathbf{W}_\infty$. Wówczas od chwili k możemy zamiast odwzorowania $\mathbf{F}$ rozważać jego zacieśnienie do zbioru $\mathbf{W}_\infty$ czyli odwzorowanie ϕ. Ponieważ początkowe punkty nie mają znaczenia przy definicji liczby obrotu zatem $\varrho_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ jest równe liczbie obrotu odwzorowania ϕ, która nie zależy od punktu początkowego (twierdzenie 5.4). Niech teraz $\forall k \in \mathbb{N}$ $\mathbf{F}^k(\mathbf{x}) \notin \mathbf{W}_\infty$. Wówczas jeden z punktów E, F, G, H (porównaj rozważania na temat stabilizowania się ciągu Ω_n po lemacie 5.9) jest okresowy. Zatem na podstawie twierdzenia 5.4 liczba obrotu ϱ odwzorowania ϕ jest wymierna. Na podstawie części pierwszej $\omega(\mathbf{x})$ jest orbitą okresową o liczbie obrotu ϱ. Ponieważ liczba obrotu $\varrho_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ pokrywa się z liczbą obrotu dowolnego punktu $\mathbf{y}$ ze zbioru granicznego $\mathbf{x}$ to $\varrho_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \varrho$.

$\square$

5.4 Języki Arnolda

Wykazaliśmy, że dla ustalonych parametrów a, b liczba obrotu odwzorowania $\mathbf{F}$ jest stała. Wiemy na podstawie twierdzenia 5.5, że jeśli liczba obrotu jest wymierna to wówczas istnieje co najmniej jedna trajektoria okresowa zawarta w $\mathbf{W}_\infty$ i wszystkie inne trajektorie niezerowe zmierzają do pewnej trajektorii okresowej zawartej w $\mathbf{W}_\infty$.



Rysunek 5.5: Liczba obrotu w funkcji parametru a dla różnych wartości parametru b

Na rys. 5.5 przedstawiono liczbę obrotu odwzorowania $\mathbf{F}$ dla wybranych $(a, b) \in Q_3$. Na podstawie twierdzenia 5.6 liczba obrotu $\mathbf{F}$ nie zależy od wyboru punktu startowego różnego od O. Dla ustalonej wartości b ($b = -1.05$, $b = -1.5$, $b = -2.5$) zmieniano parametr a. Startując z punktu $\mathbf{x} = (1, 1)^T$ obliczano $\varrho_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ według definicji 5.5. Obliczano przybliżoną wartość $\varrho_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ dla $n = 10000$ badając równocześnie zbieżność $\varrho_{\mathbf{F}}(\mathbf{x})$ przy zwiększaniu n. Zaobserwowano, że zbieżność ta jest dość szybka zwłaszcza przy większej wartości $|b|$. W większości przypadków trajektoria szybko osiąga orbitę absolutnie stabilną zawierającą jeden z wierzchołków kwadratu Ω. Zbieżność tę można przyspieszyć pomijając pewną ilość początkowych iteracji pozwalając trajektorii na osiągnięcie lub zbliżenie się do jej zbioru granicznego. Można zauważyć, że przy ustalonym b zmianie a odpowiada słabo monotoniczna zmiana $\varrho_{\mathbf{F}}$. Na rys. 5.5

można wyraźnie zaobserwować strukturę diabelskich schodków, charakteryzującą się tym, że pomiędzy dowolnymi dwoma odcinkami poziomymi (schodkami) znajduje się inny schodek. Wartości $\varrho_{\mathbf{F}} = 0$ i $\varrho_{\mathbf{F}} = 1/2$ odpowiadają parametrom (a,b) należącym odpowiednio do Q_1 i Q_2 (porównaj rys. 2.3). Dla tych wartości parametrów wszystkie trajektorie zmierzają odpowiednio do punktu stałego ($\varrho_{\mathbf{F}} = 0$) lub orbity o okresie 2 ($\varrho_{\mathbf{F}} = 1/2$). Odcinek poziomy $\varrho_{\mathbf{F}} = 1/4$ w pobliżu $a = 0$ odpowiada parametrom (a, b) należącym do $Q_{1/4}$ (porównaj rys. 3.1) zaś odcinek $\varrho_{\mathbf{F}} = 1/3$ parametrom (a, b) należącym do $Q_{1/3}$. W rozdziale 3 wykazaliśmy, że dla $Q_{1/3}$ i $Q_{1/4}$ istnieją orbity o okresach 3 i 4 i na podstawie twierdzenia 5.5 i twierdzenia 5.6 każda trajektoria zmierza do orbity o okresie odpowiednio 3 lub 4. Dla $(a, b) \in T_3$ $(b = -1)$ trajektorie układu liniowego są ograniczone. Można wykazać, że dla $a = 2cos2\pi\varrho$ $(\varrho \in (0, 0.5))$ liczba obrotu odwzorowania $\mathbf{F}$ jest równa ϱ. Zatem przy zbliżaniu się do prostej $b = -1$ od dołu liczba obrotu będzie bliska $(arccos(a/2))/2\pi$ (porównaj rys. 5.5 dla $b = -1.05$).

Zajmiemy się teraz badaniem zbiorów parametrów odpowiadających tej samej liczbie obrotu, zwanych *językami Arnolda*. Niech p/q będzie ułamkiem nieskracalnym z przedziału $(0, 1/2)$.

$$W_{p/q} := \{(a, b) : \mathbf{F} \text{ ma punkt okresowy o liczbie obrotu } p/q\}.$$

Uwaga 5.1. Zbiory $W_{p/q}$ są rozłączne.

Dowód. Wynika to z twierdzenia 5.6. □

Uwaga 5.2. $(a, b) \in W_{p/q} \Rightarrow$ wszystkie trajektorie niezerowe układu zmierzają do pewnej trajektorii okresowej zawartej w $\mathbf{W}_\infty$.

Uwaga 5.3. $W_{p/q}$ są domknięte.

Dowód. Wynika z ciągłości odwzorowania $\mathbf{F}$. □

Hipotezy:

1. $W_{p/q}$ są spójne,

2. $W_{p/q}$ są nieograniczone,

3. Punkty nie należące do żadnego z tych zbiorów tworzą zbiór miary zero na płaszczyźnie (a, b),

4. Każdy zbiór $W_{p/q}$ jest złożony ze skończonego ciągu zbiorów domkniętych (zwanych dalej łezkami), z których każde kolejne dwa łączą się w jednym punkcie. Pierwszy z tych zbiorów ma punkt wspólny z odcinkiem T_3 ($\mathbf{W}_{p/q} \cap T_3 = \{(2cos(2\pi p/q), -1)\}$), ostatni jest nieograniczony. Każda łezka ograniczona jest dwiema krzywymi gładkimi, przecinającymi się w dwu punktach (krzywe ograniczające ostatnią łezkę przecinają się w jednym punkcie),

5a. $(a,b) \in W_{p/q} \cap T_3$. Istnieje nieprzeliczalna ilość orbit, które nie są asymptotycznie stabilne,

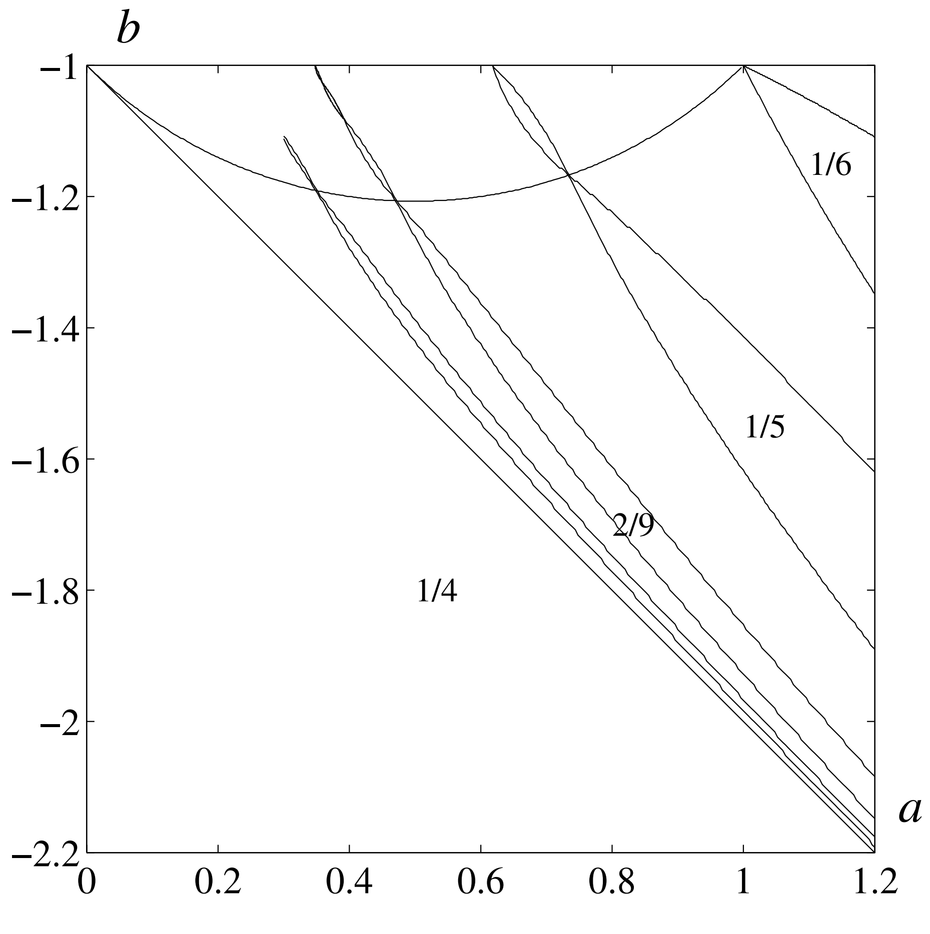
5b. $(a,b) \in \mathrm{int} W$

- Jeśli q jest nieparzyste to istnieją dwie orbity stabilne i dwie niestabilne.
- Jeśli q jest parzyste to istnieją jedna orbita stabilna i jedna niestabilna.

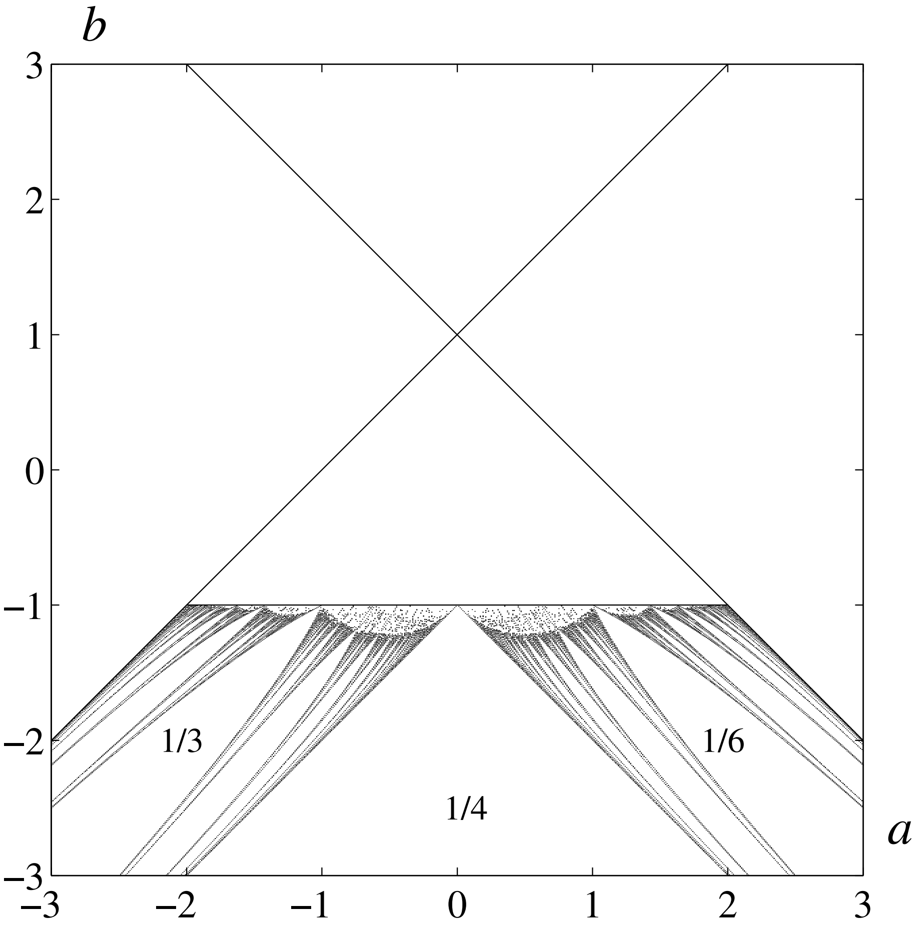
5c. $(a,b) \in \partial W_{p/q} \setminus T_3$

- Jeśli q jest nieparzyste to istnieją dwie orbity niestabilne.
- Jeśli q jest parzyste to istnieje jedna orbita niestabilna.

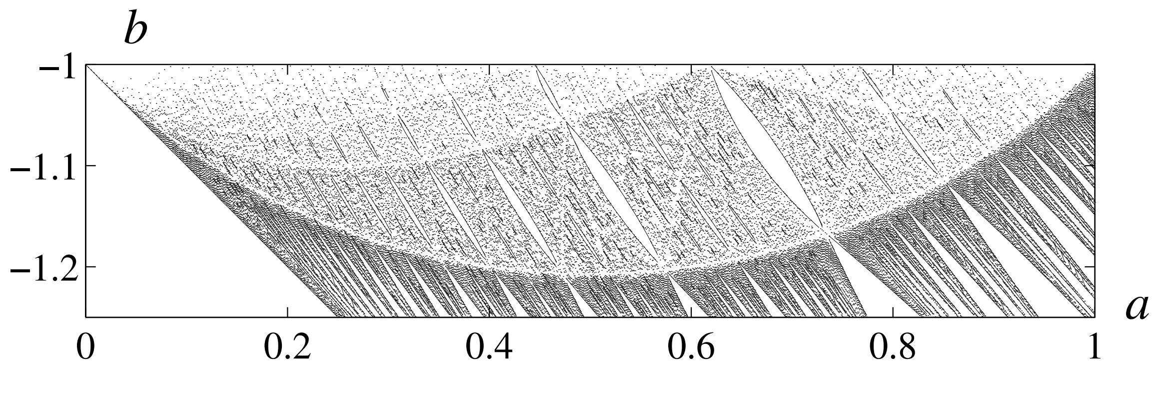
5d. Orbity stabilne dla (a,b) w ostatniej nieograniczonej łezce są absolutnie stabilne.



Rysunek 5.6: Zbiory $\mathbf{W}_{1/6}$, $\mathbf{W}_{1/5}$, $\mathbf{W}_{2/9}$, $\mathbf{W}_{1/4}$



Rysunek 5.7: Zbiory (a, b) o tej samej liczbie obrotu



Rysunek 5.8: Zbiory (a, b) o tej samej liczbie obrotu

Powyższe hipotezy zostały wysnute na podstawie rozważań teoretycznych i symulacji komputerowych. Rozważania teoretyczne polegały na wyznaczeniu w oparciu o twierdzenie 3.1 zbiorów występowania orbit o liczbie obrotu 1/4, 2/9, 1/5 i 1/6. Zostały one przedstawione na rys. 5.6. Na rys. 5.7 przedstawione zostały efekty symulacji komputerowej. Parametry a, b były zmieniane o 0.01. Startując z ustalonego punktu początkowego sprawdzano czy układ po ustalonej liczbie iteracji osiąga orbitę okresową o okresie mniejszym niż 100. Na rysunku zaznaczano punkty na płaszczyźnie (a, b) w których sąsiedztwie zaobserwowano zmianę liczby obrotu. Zastanawia zgodność wyników przedstawionych na rysunkach 5.6 i 5.7. Wyznaczone analitycznie ciągi łezek odpowiadające liczbom obrotu 1/5 i 2/9 są widoczne na rys. 5.7 otrzymanym dzięki symulacji komputerowej. Można udowodnić, że grubość wszystkich łezek poza łezkami odpowiadającymi $W_{1/3}$, $W_{1/4}$, $W_{1/6}$ maleje do zera przy b rosnącym do nieskończoności. Przekrój zbioru Q_3 prostą $b = b_0$ ma długość $2 - 2b_0$. Przekrój zbioru $W_{1/4}$ ma długość $-2-2b_0$, zaś długości przekrojów zbiorów $W_{1/3}$, $W_{1/6}$ prostą $b = b_0$ zmierzają do 2 przy b zmierzającym do $-\infty$ (porównaj rozdział 3.5 i rys. 3.1). Zatem grubości przekrojów innych łezek muszą zmierzać do zera (porónaj rys. 5.6 i 5.7).

Na rys. 5.8 przedstawiono powiększony fragment rys. 5.7 przy jednoczesnym zwiększeniu maksymalnego okresu poszukiwanych orbit okresowych. Można zauważyć dość skomplikowaną strukturę łezek potwierdzającą powyższe hipotezy.

Spis literatury

[1] W. Szlenk, "*Wstęp do teorii gładkich ukladów dynamicznych*", PWN, Warszawa 1982.

[2] L.S. Block, W.A. Coppel, "*Dynamics in One Dimension*", Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

[3] A. Wojtkiewicz, "*Elementy syntezy filtrów cyfrowych*", WNT, Warszawa 1984.

[4] A.V. Oppenheim, R.W. Schafer, "*Cyfrowe przetwarzanie sygnałów*", WKiŁ, Warszawa 1979.

[5] L.O. Chua, T. Lin, "*Chaos in digital filters*", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-35, No.6/1988, str. 648–658.

[6] P.M. Ebert, J.E. Mazo, M.G. Taylor, "*Overflow oscillations in digital filters*", The Bell System Technical Journal, 11/1969, str. 2999–3020.

[7] M.J. Ogorzałek, Z. Galias, "*Dwuparametrowa analiza bifurkacyjna filtru drugiego rzedu z arytmetyką nasyceniową*", XIII Krajowa Konferencja, Teoria Obwodow i Uklady Elektroniczne, Bielsko-Biała 1990, vol. 2, str. 417–422.

[8] Z. Galias, M.J. Ogorzałek, "*Bifurcation phenomena in second-order digital filter with saturation-type adder overflow characteristic*", IEEE Trans. on Circuits and Systems, vol. 37, No.8, August 1990, str. 1068–1070.

[9] Z. Galias, M.J. Ogorzałek, "*Limit sets of trajectories in a nonlinear digital system*", The MTNS'91 International Symposium on the Mathematical Theory of Networks and Systems, Kobe, June 17–21, 1991.

[10] Z. Galias, M.J. Ogorzalek, "*On symbolic dynamics of a chaotic second-order digital filter*", International Journal of Circuit Theory and Applications,1991.

[11] M.J. Ogorzałek, Z. Galias, "*An abudance of oscillatory solutions in a class of sacond order discrete-time systems*", XIV KKTOiUE, vol. 1, str. 41–46, Waplewo 1991.

[12] M.J.Ogorzałek, Z.Galias, "*Arnold tongues and devil's staircase in a digital filter employing saturation arithmetic*", Proc. 1991 IEEE ISCAS, vol. 1, str. 384–387, Singapore, June 11–14, 1991.