Zakład Elektrotechniki
Akademia Górniczo-Hutnicza

ANALIZA I PRZETWARZANIE SYGNAŁÓW CHAOTYCZNYCH

Zbigniew Galias

Kraków 1995

Spis treści

Spis oznaczeń

$\mathbb{R}$	—	zbiór liczb rzeczywistych,
$\mathbb{Z}$	—	zbiór liczb całkowitych,
$\mathbb{N}$	—	zbiór liczb naturalnych,
ϱ	—	metryka,
μ	—	miara probabilistyczna,
$\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$	—	punkt w $\mathbb{R}^2$,
$\xi_F = (\xi_{F_1}, \xi_{F_2})^T$	—	punkt stały,
$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$, $\mathbf{y}$	—	punkty w $\mathbf{R}^3$,
$\|\| \cdot \|\|$	—	norma,
$\|\| \cdot \|\|_2$	—	norma Euklidesowa,
$\|\| \cdot \|\|_\infty$	—	norma maksimum,
$\pi(x,t)$	—	układ dynamiczny,
$\gamma(x)$	—	trajektoria punktu x,
$\omega(x)$, $\alpha(x)$	—	dodatni i ujemny zbiór graniczny punktu x,
p	—	parametr układu, parametr sterujący,
p_0	—	wartość nominalna parametru sterującego,
$\delta p_{\max}$	—	maksymalna zmiana parametru sterującego,
Δ_p	—	zmiana parametru sterującego przy sterowaniu dwupołożeniowym,
$\mathbf{F}(\mathbf{x}, p)$, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$	—	pole wektorowe,
f	—	odwzorowanie,
h_s	—	podkowa Smale'a,
h_d	—	zdeformowana podkowa Smale'a,
$\mathrm{Fix} f$	—	zbiór punktów stałych odwzorowania f,
$I(f, U)$	—	indeks punktu stałego odwzorowania f względem zbioru U,
$\Gamma(F, \gamma)$	—	obrót pola wektorowego F wzdłuż krzywej γ,
$h(f)$	—	entropia topologiczna odwzorowania f,
∂A	—	brzeg zbioru A,
$\mathrm{int} A$	—	wnętrze zbioru A,
$\mathbf{P}$	—	odwzorowanie płaszczyzny, odwzorowanie Poincarégo,
$\mathbf{P}_i$	—	odwzorowanie płaszczyzny, uogólnione odwzorowanie Poincarégo,
$\mathbf{I}$	—	macierz jednostkowa,
$\mathbf{A}, \mathbf{J}$	—	macierz Jakobianowa,

λ_s,λ_u	—	stabilna i niestabilna wartość własna,
$\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_u$	—	wektory własne odpowiadające wartościom własnym λ_s, λ_u,
$U_\pm$, U_0	—	obszary liniowości układu Chuy,
$V_\pm$	—	płaszczyzny oddzielające obszary $U_\pm$, U_0,
$\mathbf{p}_\pm$	—	punkty stałe układu Chuy należące do obszarów $U_\pm$.

Wstęp

W przypadku wielu układów fizycznych mała zmiana parametrów układu nie powoduje zasadniczej zmiany jego zachowania. Przykładowo niewielka zmiana wartości rezystancji jednego z elementów poprawnie zaprojektowanego układu elektronicznego zwykle nie powoduje dużej zmiany położenia jego punktu pracy. Podobnie niewielka zmiana warunków początkowych czy też sygnału wymuszającego nie powoduje dużej zmiany trajektorii ukladu.

Okazuje się jednak, że nie zawsze jest to regułą. Istnieją układy, w których niewielka zmiana warunków początkowych może spowodować duże zmiany trajektorii układu (wrażliwość na warunki początkowe) oraz układów, w których mała zmiana jednego z parametrów powoduje zmiany jakościowe w ich działaniu (bifurkacje). W ostatnich latach opisano wiele przykładów układów fizycznych w tym elektrycznych i elektronicznych, w których zaobserwowano skomplikowane zachowania dynamiczne zwane oscylacjami chaotycznymi [11, 56, 65, 74]. W niniejszej pracy będziemy rozważać układy deterministyczne, tzn. takie, dla których istnieje przepis na obliczanie przyszłych zachowań na podstawie zadanych warunków początkowych. W naszych rozważaniach ograniczymy się do układów dyssypatywnych czyli rozpraszających energię. Przez chaos w takich układach będziemy rozumieć nieregularne zachowanie, które wydaje się być przypadkowe, ale takie nie jest. Przypadkowość ta jest wynikiem wrażliwości trajektorii na warunki początkowe objawiająca się w tym, że dwie trajektorie startujące z dowolnie bliskich punktów, w przypadku układu chaotycznego, zwykle wykładniczo oddalają się od siebie, pozostając równocześnie w ograniczonym obszarze przestrzeni fazowej, i po pewnym czasie stają się nieskorelowane. Układ chaotyczny jest to najprościej mówiąc układ generujący przebiegi ograniczone posiadający własność wrażliwości na warunki początkowe.

W istocie chaos jest zjawiskiem powszechnym. W większości układów nieliniowych wyższych rzędów przy pewnym doborze parametrów mogą zostać wygenerowane oscylacje chaotyczne. Z drugiej jednak strony nie jest znany żaden ścisły matematyczny dowód, że dany układ elektroniczny jest faktycznie układem chaotycznym, w szczególności nie wykazano choćby istnienia atraktora dla żadnego z układów o skomplikowanej dynamice. Większość stwierdzeń o istnieniu chaosu jest oparta wyłącznie na obserwacjach czy to wyników symulacji komputerowych czy też przebiegów pochodzących z układów rzeczywistych. Jeśli obserwowany przebieg nie jest oscylacją okresową i charakteryzuje się dużą nieregularnością to zwykle uznaje się, że jest to trajektoria chaotyczna. Nie ma jednak pewności czy obserwowane trajektorie nie są przebiegami okresowymi o bardzo długich okresach lub też przebiegami przejściowymi z okresowym zbiorem granicznym. Nie wiadomo również czy efekty chaotyczne pochodzące z symulacji komputerowych nie są wynikiem błedów metod całkowania układów lub błędów zaokrągleń [1].

Widać zatem, że mimo oczywistych postępów w zrozumieniu układów chaotycznych ciągle brak jest narzędzi pozwalających przeprowadzić ścisłą analizę układów generujących drgania chaotyczne. Badanie takich układów jest utrudnione z uwagi na ich nieliniową naturę. Praktycznie każdy z tych układów musi być analizowany oddzielnie i bardzo trudno jest uogólnić wyniki, aby pokrywały szerszą klasę układów.

Zachowania chaotyczne występujące w układach deterministycznych są obecnie obszarem aktywnych badań. Istnieje kilka głównych powodów zainteresowania układami chaotycznymi. Pierwszym z nich jest wzgląd poznawczy. Wszystkie rzeczywiste układy są z natury rzeczy nieliniowe. Zawsze istnieje granica, powyżej której zwiększeniu sygnału wejściowego nie odpowiada liniowy wzrost sygnału wyjściowego. Najczęściej podczas analizy układów przyjmuje się ich liniowy model. Nie pozwala to jednak wyjaśnić wszystkich zjawisk zachodzących w tych układach. Jednym ze zjawisk możliwych do wyjaśnienia tylko przy uwzględnieniu efektów nieliniowych jest chaos, zjawisko niemożliwe w skończenie wymiarowych liniowych układach dynamicznych. Interesujące jest zatem poznanie warunków generacji drgań chaotycznych oraz skonstruowanie narzędzi pozwalających na ich analizę. Zagadnieniu temu poświecona jest pierwsza część pracy.

Z drugiej strony, jak już wcześniej wspomnieliśmy, zjawiska chaotyczne są powszechne. Są one zwykle niepożądane w rzeczywistych układach. Jest oczywiste, że filtr cyfrowy lub wzmacniacz generujący przebiegi chaotyczne jest bezużyteczny. Ważne jest zatem opracowanie metod sterowania pozwalających na zahamowanie niepożądanych oscylacji typu chaotycznego. W tym celu stosuje się różne metody sterowania układów. Bogaty przegląd metod sterowania układów chaotycznych jest przedstawiony przykładowo w pracach [58, 72]. Stabilizacja chaosu jest istotnym problemem praktycznym. Istnieją urządzenia o dynamice chaotycznej, których działanie można poprawić jeśli zmusi się je do generowania przebiegów okresowych (np. laser [64]). Podobne zastosowania można sobie wyobrazić w innych dziedzinach, przykładowo wpływania na pogodę w celu uniknięcia katastrof atmosferycznych. Znane są również układy, które normalnie generują przebiegi okresowe, a które pod działaniem pewnych czynników zaczynają zachowywać się w sposób nieregularny (np. arytmia serca). W dziedzinie zastosowań metod sterowania chaosem pojawiły się między innymi prace na temat stabilizacji pracy serca [41] i mocy lasera [64]. Problem sterowania układów chaotycznych jest rozważany w drugiej części niniejszej pracy.

Trzecią przyczyną zainteresowania układami chaotycznymi są ich potencjalne zastosowania. Ta dziedzina badań pojawiła się stosunkowo niedawno. Czynione są próby stosowania drgań chaotycznych do przesyłania [36] i kodowania [18] sygnałów oraz generacji sygnałów pseudo-losowych posiadających z góry zadane pasmo częstotliwościowe [66].

Elektroniczne układy chaotyczne nadają sie szczególnie dobrze do tego typu badań. Stosunkowo łatwo można w nich w porównaniu z innymi układami fizycznymi dokonywać zmiany parametrów układu, zmieniać skalę czasu czy też modelować inne układy fizyczne, biologiczne lub chemiczne.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie metod analizy układów chaotycznych oraz wybranych metod ich sterowania na przykładzie układów elektronicznych. Praca ta w zasadniczej części poświęcona jest ciągłym układom trzeciego rzędu oraz dyskretnym układom dynamicznym dwóch zmiennych. Ograniczenie takie wynika z kilku powodów. Do zrozumienia mechanizmów rządzących oscylacjami chaotycznymi wybiera się układy możliwie proste. Ciągłe układy autonomiczne rzędu mniejszego niż trzy nie mogą generować drgań chaotycznych (twierdzenie Poincarégo-Bendixsona). Zatem aby rozważany układ mógł generować przebiegi chaotyczne jego rząd musi wynosić co najmniej trzy. Ponadto wiele układów wyższego rzędu generuje drgania chaotyczne, które mogą być zanurzone w przestrzeni o wymiarze trzy i wiele zjawisk zachodzących w układach wyżej wymiarowych może być wyjaśniona na podstawie analizy układów rzędu trzeciego. Metody sterowania układów chaotycznych trzeciego rzędu opisane w niniejszej pracy można dość prosto uogólnić na układy wyższych rzędów. Analiza działania metod sterowania w układach układach wyższych rzędów jest jednak mniej przejrzysta z uwagi na większą liczbę stopni swobody.

W rozdziale pierwszym podane zostaną wstępne definicje i oznaczenia oraz przedstawione zostaną układy dynamiczne rozważane w niniejszej pracy.

Oryginalny dorobek autora został zawarty w rozdziałach drugim i trzecim. W rozdziale drugim opisane zostaną znane metody poszukiwania orbit okresowych oraz metody znajdowania ich macierzy Jakobianowych na podstawie danych eksperymentalnych. Przedstawione zostaną również opracowane przez autora modyfikacje tych metod, przyspieszające ich działanie oraz powodujące zwiększenie dokładności otrzymanych wyników. W drugiej części rozdziału podane zostanie oryginalne twierdzenie o istnieniu nieskończenie wielu orbit okresowych dla układów dynamicznych z zanurzoną zdeformowaną podkową Smale'a. Osiągnięciem autora jest również opracowanie algorytmów pozwalających przy zastosowaniu arytmetyki interwałowej udowodnić założenia twierdzenia o istnieniu nieskończenie wielu orbit okresowych. Technika ta zostanie zilustrowana na przykładzie obwodu Chuy. Istnienie nieskończenie wielu orbit okresowych zostanie następnie wykorzystane do udowodnienia, że entropia topologiczna odwzorowania Poincarégo generowanego przez trajektorie obwodu Chuy jest dodatnia.

Rozdział trzeci jest poświęcony sterowaniu układów chaotycznych w sensie stabilizacji orbit okresowych zanurzonych w atraktorze. Opisanych zostanie kilka znanych metod stabilizacji. Podane zostaną przykłady sytuacji kiedy zastosowanie tych metod nie jest możliwe. Przedstawione zostaną dwie, pochodzące od autora, metody sterowania układami chaotycznymi: metoda minimum odległości oraz grupa metod sterowania dwupołożeniowego. Zostaną również wyprowadzone wyniki analityczne dotyczące możliwości zastosowania tych metod. Opisane metody sterowania zostaną zilustrowane wieloma przykładami symulacyjnymi. Przedstawiony zostanie również szereg wniosków wysnutych na podstawie przeprowadzonych eksperymentów.

Kilka osób szczególnie przyczyniło się do napisania tej pracy. Przede wszystkim chciałbym wyrazić podziękowanie promotorowi pracy dr hab. inż. Maciejowi Ogorzałkowi za inicjatywę podjęcia tematyki układów chaotycznych, wnikliwe przestudiowanie pierwszej wersji pracy oraz za cenne uwagi podczas jej przygotowywania a także za wielostronną pomoc w pracy naukowej.

Uwagi i wyjaśnienia doc. dr hab. Jerzego Ombacha oraz mgr Piotra Zgliczyńskiego z Instytutu Matematyki Uniwersytetu Jagiellońskiego stanowiły znaczną pomoc merytoryczną w sporządzaniu niniejszej pracy.

Część wyników zawartych w tej pracy powstała podczas pobytu w Institute for Network Theory and Circuit Design w Uniwersytecie Technicznym w Monachium dzięki zaproszeniu prof. Josefa A. Nosska, którego komentarze były dla mnie niezwykle cenne.

Chciałbym również podziękować mojej żonie Beacie za zrozumienie i stałą zachętę do prowadzenia pracy naukowej.

Zbigniew Galias

Kraków, wrzesień 1995.

Rozdział 1

Wprowadzenie

W rozdziale tym wprowadzone zostaną podstawowe pojęcia i definicje przydatne przy opisie matematycznym układów chaotycznych.

1.1 Układy dynamiczne

Większość definicji w tym podrozdziale pochodzi z pracy [5]. Deterministyczny układ dynamiczny jest to układ, którego stan można w pełni określić przez podanie warunków początkowych oraz równań ewolucji. Poniżej przedstawiona jest ścisła definicja układu dynamicznego.

Definicja 1.1 (Układ dynamiczny) Trójkę (X, T, π), w której X jest przestrzenią metryczną, T jest grupą, zaś π jest ciągłym odwzorowaniem z $X \times T$ w X spełniającym dla każdego $x \in X$ i dla każdych $t_1, t_2 \in T$ następujące warunki:

$$\pi(x, 0) = x, \tag{1.1a}$$

$$\pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2), \tag{1.1b}$$

nazywamy *układem dynamicznym.*

Przestrzeń X nazywana jest *przestrzenią fazową*, zaś π odwzorowaniem fazowym. W praktyce najczęściej rozważa się przypadki gdy T jest zbiorem liczb całkowitych $T = \mathbf{Z}$ (*dyskretny* układ dynamiczny) lub rzeczywistych $T = \mathbf{R}$ (*ciągły* układ dynamiczny). Dyskretny układ dynamiczny jest również nazywany *kaskadą*, zaś ciągły *potokiem.*

Często rozważa się również układy semidynamiczne, w których zbiór T posiada strukturę półgrupy, $T = \mathbf{R}^+ \overset{\mathrm{df}}{=} [0, \infty)$ — ciągłe układy semidynamiczne, $T = \mathbf{N} \overset{\mathrm{df}}{=} \{0, 1, 2 \ldots\}$ — dyskretne układy semidynamiczne.

Ważną klasą układów dynamicznych są układy generowane przez układy równań różniczkowych zwyczajnych postaci:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1.2}$$

gdzie $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ oraz $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$. Jeśli prawa strona układu (1.2) nie zależy od zmiennej t w sposób jawny, to układ równań różniczkowych nazywamy *autonomicznym.* Funkcja $\mathbf{F}$ jest nazywana *polem wektorowym* ponieważ definiuje ona kierunek (wektor) i prędkość trajektorii w każdym punkcie przestrzeni stanów. W niniejszej pracy będziemy rozważać układy dynamiczne generowane przez autonomiczne układy równań różniczkowych zwyczajnych. Następne twierdzenie mówi kiedy taki układ równań definiuje układ dynamiczny.

Twierdzenie 1.1 *Rozważmy autonomiczny układ równań różniczkowych zwyczajnych*

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)), \tag{1.3}$$

gdzie odwzorowanie $\mathbf{F}\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ *jest ciągłe. Załóżmy, że dla każdego* $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ *istnieje dokładnie jedno rozwiązanie* $\varphi(t, \mathbf{x})$ *przechodzące przez* $\mathbf{x}$*, zdefiniowane na* $\mathbf{R}$ *i spełniające warunek* $\varphi(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x}$*. Wówczas odwzorowanie* $\pi(\mathbf{x}, t) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \varphi(t, \mathbf{x})$ *definiuje ciągły układ dynamiczny na* $\mathbf{R}^n$*.*

Jeśli odwzorowanie $\varphi(t, \mathbf{x})$ jest zdefiniowane na $\mathbf{R}^+$ to π jest układem semidynamicznym. $\varphi(t, \mathbf{x})$ definiuje trajektorię równania różniczkowego (1.3), z warunkiem początkowym $\mathbf{x}$. Takie rozwiązanie będziemy również zapisywać jako $\mathbf{x}(t)$. Poniższe twierdzenie mówi, że układy równań spełniające warunek Lipschitza generują ciągłe układy dynamiczne.

Twierdzenie 1.2 *Jeśli odwzorowanie* $\mathbf{F}$ *spełnia globalnie warunek Lipschitza, tzn.*

$$\exists k \ : \quad ||\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{F}(\mathbf{y})|| \leqslant k||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \ \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n \tag{1.4}$$

to spełniony jest warunek na jednoznaczność rozwiązań wymagany w poprzednim twierdzeniu.

Dyskretne układy dynamiczne pojawiają się w naturalny sposób przy badaniach tzw. przekształcenia Poincarégo. Występują one również przy iteracjach odwzorowań bijektywnych. Mówi o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.3 *Jeśli* $f\colon X \to X$ *jest ciągła bijekcją i zdefiniujemy* $\varphi(x, n) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f^n(x)$ *to* $(X, \mathbf{Z}, \varphi)$ *jest dyskretnym układem dynamicznym.*

W przypadku gdy odwzorowanie f nie jest bijekcją to (X, φ) jest układem semidynamicznym.

Przedstawimy obecnie definicje kilku pojęć, z których będziemy korzystać w niniejszej pracy. Niech (X, T, π) będzie układem dynamicznym.

Definicja 1.2 (Zbiór niezmienniczy) Zbiór $A \subset X$ nazywamy *niezmienniczym* jeśli $\pi(x, t) \in A$ dla każdego $x \in A$ i $t \in T$.

Definicja 1.3 (Zbiór niedekomponowalny) Zbiór $A \subset X$ nazywamy *niedekomponowalnym* jeśli jest on domknięty i niezmienniczy oraz jeśli dla dowolnych $x, y \in A$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją $x = x_0, x_1, \ldots, x_n = y$ oraz $t_1, \ldots, t_n \geqslant 1$ takie, że odległość $\pi(x_{i-1}, t_i)$ od x_i jest mniejsza od ε.

Definicja 1.4 (Zbiór minimalny) Zbiór $M \subset X$ nazywamy *minimalnym* jeśli jest on niepusty, domknięty, niezmienniczy i żaden jego właściwy podzbiór nie ma tych własności.

Definicja 1.5 (Trajektoria, ruch) Zbiór $\gamma(x) = \{\pi(x, t) \colon t \in T\}$ nazywamy *trajektorią* (*orbitą*) punktu x. Zbiory $\gamma^+(x) = \{\pi(x, t) \colon t \geqslant 0, t \in T\}$, $\gamma^-(x) = \{\pi(x, t) \colon t \leqslant 0, t \in T\}$ nazywamy odpowiednio *dodatnią* i *ujemną semitrajektorią* punktu x. Odwzorowanie $\pi_x \colon T \to X$ zdefiniowane przez $\pi_x(t) = \pi(x, t)$ nazywamy *ruchem* (przechodzącym przez x).

Definicja 1.6 (Punkt stały) Punkt $x \in X$ nazywamy *punktem stałym* jeśli dla każdego $t \in T$ zachodzi $\pi(x, t) = x$.

Definicja 1.7 (Punkt okresowy) Punkt $x \in X$ nazywamy *okresowym* jeśli x nie jest punktem stałym oraz istnieje $t > 0$ takie że $\pi(x,t) = x$. Liczbę $t_0 = \inf\{t > 0 \colon \pi(x,t) = x\}$ nazywamy *okresem* punktu okresowego x. Jeśli punkt x jest okresowy to trajektorię $\gamma(x)$ nazywamy okresową.

Definicja 1.8 (Zbiory graniczne) Zbiór $\omega(x) = \{\, y \in X \colon \exists$ ciąg $t_n \to +\infty$ taki, że $\pi(x,t_n) \to y \,\}$ nazywamy *dodatnim zbiorem granicznym* punktu x. Zbiór $\alpha(x) = \{y \in X \colon \exists$ ciąg $t_n \to -\infty$ taki, że $\pi(x,t_n) \to y\}$ nazywamy *ujemnym zbiorem granicznym* punktu x.

Definicja 1.9 Zbiór $A \subset X$ nazywamy *dodatnio* (*ujemnie*) *rekursywnym* w odniesieniu do zbioru $B \subset X$ jeśli dla każdego $t \in T$ istnieje $s > t$ ($s < t$) oraz $x \in B$ takie, że $\pi(x,s) \in A$.

Definicja 1.10 (Stabilność w sensie Poissona) Punkt $x \in X$ nazywamy *dodatnio* (*ujemnie*) *stabilnym w sensie Poissona* jeśli każde otoczenie U punktu x jest dodatnio (ujemnie) rekursywne w odniesieniu do zbioru jednoelementowego $\{x\}$ (tzn. dla każdego $t \in T$ istnieje $s > t$ ($s < t$) takie, że $\pi(x,s) \in U$).

Często jako definicję stabilności w sensie Poissona przyjmuje się warunek równoważny: punkt x jest dodatnio (ujemnie) stabilny w sensie Poissona jeśli $x \in \omega(x)$ ($x \in \alpha(x)$).

Definicja 1.11 (Punkt niewędrujący) Punkt $x \in X$ nazywamy *niewędrującym* jeśli każde otoczenie U punktu x jest dodatnio rekursywne względem siebie (tzn. dla każdego $t \in T$ istnieje $s > t$ takie, że $\pi(U,s) \cap U \neq \emptyset$).

Definicja 1.12 (Stabilność w sensie Lagrange'a) Dla dowolnego $x \in X$ ruch π_x nazywamy *stabilnym* (*dodatnio*) (*ujemnie*) *w sensie Lagrange'a* jeśli zbiór $\overline{\gamma(x)}$ ($\overline{\gamma^+(x)}$) ($\overline{\gamma^-(x)}$) jest zwarty.

Dla $X = \mathbf{R}^n$ stabilność w sensie Lagrange'a jest równoważna ograniczoności zbiorów $\gamma(x)$, $\gamma^+(x)$, $\gamma^-(x)$.

Definicja 1.13 Ruch π_x nazywamy *prawie okresowym* jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje relatywnie gęsty[1] zbiór liczb $\{\tau_n\}_{n \in \mathbf{Z}}$ taki, że

$$\rho(\pi(x,t), \pi(x, t+\tau_n)) < \varepsilon$$

dla każdego $t \in T$ i dla każdej liczby całkowitej n.

1.1.1 Wykładniki Lapunowa

Wprowadzimy obecnie definicję wykładników Lapunowa [22]. Jeśli stan początkowy układu dynamicznego jest lekko zaburzony, to eksponencjalna prędkość z jaką to zaburzenie zwiększa lub zmniejsza się w czasie nazywamy wykładnikiem Lapunowa (lub wykładnikiem charakterystycznym). W dalszej części będziemy wykorzystywać pojęcie miary niezmienniczej. Załóżmy, że (X,μ) jest przestrzenią z miarą oraz że μ jest miarą probabilistyczną[2].

Definicja 1.14 Niech (X,T,π) będzie układem dynamicznym. Miarę μ nazywamy miarą *niezmienniczą* układu dynamicznego π jeśli dla każdego $t \in T$, $t > 0$ i dla dowolnego mierzalnego podzbioru E przestrzeni X zbiór $\pi(E,-t)$ jest mierzalny i spełniony jest warunek $\mu(\pi(E,-t)) = \mu(E)$.

[1] Zbiór D liczb rzeczywistych nazywamy *relatywnie gęstym* jeśli istnieje $t_0 > 0$ takie, że $D \cap (t - t_0, t + t_0) \neq \emptyset$ dla każdego $t \in \mathbf{R}$.

[2] Miarę μ przestrzeni X nazywamy *probabilistyczną* jeśli $\mu(X) = 1$.

Definicja 1.15 Odwzorowanie $f\colon X \mapsto X$ nazywamy *zachowującym miarę* jeśli dla każdego zbioru mierzalnego A zbiór $f^{-1}(A)$ jest mierzalny i zachodzi równość $\mu(A) = \mu(f^{-1}(A))$.

Poniżej wprowadzimy definicję miary ergodycznej lub (co jest tym samym) nierozkładalnej. Miara niezmiennicza μ może dać się rozłożyć na kilka części, z których każda jest znów niezmiennicza. Jeśli nie, to mówimy, że miara μ jest ergodyczna.

Definicja 1.16 Niech (X, T, π) będzie układem dynamicznym. Układ dynamiczny nazywamy *ergodycznym* jeśli miara $\mu(A)$ każdego zbioru niezmienniczego A jest równa 0 lub 1. Mówimy, że miara μ jest *ergodyczna* ze względu na układ dynamiczny π jeśli układ π jest ergodyczny ze względu na μ.

Dla miar ergodycznych zachodzi następujące twierdzenie ergodyczne:

Twierdzenie 1.4 ([22]) *Jeśli miara μ jest ergodyczna za względu na układ dynamiczny π to dla każdej ciągłej funkcji f równość*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\pi(x_0, t))dt = \int \mu(dx) f(x)$$

zachodzi dla prawie wszystkich warunków początkowych x_0 względem miary μ.

Innymi słowy dla prawie każdego punktu x_0 średnia czasowa z funkcji f jest równa średniej przestrzennej. Z twierdzenia ergodycznego można otrzymać wniosek, że trajektoria prawie każdego punktu x trafia do każdego zbioru miary dodatniej, a co więcej, przebywa w tym zbiorze czas asymptotycznie proporcjonalny do miary tego zbioru [24]. Opisaną własność nazywa się *własnością asymptotycznie równomiernego rozłożenia trajektorii.* Przy definicji wykładników Lapunowa będziemy wykorzystywać następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.5 (Oseledec [22]) *Niech $f\colon X \mapsto X$ będzie odwzorowaniem zachowującym miarę μ takim, że miara μ jest ergodyczna. Niech ponadto $T\colon X \mapsto M_{n\times n}$ ($M_{n\times n}$ oznacza ogół macierzy kwadratowych wymianu n) będzie odwzorowaniem mierzalnym takim, że*

$$\int \mu(dx) \log^+ ||T(x)|| < \infty, \tag{1.5}$$

gdzie $\log^+ u = \max(0, \log u)$. *Niech* $T_x^n \stackrel{\mathrm{df}}{=} T(f^{n-1}(x)) \cdots T(f(x))T(x)$. *Wówczas dla prawie wszystkich x względem miary μ istnieje następująca granica:*

$$\Lambda_x \stackrel{\mathrm{df}}{=} \lim_{n\to\infty} (T_x^{n*} T_x^n)^{1/2n}, \tag{1.6}$$

gdzie T_x^{n*} oznacza sprzężenie macierzy T_x^n (macierz $T_x^{n*}T_x^n$ jest macierzą dodatnio określoną).

Definicja 1.17 Logarytmy wartości własnych macierzy Λ_x nazywamy *wykładnikami Lapunowa.* Oznaczamy je przez $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots$. Są one prawie wszędzie stałe względem miary μ.

Niech $\lambda_1' > \lambda_2' > \cdots$ będą niepowtarzającymi się wykładnikami Lapunowa. Niech E_x^i będzie podprzestrzenią $\mathbf{R}^n$ odpowiadającą wartościom własnym mniejszym lub równym od $\exp(\lambda_i')$ macierzy Λ_x. Wówczas $\mathbf{R}^n = E_x^1 \supset E_x^2 \supset \cdots$ i zachodzi następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1.6 ([22]) *Dla prawie wszystkich x względem miary μ zachodzi*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log ||T_x^n u|| = \lambda_i' \tag{1.7}$$

jeśli $u \in E_x^i \setminus E_x^{i+1}$. W szczególności dla wszystkich wektorów u nie należących do podprzestrzeni E_x^2 granicą jest największy wykładnik Lapunowa λ_1.

Powyższe twierdzenie jest szczególnie przydatne przy konstrukcji algorytmów szacujących największy wykładnik Lapunowa w symulacjach komputerowych.

Wykładniki Lapunowa dla kaskady

Rozważmy dyskretny układ dynamiczny $(\mathbf{R}^n, f)$, gdzie $f: \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ jest funkcją różniczkowalną. Oznaczmy przez $T(x)$ macierz $(\partial f_i/\partial x_j)$ pochodnych cząstkowych składników f_i w punkcie x. Dla n-tej iteracji f^n odwzorowania f pochodne cząstkowe można obliczyć z wzoru na pochodną funkcji złożonej:

$$\partial(f^n)_i/\partial x_j = T(f^{n-1}(x)) \cdots T(f(x))T(x). \tag{1.8}$$

Jeśli μ jest miarą ergodyczną dla odwzorowania f to założenia Twierdzenia 1.5 są spełnione i wykładniki Lapunowa są zdefiniowane jako logarytmy wartości własnych macierzy Λ_x określonej wzorem (1.6).

Jeśli $\delta x(0)$ jest małą zmianą wartości początkowej (zakładamy, że ta zmiana jest nieskończenie mała), to zmiana po czasie n jest dana wzorem

$$\delta x(n) = T_x^n \delta x(0). \tag{1.9}$$

Dla prawie wszystkich $\delta x(0)$ na podstawie Twierdzenia 1.6 mamy $\delta x(n) \approx \delta x(0)e^{n\lambda_1}$ i wrażliwość na zmianę warunków początkowych odpowiada dodatniemu wykładnikowi Lapunowa $\lambda_1 > 0$.

Wykładniki Lapunowa dla potoku

Rozważmy ciągły układ dynamiczny $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}, \pi)$. Tym razem stosujemy Twierdzenie 1.5 do odwzorowania $\pi_1: \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ zdefiniowanego przez $\pi_1(x) \overset{\mathrm{df}}{=} \pi(x, 1)$. Ściśle rzecz biorąc oznaczamy przez T_x^t macierz pochodnych cząstkowych odwzorowania π_t w punkcie x. Jeśli μ jest miarą ergodyczną to następująca granica istnieje:

$$\Lambda_x \overset{\mathrm{df}}{=} \lim_{t\to\infty} (T_x^{t*} T_x^t)^{1/2t}. \tag{1.10}$$

Wykładnikami Lapunowa ciągłego układu dynamicznego nazywamy logarytmy wartości własnych macierzy Λ_x.

Związek wykładników Lapunowa z typem atraktora

Istnieje ścisły związek pomiędzy wykładnikami Lapunowa i typem atraktora. Przykładowo stabilny punkt stały układu ciągłego posiada wszystkie wykładniki Lapunowa ujemne. Jeśli trajektoria atraktora nie zawiera punktu stałego to co najmniej jeden wykładnik Lapunowa jest równy zeru [35]. Atraktor będący orbitą okresową posiada jeden wykładnik Lapunowa równy zeru i pozostałe mniejsze od zera. Atraktory prawie okresowe posiadają kilka wykładników Lapunowa równych zeru i pozostałe mniejsze od zera.

Istnieją również atraktory, które posiadają jeden lub więcej dodatnich wykładników Lapunowa. Będziemy o nich mówić w podrozdziale 1.2.

1.1.2 Entropia topologiczna

Obecnie przypomnimy definicję entropii topologicznej [68]. Niech (X, ϱ) będzie zwartą przestrzenią metryczną, zaś α otwartym pokryciem X: $\alpha = \{A_i\}_{i=1}^n$, $X \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$, A_i – otwarte.

Definicja 1.18 Jeśli $\alpha = \{A_i\}_{i=1}^n$ i $\beta = \{B_j\}_{j=1}^m$ są otwartymi pokryciami przestrzeni X, to *iloczynem pokryć* α i β nazywamy pokrycie

$$\alpha \vee \beta \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{A_i \cap B_j, i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, m\}.$$

Definicja 1.19 Dla każdego otwartego pokrycia α przestrzeni X niech $N(\alpha)$ oznacza liczbę zbiorów w podpokryciu o minimalnej mocy; podpokrycie[3] β pokrycia α nazywamy *minimalnym*, jeśli każde inne podpokrycie ma nie mniej elementów niż β. Liczbę

$$H_0 \stackrel{\mathrm{df}}{=} \log N(\alpha)$$

nazywamy *entropią pokrycia* α.

Niech $\varphi: X \mapsto X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Dla pokrycia $\alpha = \{A_i\}$ oznaczmy $\varphi^{-1}(\alpha) = \{\varphi^{-1}(A_i)\}$, gdzie $\varphi^{-1}(A_i)$ jest przeciwobrazem zbioru A_i przez odwzorowanie φ.

Definicja 1.20 Granicę

$$h(\varphi, \alpha) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} H_0(\alpha \vee \varphi^{-1}(\alpha) \vee \ldots \vee \varphi^{-n+1}(\alpha))$$

nazywamy *entropią topologiczną przekształcenia* φ *względem pokrycia* α. Liczbę $h(\varphi)$, określoną wzorem

$$h(\varphi) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{\alpha}\ h(\varphi, \alpha)$$

nazywamy *topologiczną entropią przekształcenia* φ. Supremum jest rozciągnięte na wszystkie możliwe pokrycia otwarte α.

Entropia topologiczna $h(\varphi)$ jest parametrem liczbowym dyskretnego układu dynamicznego (X, φ) charakteryzującym szybkość "mieszania" punktów X przez przekształcenie φ. Jedną z podstawowych własności entropii topologicznej jest jej niezmienniczość względem sprzężenia topologicznego, tzn. jeśli układy (X, φ) i (Y, ψ) są topologicznie sprzężone[4] to $h(\varphi) = h(\psi)$.

Powyżej przedstawiona została definicja entropii topologicznej dla układu dyskretnego. Wprowadzimy teraz definicję entropii potoku [24]. Niech $\{X, \mathbf{R}, \pi\}$ będzie ciągłym układem dynamicznym.

Definicja 1.21 *Entropią topologiczną* potoku $\{X, \mathbf{R}, \pi\}$ nazywamy liczbę

$$h(\pi) = h(\pi_1), \tag{1.11}$$

gdzie odwzorowanie $\pi_t: X \mapsto X$ jest zdefiniowane jako $\pi_t(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \pi(x, t)$.

Następujące twierdzenie orzeka, że ta definicja jest naturalna.

Twierdzenie 1.7 ([24], str. 218) *Niech* $\{X, \mathbf{R}, \pi\}$ *będzie ciągłym układem dynamicznym. Wtedy* $h(\pi_t) = |t| h(\pi_1)$.

Entropia topologiczna układów zachowujących się w sposób regularny (np. posiadających stabilny punkt stały, ktory przyciąga wszystkie trajektorie) jest równa zeru. Dla opisanych w następnym podrozdziale układów chaotycznych entropia topologiczna jest dodatnia.

[3] Pokrycie $\beta = \{A_{i_j}\}_{j=1}^m$ $(1 \leqslant i_j \leqslant n)$ składające się z wybranych zbiorów należących do pokrycia $\alpha = \{A_i\}_{i=1}^n$ nazywamy *podpokryciem pokrycia* α.

[4] Dyskretne układy dynamiczne (X, φ) i (Y, ψ) nazywamy *topologicznie sprzężonymi* jeśli istnieje homeomorfizm $h : X \mapsto Y$ taki, że $h \circ \varphi = \psi \circ h$.

1.1.3 Odwzorowanie Poincarégo

W tym podrozdziale wprowadzona zostanie definicja odwzorowania Poincarégo [42], które często pojawia się przy badaniu ciągłych układów dynamicznych. Konstrukcja odwzorowania Poincarégo pozwala na uproszczenie analizy układu z uwagi na obniżenie wymiaru przestrzeni stanu. Niech φ_t będzie potokiem generowanym przez układ (1.3). Najpierw wybierzmy hiperpłaszczyznę Σ, transwersalną do potoku w punkcie $\mathbf{x}_1$ oraz punkt $\mathbf{x}_2 = \varphi_T(\mathbf{x}_1)$ należący do trajektorii punktu $\mathbf{x}_1$, leżący na hiperpłaszczyźnie Σ. Zakładamy, że fragment trajektorii $\{\varphi_t(\mathbf{x}_1)\}_{t\in(0,T)}$ nie przecina płaszczyzny Σ (jeśli tak nie jest to musimy odpowiednio zmniejszyć Σ, przez wybranie otwartego podzbioru hiperpłaszczyzny Σ zawierającego punkty $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ i nie zawierającego innych punktów z rozważanego fragmentu trajektorii).

Definicja 1.22 *Odwzorowanie Poincarégo* $\mathbf{P}\colon U \longrightarrow \Sigma$ jest zdefiniowane przez:

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_\Sigma(\mathbf{x}) \stackrel{\text{df}}{=} \varphi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}), \tag{1.12}$$

gdzie U jest pewnym otoczeniem punktu $\mathbf{x}_1$ w Σ oraz $\tau(\mathbf{x})$ jest czasem, po którym trajektoria $\varphi_t(\mathbf{x})$ wraca do Σ.

Istnienie ciągłego odwzorowania Poincarégo, w przypadku gdy płaszczyzna Σ jest transwersalna do potoku w punktach $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ wynika z następującego twierdzenia:

Twierdzenie 1.8 ([61, str. 316]) *Jeśli płaszczyzna Σ jest transwersalna do potoku w punktach $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2 = \varphi_T(\mathbf{x}_1)$ to istnieje otwarte otoczenie U punktu $\mathbf{x}_1$ i dokładnie jedno odwzorowanie $\tau\colon U \longrightarrow \mathbf{R}$ klasy C^1 takie, że dla każdego $\mathbf{x} \in U$ zachodzi $\varphi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \in \Sigma$ oraz $\tau(\mathbf{x}_1) = T$.*

Odwzorowanie Poincarégo ma ciekawe własności w przypadku, gdy punkt $\mathbf{x}_1$ należy do orbity okresowej. Niech γ będzie orbitą okresową potoku. Wybierzmy punkt $\mathbf{x}_F$ należący do orbity okresowej oraz hiperpłaszczyznę Σ transwersalną do potoku w punkcie $\mathbf{x}_F$. Wówczas istnieje otoczenie U punktu $\mathbf{x}_F$ w Σ oraz ciągłe odwzorowanie Poincarégo określone na U, takie że czas powrotu punktu $\mathbf{x}_F$ jest równy okresowi orbity γ. Jest oczywiste, że punkt $\mathbf{x}_F$ jest punktem stałym odwzorowania $\mathbf{P}$ i stabilność punktu $\mathbf{x}_F$ odzwierciedla stabilność orbity okresowej γ dla potoku. Jedna z ważniejszych własności odwzorowania Poincarégo jest sformułowana w następującym twierdzeniu:

Twierdzenie 1.9 ([61, str. 318]) *Niech $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ będą dowolnymi dwoma punktami leżącymi na pewnej orbicie okresowej. Niech Σ_1 będzie transwersalną do potoku hiperpłaszczyzną zawierającą $\mathbf{x}_1$ i podobnie Σ_2 transwersalną do potoku hiperpłaszczyzną zawierającą $\mathbf{x}_2$. Wówczas macierze Jakobianowe $D\mathbf{P}_{\Sigma_1}(\mathbf{x}_1)$ i $D\mathbf{P}_{\Sigma_2}(\mathbf{x}_2)$ są podobne[5].*

Z powyższego twierdzenia wynika, że wartości własne macierzy Jakobianowej odwzorowania Poincarégo w punkcie należącym do orbity okresowej nie zależą od wyboru punktu na orbicie okresowej oraz nie zależą od wyboru płaszczyzny transwersalnej.

Dopuszczając przypadek, że punkty $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ należą do różnych hiperpłaszczyzn otrzymamy uogólnione odwzorowanie Poincarégo. Wybierzmy dwa punkty $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ należące do tej samej trajektorii, $\mathbf{x}_2 = \varphi_T(\mathbf{x}_1)$. Niech Σ_1 i Σ_2 będą hiperpłaszczyznami transwersalnymi do potoku odpowiednio w punktach $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$.

Definicja 1.23 Uogólnione odwzorowanie Poincarégo $\mathbf{P}_{\Sigma_1\Sigma_2}\colon U \longrightarrow \Sigma_2$ *jest zdefiniowane przez*

$$\mathbf{P}_{\Sigma_1\Sigma_2}(\mathbf{x}) \stackrel{\text{df}}{=} \varphi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}), \tag{1.13}$$

[5] Macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ nazywamy *podobnymi* jeśli istnieje nieosobliwa macierz $\mathbf{T}$ taka, że $\mathbf{A} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{T}$. Macierze podobne mają takie same wielomiany charakterystyczne, a zatem takie same wartości własne.

gdzie U jest pewnym otoczeniem punktu $\mathbf{x}_1$ w Σ_1 oraz $\tau(\mathbf{x})$ jest czasem, po którym trajektoria $\varphi_t(\mathbf{x})$ osiąga Σ_2.

Następne twierdzenie orzeka istnienie ciągłego uogólnionego odwzorowania Poincarégo w pewnym otoczeniu punktu $\mathbf{x}_1$, w przypadku gdy hiperpłaszczyzny Σ_1 i Σ_2 są transwersalne do potoku w punktach $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$.

Twierdzenie 1.10 *Jeśli Σ_1 i Σ_2 są hiperpłaszczyznami transwersalnymi do potoku odpowiednio w punktach $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2 = \varphi_T(\mathbf{x}_1)$ to istnieje otwarte otoczenie U punktu $\mathbf{x}_1$ i dokładnie jedno odwzorowanie $\tau\colon U \longrightarrow \mathbf{R}$ klasy C^1 takie, że dla każdego $\mathbf{x} \in U$ zachodzi $\varphi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}) \in \Sigma_2$ oraz $\tau(\mathbf{x}_1) = T$.*

Dla uogólnionego odwzorowania Poincarégo własność wartości własnych macierzy Jakobianowej nie jest zachowana. W podrozdziale 3.1.3 pokazane zostanie, że wartości własne mogą znacznie zmieniać się przy zmianie położenia punktów $\mathbf{x}_1$ i $\mathbf{x}_2$ na orbicie okresowej. Również jakościowa zmiana wartości własnych (decydujące o stabilności położenie względem okręgu jednostkowego) jest możliwa.

1.2 Układy chaotyczne

W niniejszym podrozdziale przedstawimy definicje dziwnego atraktora i układu chaotycznego. W literaturze zwykle słowo "dziwny" jest używane w odniesieniu do struktury geometrycznej lub kształtu atraktora i oznacza, że atraktor posiada takie własności jak niecałkowity wymiar fraktalny, strukturę zbioru Cantora lub nie jest nigdzie różniczkowalny [33]. Natomiast słowo "chaotyczny" odnosi się do dynamiki typowej trajektorii na atraktorze i oznacza, że bliskie trajektorie rozbiegają się eksponencjalnie. Mówi się również w takim przypadku, że układ jest czuły na zmianę warunków początkowych. W wielu przypadkach chaotyczne atraktory są również dziwne. Przykładowo rozważane przez nas w późniejszej części pracy odwzorowanie Hénona wykazuje eksponencjalną rozbieżność bliskich trajektorii, zaś atraktor posiada strukturę zbioru Cantora. Istnieją jednak przykłady chaotycznych atraktorów, które nie są dziwne, oraz dziwnych atraktorów, które nie są chaotyczne [33].

Przed wprowadzeniem definicji dziwnego atraktora przypomnimy definicję transwersalnego punktu homoklinicznego [68].

Definicja 1.24 Mówimy, że dwie podrozmaitości N, P przestrzeni M przecinają się *transwersalnie* w punkcie x jeśli przestrzenie styczne T_xN i T_xP rozpinają przestrzeń T_xM.

Definicja 1.25 Niech $\mathbf{x}_0$ będzie punktem stałym układu dynamicznego $(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}, \pi)$. Zbiory $W^s(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}\colon \lim_{t\to+\infty} \pi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_0\}$, $W^u(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x}\colon \lim_{t\to-\infty} \pi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x}_0\}$ nazywamy odpowiednio *stabilną* i *niestabilną podrozmaitością* punktu stałego $\mathbf{x}_0$.

Definicja 1.26 Punkt $\mathbf{x}$ nazywamy *punktem homoklinicznym* jeśli leży on na przecięciu stabilnej i niestabilnej podrozmaitości pewnego punktu stałego, tzn.

$$\mathbf{x} \in W^u(\mathbf{x}_0) \cap W^s(\mathbf{x}_0) \tag{1.14}$$

dla punktu stałego $\mathbf{x}_0$ przy czym $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$. Punkt homokliniczny nazywamy *transwersalnym* jeśli $W^u(\mathbf{x}_0)$ i $W^s(\mathbf{x}_0)$ przecinają się transwersalnie w punkcie $\mathbf{x}$.

Istnienie transwersalnych punktów homoklinicznych bardzo komplikuje strukturę trajektorii. W układach dynamicznych posiadających transwersalne punkty homokliniczne występuje zjawisko podkowy Smale'a, co w konsekwencji implikuje istnienie nieskończenie wielu punktów okresowych układu dynamicznego.

Nie istnieje ogólnie przyjęta definicja dziwnego atraktora. W większości używanych definicji dziwny atraktor jest to zbiór niezmienniczy przyciągający trajektorie ze swego otoczenia lub jego części o dodatniej mierze, posiadający skomplikowaną strukturę geometryczną. W niniejszej pracy nie będziemy zainteresowani geometrycznymi własnościami dziwnych atraktorów, lecz raczej zachowaniem dynamicznym układu w jego otoczeniu. Przedstawiona poniżej definicja chaotycznego atraktora zaczerpnięta z pracy [42] abstrahuje od jego geometrycznej struktury opierając się na pewnych własnościach topologicznych.

Definicja 1.27 *Atraktor* jest to niedekomponowalny zbiór A posiadający otoczenie U takie, że dla każdego $\mathbf{x} \in U$ dodatni zbiór graniczny $\omega(\mathbf{x})$ jest zawarty w zbiorze A oraz dodatnia semitrajektoria $\gamma^+(\mathbf{x})$ jest zawarta w zbiorze U. Atraktor nazywamy *chaotycznym* jeśli zawiera transwersalną orbitę homokliniczną.

Stwierdzenie istnienia trajektorii homoklinicznej w rzeczywistym układzie jest stosunkowo trudne. Niezbędne jest zatem określenie własności układów chaotycznych pozwalających odróżnić je od innych układów. Z praktycznego punktu widzenia zachowanie chaotyczne może być określone jako ograniczone, ustalone zachowanie systemu, które nie jest punktem stałym, orbitą okresową ani prawie okresową.

Istnieje kilka cech układów chaotycznych ułatwiających ich rozpoznawanie. Należy do nich widmo częstotliwościowe, które w przypadku układów chaotycznych posiada ciągłe spektrum.

Jedną z najważniejszych cech układów chaotycznych jest tzw. czułość na zmianę warunków początkowych czyli istnienie dodatniego współczynnika Lapunowa. W takim przypadku rozwiązania układu startujące z dwóch dowolnie blisko położonych warunków początkowych najczęściej oddalają się od siebie z eksponencjalną prędkością charakterystyczną dla układu i po pewnym czasie stają się nieskorelowane. Jest to na tyle ważna cecha układów chaotycznych, że w wielu pracach pojawia się ona w definicji atraktora chaotycznego (przykładowo w pracy [33] atraktorem chaotycznym nazywa się atraktor, dla którego typowa orbita na atraktorze posiada dodatni wykładnik Lapunowa). Czułość na zmianę warunków początkowych ma poważne implikacje praktyczne. W praktyce zawsze istnieje pewien błąd pomiaru warunków początkowych układu, i błąd ten rośnie wraz z czasem. Zatem z praktycznego punktu widzenia układy chaotyczne są nieprzewidywalne w długich okresach czasu. Koncepcja wykładników Lapunowa jest na tyle silna, że pozwala odróżniać od siebie układy chaotyczne. Przykładowo jeśli co najmniej dwa wykładniki Lapunowa są dodatnie to układ nazywany jest hiperchaotycznym.

Kolejną własnością układów chaotycznych jest dodatniość entropii topologicznej. W niektórych pracach własność ta jest podawana jako definicja chaosu. Należy jednak zwrócić uwagę, że dodatniość entropii topologicznej jest warunkiem słabszym niż poprzednie. Dodatnia entropia topologiczna nie implikuje istnienia atraktora, zatem w układzie w tą własnością możemy nie obserwować zachowań chaotycznych dla typowej trajektorii.

Inną cechą atraktorów chaotycznych jest istnienie nieskończenie wielu niestabilnych orbit okresowych należących do atraktora. Z tej własności będziemy korzystać w rozdziale 3. przy omawianiu problemu sterowania układów chaotycznych w sensie stabilizacji jednej z orbit okresowych zanurzonych w chaotycznym atraktorze. Kolejną własnością, z której będziemy często korzystać jest gęstość typowej trajektorii na chaotycznym atraktorze, wynikająca z ergodyczności układu. Oznacza ona, że typowa trajektoria odwiedza wszystkie części atraktora i przechodzi nieskończenie wiele razy dowolnie blisko każdego punktu należącego do atraktora.

W niniejszej pracy będziemy rozważać autonomiczne układy dynamiczne. Poniższe twierdzenie mówi o niemożliwości istnienia zachowań chaotycznych w układach dynamicznych podyktowanych autonomicznym równaniem różniczkowym rzędu drugiego.

Twierdzenie 1.11 (Poincarégo-Bendixsona [42, str. 44])
Niepusty zwarty dodatni lub ujemny zbiór graniczny ciągłego układu dynamicznego na płaszczyźnie, który nie zawiera punktów stałych, jest orbitą zamkniętą.

Z uwagi na to, aby mieć możliwość uzyskania zachowań chaotycznych, będziemy rozważać układy rzędu trzeciego.

1.3 Przykładowe układy chaotyczne

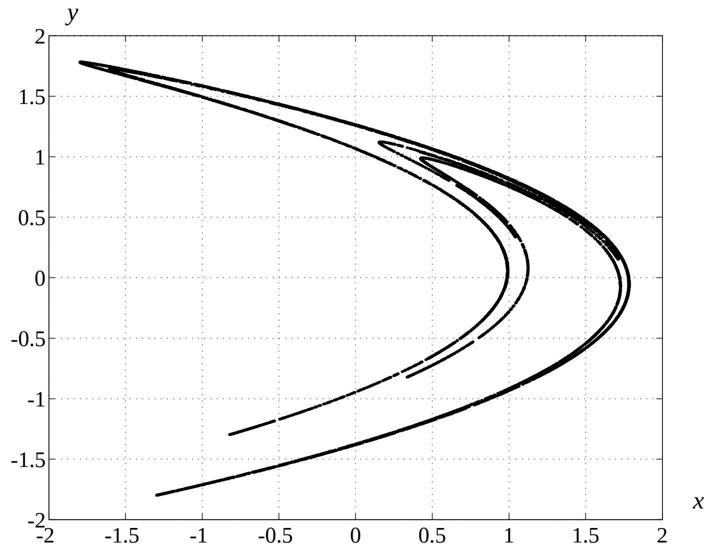
W tym podrozdziale podane zostaną przykłady układów chaotycznych rozważanych w niniejszej pracy.

1.3.1 Odwzorowanie Hénona

Odwzorowanie Hénona podane jest następującym wzorem:

$$\mathbf{h}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - x^2 + by \\ x \end{pmatrix}, \tag{1.15}$$

gdzie a i b są liczbami rzeczywistymi $a = 1.4$, $b = 0.3$.



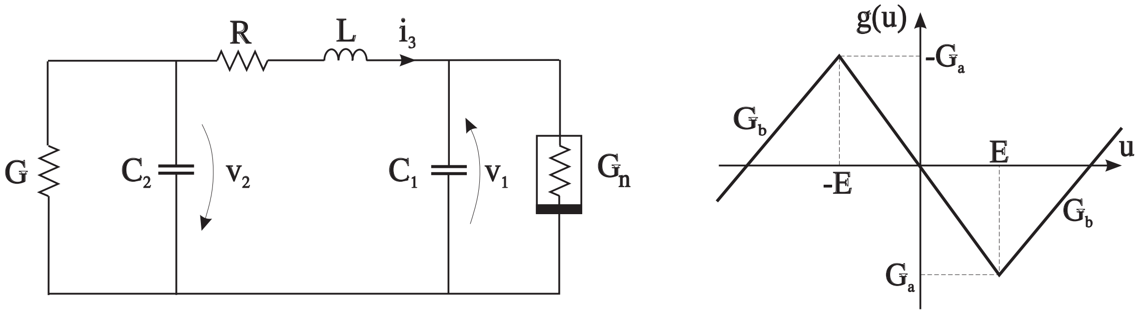
Rysunek 1.1: Trajektoria odwzorowania Hénona

Odwzorowanie powyższe jest przykładem dyskretnego układu dynamicznego drugiego rzędu wykazującego dynamikę chaotyczną [38]. Ze względu na swoją prostotę było często używane jako układ testowy dla metod sterowania układów chaotycznych [23, 60]. Na Rys.1.1 przedstawiona została przykładowa trajektoria układu, składająca się z 10000 punktów.

1.3.2 Obwód Chuy

Ponieważ na mocy Twierdzenia 1.11 ciągły autonomiczny układ dynamiczny rzędu dwa nie może wykazywać dynamiki chaotycznej to, z uwagi na postawiony cel pracy, jesteśmy zmuszeni do rozważania układów co najmniej trzeciego rzędu. Stosunkowo prostym układem rzędu trzeciego o skomplikowanej dynamice jest obwód Chuy, przedstawiony na Rys.1.2a. Składa się on z pięciu elementów liniowych (dwóch pojemności C_1, C_2, indukcyjności L i dwóch rezystancji R, G) oraz jednego elementu nieliniowego oznaczonego jako G_n.

(a) (b)



Rysunek 1.2: Obwód Chuy, (a) struktura połączeń, (b) charakterystyka elementu nieliniowego

Idealny obwód Chuy można rozważać jako autonomiczny układ równań różniczkowych trzeciego rzędu z jedną nieliniowością, opisany następującym równaniem stanu:

$$\begin{aligned} C_1 \frac{dx}{dt} &= -g(x) + z, \\ C_2 \frac{dy}{dt} &= -Gy + z, \\ L \frac{dz}{dt} &= -x - y - Rz, \end{aligned} \tag{1.16}$$

gdzie $g(\cdot)$ jest trójsegmentową funkcją odcinkami liniową (porównaj Rys. 1.2b)

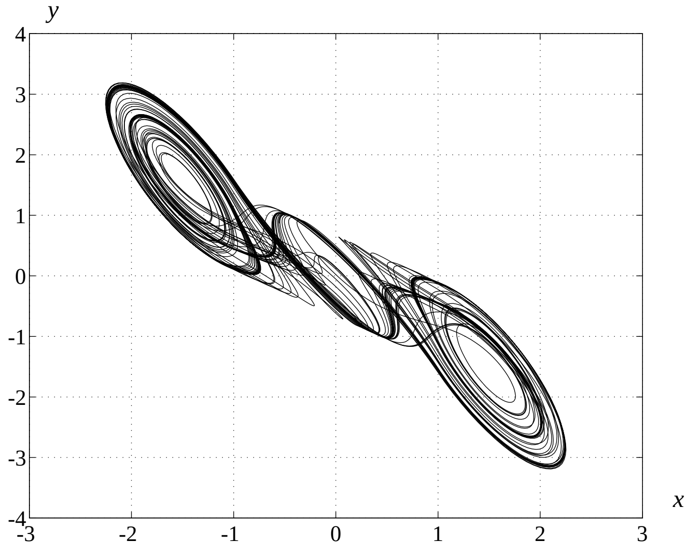
$$g(x) = G_b x + 0.5(G_a - G_b)(|x + E| - |x - E|). \tag{1.17}$$

W układzie tym występuje wiele zjawisk dynamicznych różnego typu. Przy różnych wartościach parametrów obserwowano stabilne punkty stałe, orbity okresowe o różnych długościach, zjawisko podwajania okresu, wiele rodzajów dziwnych atraktorów (np. atraktor typu Röslera, “double-scroll”, “double-hook”) [11]. W niniejszej pracy powyższy układ rozważany jest z następującym zbiorem parametrów:

$$\begin{gathered} C_1 = 1.02, C_2 = -0.632, G = -0.0033, L = -1.02, \\ R = -0.33, G_a = -0.419, G_b = 0.839, E = 1. \end{gathered} \tag{1.18}$$

Dla tych wartości parametrów obserwowano atraktor typu double-scroll. Jego rzut na płaszczyznę x, y został przedstawiony na Rys.1.3.

Ponieważ prawa strona równania (1.16) jest odcinkami liniowa to spełnia globalny warunek Lipschitza. Zatem na podstawie Twierdzenia 1.2 układ (1.16), (1.17) posiada własność jednoznaczności rozwiązań.



Rysunek 1.3: Trajektoria typu double-scroll w obwodzie Chuy — symulacja komputerowa

Przestrzeń stanów $\mathbf{R}^3$ można podzielić na trzy otwarte obszary, w których układ równań różniczkowych opisujących obwód Chuy jest liniowy:

$$\begin{aligned} U_{\pm} &\stackrel{\text{df}}{=} \{\, \mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbf{R}^3 \colon \pm x > 1 \,\}, \\ U_0 &\stackrel{\text{df}}{=} \{\, \mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbf{R}^3 \colon |x| < 1 \,\}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

oddzielone płaszczyznami

$$V_{\pm} \stackrel{\text{df}}{=} \{\, \mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbf{R}^3 \colon x = \pm 1 \,\}. \tag{1.20}$$

Równanie stanu może być zapisane w następującej postaci:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{cases} \mathbf{Ax} & x \in U_0 \\ \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{p}_+) \quad \text{dla} & x \in U_+ \\ \mathbf{B}(\mathbf{x} - \mathbf{p}_-) & x \in U_- \end{cases}, \tag{1.21}$$

gdzie $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są macierzami kwadratowymi wymiaru 3 o współczynnikach rzeczywistych, natomiast $\mathbf{p}_+$ i $\mathbf{p}_-$ są punktami stałymi układu (1.16) należącymi do obszarów U_+ i U_-. W obszarach U_0, U_+, U_- rozwiązanie równania stanu można zapisać jako: $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{B}t}(\mathbf{x} - \mathbf{p}_+) + \mathbf{p}_+$, $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{B}t}(\mathbf{x} - \mathbf{p}_-) + \mathbf{p}_-$.

1.3.3 Sieć komórkowa

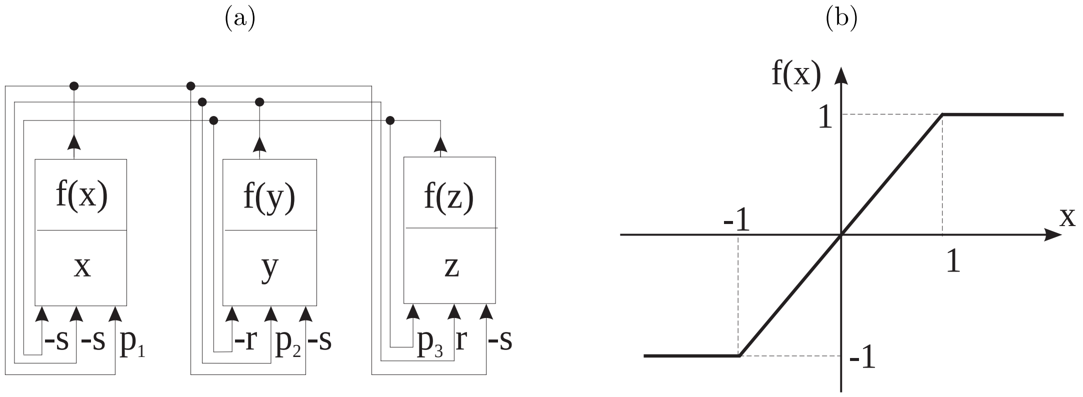
Dynamika neuronowej sieci komórkowej składającej się z N neuronów jest opisana układem N równań różniczkowych

$$\frac{dx_i}{dt} = -x_i + \sum_{j=1}^{N} a_{ij} f(x_j) + \sum_{j=1}^{N} b_{ij} u_j + i_i, \quad i = 1, \ldots, N, \tag{1.22}$$

gdzie $f(\cdot)$ jest charakterystyką nasyceniową (porównaj Rys. 1.4b) opisaną równaniem

$$f(x) = 0.5(|x + 1| - |x - 1|), \tag{1.23}$$

przy czym x_i dla $i = 1, \ldots, N$ są zmiennymi stanu, $f(x_i)$ jest sygnałem wyjściowym i-tej komórki, u_i jej sygnałem wejściowym, a_{ij}, b_{ij} oraz i_i są współczynnikami rzeczywistymi. Zwykle zakłada się, że komórki ustawione są w regularnej sieci. W celu ograniczenia liczby połączeń zakłada się, że każda komórka jest połączona tylko ze swoimi sąsiadami (tzn. $a_{ij} = 0$, $b_{ij} = 0$ jeśli komórki i, j są położone daleko od siebie).

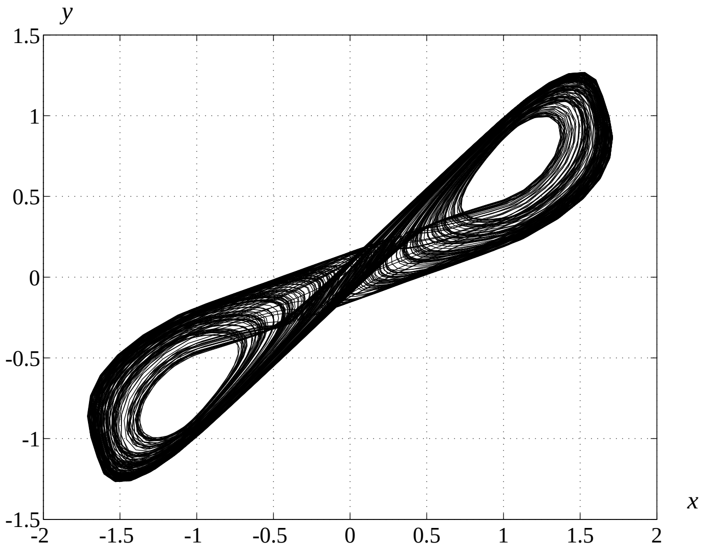


Rysunek 1.4: Trój-komórkowa sieć neuronowa, (a) struktura połączeń, (b) charakterystyka nasyceniowa

W pracy tej rozważana była sieć komórkowa zawierająca trzy komórki, bez wymuszenia zewnętrznego. Schemat połączeń w sieci został przedstawiony na Rys.1.4a. Równania stanu takiego układu można zapisać w postaci:

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -x + p_1 f(x) - s f(y) - s f(z), \\
\frac{dy}{dt} &= -y - s f(x) + p_2 f(y) - r f(z), \\
\frac{dz}{dt} &= -z - s f(x) + r f(y) + p_3 f(z).
\end{aligned}
\tag{1.24}
$$

Powyższy układ równań był rozważany z następującym zbiorem parametrów: $p_1 = 1.25$, $p_2 = 1.1$, $p_3 = 1$, $s = 3.2$, $r = 4.4$. Dla tych wartości parametrów obserwowano zachowanie chaotyczne obwodu [74]. Rzut trajektorii układu na płaszczyznę x, y został przedstawiony na Rys.1.5.



Rysunek 1.5: Rzut trajektorii trój-komórkowej sieci neuronowej na płaszczyznę x, y — symulacja komputerowa

Rozdział 2

Badanie istnienia orbit okresowych

W rozdziale tym zajmiemy się metodami poszukiwania rozwiązań okresowych układów dynamicznych oraz metodami dowodzenia istnienia takich orbit.

Poszukiwanie orbit okresowych jest ważnym problemem w badaniach układów chaotycznych. Z teoretycznego punktu widzenia ilość i położenie orbit okresowych może służyć do charakteryzacji topologicznej struktury atraktora chaotycznego [4, 12, 34, 47, 54, 55]. Orbity okresowe i ich względne długości są niezmiennikiem topologicznym. Istnienie orbit okresowych o konkretnych długościach może zatem służyć do rozróżniania od siebie atraktorów, co może być przydatne do stwierdzenia czy atraktor układu rzeczywistego i jego modelu matematycznego są topologicznie równoważne. Orbity okresowe tworzą "szkielet" atraktora i określają jego przestrzenne ułożenie. Na podstawie liczby orbit okresowych można obliczać również pewne wartości charakterystyczne układu np. jego entropię topologiczną [68]. Położenie orbit okresowych w chaotycznym atraktorze jest również ważne z praktycznego punktu widzenia. Możliwość znalezienia orbit okresowych oraz ich parametrów takich jak wartości własne macierzy Jakobianowej na podstawie danych eksperymentalnych jest niezbędna w celu stabilizacji orbit okresowych za pomocą metod opisanych w następnym rozdziale (porównaj [15, 60]).

W pierwszej części przedstawione zostaną metody poszukiwania orbit okresowych na podstawie ciągu próbek pochodzących z układu. Opisany zostanie również sposób obliczania macierzy Jakobianowych orbit okresowych.

W drugiej części tego rozdziału zajmiemy się metodami analitycznymi dowodu istnienia orbit okresowych. Przedstawione zostaną metody, za pomocą których udowodnimy w sposób ścisły istnienie nieskończenie wielu orbit okresowych dla układu Chuy oraz oszacujemy jego entropię topologiczną dowodząc chaotyczności układu w sensie posiadania dodatniej entropii topologicznej.

2.1 Obliczenia na podstawie danych eksperymentalnych

2.1.1 Poszukiwanie rozwiązań okresowych

Lathrop i Kostelich w pracy [47] zaproponowali technikę wykrywania orbit okresowych zanurzonych w dziwnym atraktorze na podstawie ciągu próbek uzyskanych z eksperymentów. Identyfikacja orbit okresowych jest oparta na poszukiwaniu ε-pseudookresowych orbit, które mogą być zdefiniowane jako części trajektorii $\{\mathbf{x}(\tau) : \tau \in [t_1, t_2]\}$ gdzie $t_1 < t_2$ przy czym spełniony jest warunek $\varrho(\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2)) \leqslant \varepsilon$ oraz istnieje $t \in (t_1, t_2)$ takie, że $\varrho(\mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t)) > \varepsilon$, gdzie $\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ oznacza odległość między punktami $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$. Załóżmy, że dysponujemy ciągiem próbek $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ odpowiadających punktom na pewnej trajektorii układu. Dla każdego punktu $\mathbf{x}_i$ szukamy minimalnej liczby całkowitej $m > 0$ spełniającej warunek $\varrho(\mathbf{x}_{i+m}, \mathbf{x}_i) \leqslant \varepsilon_1$, gdzie ε_1 jest pewną małą dodatnią liczbą rzeczywistą. Jeśli ε_1 jest odpowiednio małe to oczekujemy, że w małym otoczeniu znalezionej ε_1-pseudookresowej orbity znajduje się prawdziwa orbita okresowa. Nie zawsze musi być to prawda. Możliwa jest sytuacja, gdy nie istnieje orbita okresowa pomimo istnienia orbity pseudookresowej dla dowolnie małego ε. Jednak mimo to opisana powyżej metoda heurystyczna daje w wielu przypadkach dobre rezultaty. Postępując w ten sposób znajdziemy wiele orbit pseudookresowych. Wiele z nich może odpowiadać tym samym orbitom okresowym. Musimy zatem mieć jakieś kryterium rozróżniające orbity okresowe. Odległość między orbitami wygodnie jest mierzyć za pomocą metryki[1] Hausdorffa [6], określającej odległość między zbiorami A i B w następujący sposób:

$$\mathrm{dist}(A, B) = \max\left(\sup_{x\in A}\inf_{y\in B}\{\varrho(x,y)\}, \sup_{y\in B}\inf_{x\in A}\{\varrho(x,y)\}\right). \tag{2.1}$$

Jeśli pseudorbity są zdefiniowane jako ciągi próbek

$$\gamma_1 = \{\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_1+1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_1+m_1}\}, \gamma_2 = \{\mathbf{x}_{i_2}, \mathbf{x}_{i_2+1}, \ldots, \mathbf{x}_{i_2+m_2}\}$$

pochodzące z ciągu czasowego $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ to do określenia odległości między nimi można użyć metryki Hausdorffa dla dyskretnych zbiorów punktów

$$\mathrm{dist}(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{i_1\leqslant i\leqslant i_1+m_1}\left\{\min_{i_2\leqslant j\leqslant i_2+m_2}\varrho(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j)\right\}. \tag{2.2}$$

Jeśli odległość między pseudoorbitami jest mniejsza niż ε_2 to uznajemy, że odpowiadają one tej samej orbicie okresowej.

Przedstawiona powyżej metoda poszukiwania orbit okresowych ma kilka minusów. Po pierwsze, rezultaty silnie zależą od doboru wartości ε_1, ε_2 i długości ciągu próbek. Jeśli dysponujemy nieskończenie długim ciągiem próbek pochodzących z trajektorii odwiedzającej wszystkie części atraktora to zmniejszając ε_1 będziemy znajdować coraz więcej orbit okresowych zanurzonych w dziwnym atraktorze. W praktyce jednak dysponujemy ciągiem skończonym. Wybierając zbyt małe ε_1 nie wykryjemy istnienia orbit okresowych, zwłaszcza tych, które leżą w rzadziej odwiedzanych częściach atraktora. Wybór zbyt dużej wartości ε_1 spowoduje, że nie znajdziemy wielu z dłuższych orbit okresowych, które leżą blisko orbit krótszych. Wartość ε_2 nie może być zbyt mała w porównaniu z ε_1 (zwykle $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$), gdyż mogłoby to spowodować, że niektóre z orbit okresowych uznanych za różne będą w rzeczywistości odpowiadać tej samej orbicie okresowej.

Również warunek zatrzymania metody ($\varrho(\mathbf{x}_{i+m}, \mathbf{x}_i) \leqslant \varepsilon_1$) wnosi duże błędy. Warunek ten jest obliczany na podstawie odległości dwóch próbek. Może się jednak zdarzyć, że trajektoria przejdzie blisko punktu początkowego, ale zapamiętane próbki będą stosunkowo daleko. Aby uniknąć tego efektu opracowany został inny warunek zatrzymania metody. Zamiast badania odległości punktu początkowego $\mathbf{x}_i$ od kolejnych próbek $\mathbf{x}_{i+m}$ badaliśmy odległość punktu początkowego od odcinka $\overline{\mathbf{x}_{i+m}\mathbf{x}_{i+m+1}}$. Takie postępowanie powoduje zmniejszenie szybkości obliczeń, ale wyniki są bardziej wiarygodne. Również odległość między pseudoorbitami była obliczana tą metodą:

$$\mathrm{dist}(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{\substack{\mathbf{x}\in\overline{\mathbf{x}_i\mathbf{x}_{i+1}} \\ i_1\leqslant i<i_1+m_1}}\left\{\min_{\substack{\mathbf{y}\in\overline{\mathbf{x}_j\mathbf{x}_{j+1}} \\ i_2\leqslant j<i_2+m_2}}\varrho(\mathbf{x}, \mathbf{y})\right\}. \tag{2.3}$$

Mimo wspomnianych minusów metoda ta nadaje się do poszukiwania orbit okresowych, szczególnie w przypadku, gdy wystarcza nam znalezienie tylko kilku spośród nich. Metoda ta nadaje się zwłaszcza do szukania krótkich orbit. Znalezienie kilku orbit okresowych jest wystarczające do sterowania układami chaotycznymi w oparciu o stabilizację orbit okresowych, co będzie opisane w następnym rozdziale.

[1] Spełnia ona aksjomaty metryki dla zbiorów niepustych, domkniętych i ograniczonych.

Okazuje się, że w wielu przypadkach lepsze rezultaty można uzyskać przy poszukiwaniu orbit okresowych odwzorowania Poincarégo. W tym celu najpierw należy na podstawie ciągu próbek wygenerować trajektorię $\{\xi_i\}_{i=1}^{N}$ odwzorowania Poincarégo a następnie do tej trajektorii zastosować procedurę opisaną powyżej, tzn. dla każdego punktu ξ_i należy znaleźć najmniejsze m spełniające warunek $\varrho(\xi_{i+m}, \xi_i) < \varepsilon_1$. Głównymi korzyściami są znaczne zredukowanie czasu obliczeń oraz uproszczenie algorytmów. Łatwiej również można odróżnić czy dwie orbity okresowe są różne od siebie. Niech $\gamma_1 = (\xi_{i_1}, \xi_{i_1+1}, \ldots, \xi_{i_1+m_1})$ i $\gamma_2 = (\xi_{i_2}, \xi_{i_2+1}, \ldots, \xi_{i_2+m_2})$ będą dwiema znalezionymi orbitami pseudookresowymi. Odległość między nimi można obliczyć jako:

$$\operatorname{dist}(\gamma_1, \gamma_2) = \max_{i_1 \leqslant i < i_1+m_1} \left\{ \min_{i_2 \leqslant j < i_2+m_2} \varrho(\xi_i, \xi_j) \right\}. \tag{2.4}$$

Jeśli odległość ta jest mniejsza niż ε_2 to przyjmujemy, że dwie orbity pseudookresowe odpowiadają tej samej orbicie okresowej. Położenie orbity okresowej szacujemy jako średnią położenia odpowiadających jej orbit pseudookresowych. Szukanie orbit okresowych odwzorowania Poincarégo daje dobre rezultaty, gdy chcemy znaleźć orbity okresowe przecinające wybraną płaszczyznę. W przypadku jednak gdy rozwiązanie okresowe nie przecina tej płaszczyzny nie zostanie ono wykryte. W przypadku układu Chuy można taką modyfikację zastosować bez obawy niewykrycia jakichś orbit okresowych. Wszystkie orbity okresowe muszą przecinać jedną z dwóch płaszczyzn będących granicami obszarów liniowych: $x = 1$, $x = -1$. Dodatkowo równanie stanu jest symetryczne względem początku układu. Wystarczy zatem znaleźć wszystkie orbity okresowe przecinające płaszczyznę $x = 1$. Pozostałe orbity okresowe (tzn. przecinające płaszczyznę $x = -1$) uzyskamy przez symetrię względem początku układu z orbit przecinających płaszczyznę $x = 1$.

2.1.2 Obliczanie macierzy Jakobianowych

Opiszemy obecnie metodę obliczania macierzy Jakobianowej orbity okresowej na podstawie znajomości ciągu próbek pochodzących z układu. Metoda wyznaczania aproksymacji liniowej zachowania układu w otoczeniu orbity okresowej będzie nam potrzebna w następnym rozdziale przy stabilizacji orbit okresowych. Ze względu na prostotę opiszemy tę metodę na przykładzie poszukiwania aproksymacji liniowej odwzorowania Poincarégo w otoczeniu jego punktu stałego. Można tę metodę zastosować bezpośrednio do trajektorii układu ciągłego, ale jest to nieco bardziej skomplikowane i zwykle prowadzi do wyników obarczonych większymi błędami. Oznaczmy przez ξ_F współrzędne punktu stałego na płaszczyźnie transwersalnej odpowiadającego wybranej orbicie okresowej. Poszukujemy liniowej aproksymacji postaci:

$$\mathbf{P}(\xi, p) \approx \xi_F + \mathbf{A}(\xi - \xi_F) + \mathbf{w}(p - p_0), \tag{2.5}$$

gdzie p jest parametrem układu, ξ jest aktualnym punktem przecięcia trajektorii z płaszczyzną transwersalną, $\mathbf{P}(\xi, p)$ jest następnym punktem przecięcia zależnym od aktualnej wartości parametru p. Współczynniki aproksymacji liniowej $\mathbf{A}$ i $\mathbf{w}$ obliczymy na podstawie trajektorii $\{\xi_i\}_{i=1}^{N}$ odwzorowania Poincarégo. Najpierw przeszukujemy trajektorię, aby znaleźć punkty położone blisko punktu ξ_F, tzn. spełniające warunek $\varrho(\xi_i, \xi_F) < \varepsilon_3$. Załóżmy, że znaleźliśmy m takich punktów: ξ_{t_1}, $\xi_{t_2}, \ldots$, ξ_{t_m}. Oznaczmy $\eta_j = (\eta_{j1}, \eta_{j2})^T = \xi_{t_j} - \xi_F$. Punkt ξ_{t_i} przechodzi po jednej iteracji w punkt ξ_{t_i+1}. Oznaczmy $\zeta_j = (\zeta_{j1}, \zeta_{j2})^T = \xi_{t_j+1} - \xi_F$. Aproksymacja macierzy Jakobianowej $\mathbf{A}$ może być wyznaczona metodą minimalnych kwadratów, w której współczynniki macierzy $\mathbf{A}$ dobierane są tak, aby zminimalizować następujące wyrażenie:

$$\sum_{j=1}^{m} ||\mathbf{A}\eta_j - \zeta_j||^2.$$

W ogólnym przypadku można to zrobić obliczając macierz pseudo-odwrotną [67], ale w tym przypadku, gdy odwzorowanie jest dwuwymiarowe łatwo można wypisać równania na macierz Jakobianową:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \sum \eta_{i1}\zeta_{i1} & \sum \eta_{i2}\zeta_{i1} \\ \sum \eta_{i1}\zeta_{i2} & \sum \eta_{i2}\zeta_{i2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum \eta_{i1}^2 & \sum \eta_{i1}\eta_{i2} \\ \sum \eta_{i1}\eta_{i2} & \sum \eta_{i2}^2 \end{bmatrix}^{-1},$$

gdzie sumowanie przebiega po $i = 1, 2, \ldots, m$.

Drugim współczynnikiem liniowej aproksymacji, który chcemy obliczyć jest wektor $\mathbf{w}$. Można to zrobić w następujący sposób. Zmieniamy wartość parametru p o małą wartość δp. Następnie powtarzamy procedurę poszukiwania orbit okresowych odwzorowania Poincarégo i znajdujemy ξ_F' — pozycję punktu stałego dla parametru równego $p + \delta p$. Obliczamy następnie zmianę położenia punktu stałego $\mathbf{g} = (\xi_F' - \xi_F)/\delta p$ i ostatecznie wektor $\mathbf{w}$ z warunku

$$\mathbf{w} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{g} \tag{2.6}$$

Aby sprawdzić, że powyższe równanie jest prawdziwe zapiszmy liniową aproksymację w następującej postaci:

$$\mathbf{P}(\xi) \approx \xi_F + \mathbf{A}(\xi - \xi_F). \tag{2.7}$$

Podstawiając $\xi_F = (p - p_0) \cdot \mathbf{g}$ do równania (2.7) otrzymujemy

$$\mathbf{P}(\xi) \approx \mathbf{A}\xi + (\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{g}(p - p_0). \tag{2.8}$$

Po zróżniczkowaniu (2.5) i (2.8) względem p otrzymujemy równanie (2.6).

Wektor $\mathbf{w}$ można również obliczyć inną metodą. Należy w tym celu śledzić trajektorię układu. W momencie gdy trajektoria wpadnie w małe otoczenie punktu stałego ξ_F zmieniamy parametr p o pewną małą wartość δp. Przy następnej iteracji odwzorowania Poincarégo ustawiamy parametr p na wartość nominalną p_0. W wyniku tego postępowania otrzymamy m punktów η_i leżących w małym otoczeniu punktu stałego i ich obrazy ζ_i. Uśrednione położenie punktów ζ_i będzie przesunięte względem punktu ξ_F na skutek zmiany parametru p o wartość δp. Wektor $\mathbf{w}$ możemy zatem oszacować jako:

$$\mathbf{w} \approx (\zeta - \xi_F)/\delta p, \tag{2.9}$$

gdzie ζ jest uśrednionym położeniem punktów ζ_i.

2.1.3 Przykłady obliczeń

Punkty okresowe odwzorowania Hénona

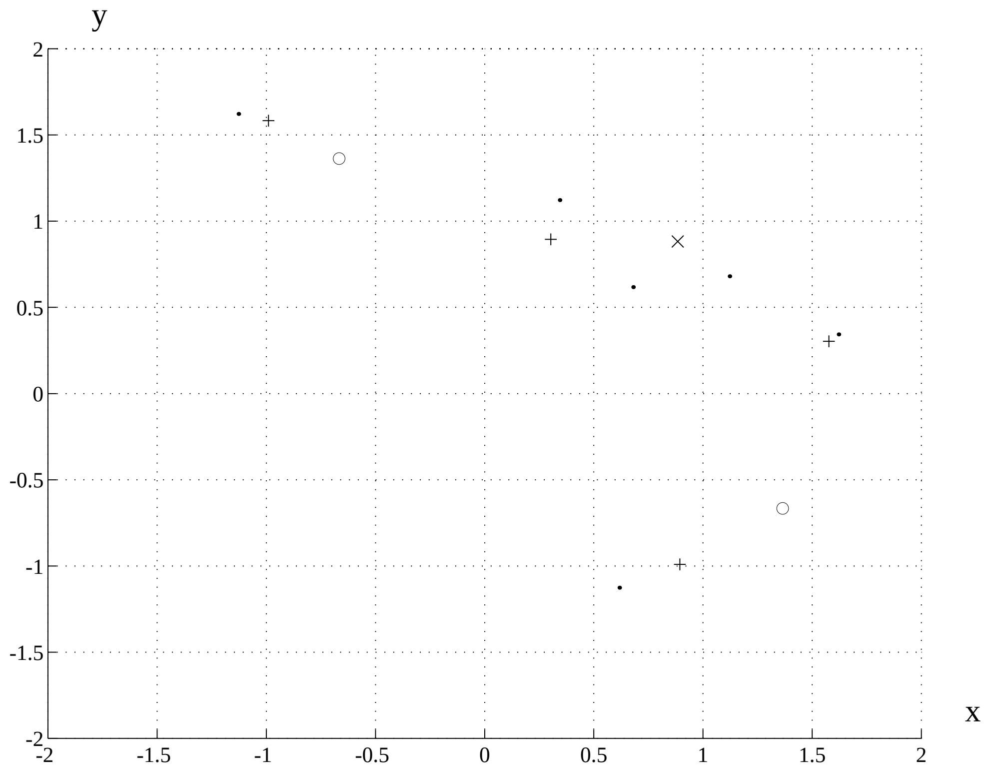
Przedstawimy obecnie zastosowanie metody poszukiwania orbit okresowych na przykładzie odwzorowania Hénona z parametrami $a = 1.4$, $b = 0.3$. Najpierw została zapamiętana trajektoria układu składająca się z 20000 punktów. Następnie została zastosowana opisana powyżej procedura poszukiwania punktów okresowych, ze stałymi $\varepsilon_1 = 0.003$, $\varepsilon_2 = 0.003$. W celu uniezależnienia się od konkretnych wartości zmiennych, każda zmienna została przeskalowana do przedziału $[0, 1]$. Poszukiwaliśmy orbit okresowych o okresie mniejszym od 10. Znalezionych zostało ok. 60 orbit pseudookresowych, z których wybrano 14 różnych. Kilka ze znalezionych orbit okresowych zostało przedstawionych na Rys. 2.1.

W przypadku odwzorowania Hénona łatwo można sprawdzić efektywność poszukiwań, porównując wartości znalezione na podstawie trajektorii układu z wartościami obliczonymi analitycznie. Punkt stały odwzorowania Hénona spełnia równanie:

$$\mathbf{h}((x, y)^T) = (a - x^2 + by, x)^T = (x, y)^T. \tag{2.10}$$

Odwzorowanie Hénona ma zatem dwa punkty stałe określone wzorami:

$$x_{F1} = y_{F1} = \left((b - 1) + \sqrt{(b - 1)^2 + 4a}\right)/2 \approx 0.883896, \tag{2.11}$$



Rysunek 2.1: Wybrane orbity okresowe odwzorowania Hénona. Orbita o okresie 1 jest oznaczona znakiem "×", orbita o okresie 2 znakami "∘", orbita o okresie 4 znakami "+", orbita o okresie 6 znakami "·"

$$x_{F2} = y_{F2} = \left((b-1) - \sqrt{(b-1)^2 + 4a}\right)/2 \approx -1.583896. \tag{2.12}$$

Znaleziony punkt o okresie 1 równy

$$\xi_F = (0.8839, 0.8821)^T \tag{2.13}$$

zgadza się bardzo dobrze z istniejącym punktem stałym $(x_{F1}, y_{F1})^T$. Punkt stały $(x_{F2}, y_{F2})^T$ nie został znaleziony na podstawie danych eksperymentalnych ponieważ nie leży on w pobliżu atraktora. Opisana metoda nie umożliwia znalezienia punktów okresowych nie należących do atraktora. Chaotyczna trajektoria nie przechodzi w pobliżu takich punktów i jest oczywiste, że na podstawie danych eksperymentalnych, czyli punktów położonych w pobliżu atraktora, nie można ich znaleźć.

Punkty o okresie 2 spełniają następujące równanie:

$$\mathbf{h}^2((x,y)^T) = (a - (a - x^2 + by)^2 + bx, a - x^2 + by)^T = (x,y)^T. \tag{2.14}$$

Wyliczając y z równania drugiego i podstawiając do pierwszego otrzymujemy:

$$a - \left(a - x^2 + \frac{b}{1-b}(a - x^2)\right)^2 + bx = x,$$

co można przekształcić do równania:

$$x^4 + 2ax^2 + c^3x + a^2 - ac^2 = 0,$$

gdzie $c = 1 - b$. Powyższy wielomian można przedstawić jako iloczyn dwóch wielomianów stopnia 2:

$$(x^2 + cx - a)(x^2 - cx + c^2 - a) = 0.$$

Pierwszy czynnik odpowiada punktom stałym równania Hénona, natomiast przyrównując drugi do zera otrzymujemy dwa punkty o okresie 2: $x_{1,2} = \left(c \pm \sqrt{4a - 3c^2}\right)/2$, $y_{1,2} = (a - x_{1,2}^2)/c$. Punkty te tworzą orbitę okresową

$$((x_1, y_1)^T, (x_2, y_2)^T) \approx ((1.36612, -0.66612)^T, (-0.66612, 1.36612)^T). \tag{2.15}$$

Znaleziona na podstawie trajektorii orbita o okresie 2 jest równa

$$((1.36506, -0.666155)^T, (-0.666155, 1.36276)^T). \tag{2.16}$$

Stanowi ona dość dobre przybliżenie orbity rzeczywistej.

Macierz Jakobianowa punktu stałego odwzorowania Hénona

Przedstawimy dla przykładu opis obliczeń macierzy Jakobianowej odwzorowania Hénona w punkcie stałym (2.13) wyznaczonym poprzednio z danych eksperymentalnych. W kuli o promieniu $\varepsilon_3 = 0.01$ i środku w punkcie ξ_F znaleźliśmy 100 punktów należących do trajektorii. Na tej podstawie używając procedury opisanej poprzednio znaleźliśmy aproksymację macierzy Jakobianowej $\mathbf{A}$ w punkcie ξ_F oraz jej wartości i wektorów własnych. Zostały one zebrane w Tabeli 2.1. W celu porównania otrzymanych wyników z wartościami dokładnymi obliczono ich wartości rzeczywiste na podstawie następujących wzorów analitycznych:

$$\begin{aligned}
x_F &= y_F = 0.5\left[(b-1) + \sqrt{(b-1)^2 + 4a_0}\right], \\
\mathbf{A} &= \begin{pmatrix} -2x_F & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
\lambda_u &= -x_F - \sqrt{x_F^2 + b}, \\
\lambda_s &= -x_F + \sqrt{x_F^2 + b}, \\
\mathbf{e}_u &= (1 + \lambda_u^2)^{-1/2}(\lambda_u, 1)^T, \\
\mathbf{e}_s &= (1 + \lambda_s^2)^{-1/2}(\lambda_s, 1)^T, \\
\mathbf{f}_u &= (1 + \lambda_u^2)^{1/2}(\lambda_u - \lambda_s)^{-1}(1, -\lambda_s)^T, \\
\mathbf{f}_s &= (1 + \lambda_s^2)^{1/2}(\lambda_s - \lambda_u)(1, -\lambda_u)^T, \\
\mathbf{w} &= (1, 0)^T.
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Z Tabeli 2.1 widać, że wartości wyznaczone na podstawie ciągu próbek są zgodne z dużą dokładnością z wartościami obliczonymi analitycznie.

Przeprowadzono również podobne obliczenia dla 100 punktów leżących wewnątrz kuli o promieniu $\varepsilon_3 = 0.002$. Tym razem wyniki były bliższe wartościom dokładnym, jednak wadą zmniejszania wielkości otoczenia jest konieczność posiadania dużo większego zbioru z danymi eksperymentalnymi. W przypadku układów z większym poziomem szumów nie można zmniejszać wielkości otoczenia w sposób nieograniczony, gdyż prowadzić to może do wyników obarczonych bardzo dużymi błędami.

Następnie został wyznaczony wektor $\mathbf{w}$. Parametr a zmieniono o wartość 0.005. Dla parametru $a = 1.405$ została wygenerowana trajektoria układu i obliczone położenie punktu stałego: $\xi'_F = (0.8852, 0.8831)^T$. Stąd obliczono wektor $\mathbf{g} = (0.4415, 0.5741)^T$ i na podstawie wzoru (2.6) wektor $\mathbf{w} = (1.07, 1.02)^T$. Rozbieżność z wartością rzeczywistą $\mathbf{w} = (1, 0)^T$ jest stosunkowo duża. Wektor $\mathbf{w}$ został również obliczony za pomocą drugiej metody z wzoru (2.9). Tym razem rozbieżność z wartością rzeczywistą jest mniejsza (porównaj Tabela 2.1).

	wyznaczone z eksperymentów	obliczone analitycznie
$\mathbf{A}$	$\begin{pmatrix} -1.79444 & 0.2778 \\ 0.94134 & -0.04633 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1.7678 & 0.3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
λ_u	-1.93305	-1.92374
λ_s	0.09228	0.15595
$\mathbf{e}_u$	$(-0.8948, 0.4465)^T$	$(-0.88728, 0.46123)^T$
$\mathbf{e}_s$	$(0.14567, 0.98933)^T$	$(0.15408, 0.98806)^T$
$\mathbf{g}$	$(0.4415, 0.57411)^T$	$(0.4052, 0.4052)^T$
$\mathbf{w}$	$(1.07, 1.02)^T$	$(1, 0)^T$
$\mathbf{w}'$	$(1.16, 0.54)^T$	$(1, 0)^T$

Tabela 2.1: Macierz Jakobianowa $\mathbf{A}$, niestabilna λ_u i stabilna λ_s wartość własna macierzy Jakobianowej, niestabilny $\mathbf{e}_u$ i stabilny $\mathbf{e}_s$ wektor własny macierzy $\mathbf{A}$, pochodna $\mathbf{g}$ położenia punktu stałego po parametrze a, pochodna $\mathbf{w}$ odwzorowania Hénona po parametrze a obliczona z wzoru (2.6), oraz wektor $\mathbf{w}$ obliczony niezależnie z wzoru (2.9) oznaczony symbolem $\mathbf{w}'$

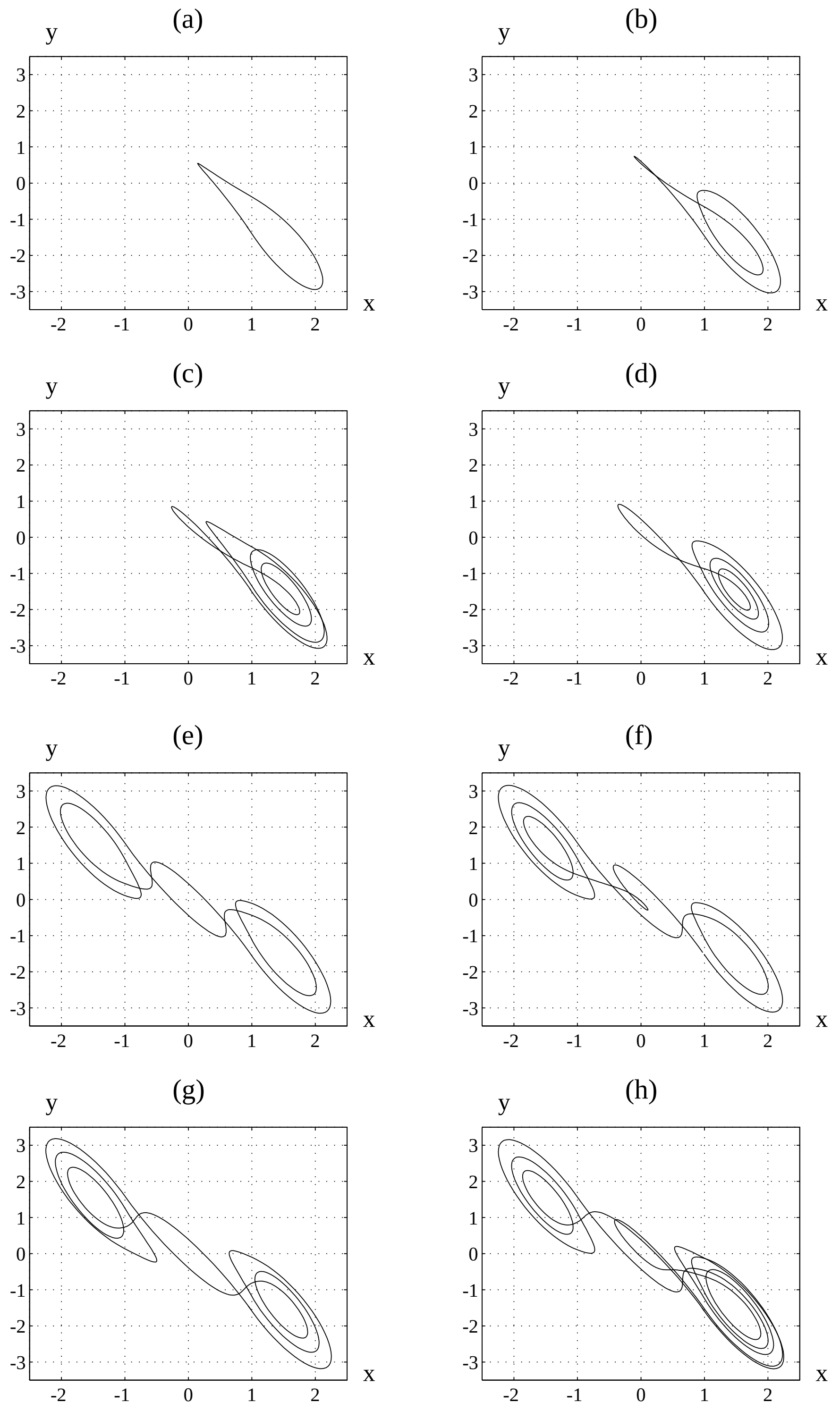
Orbity okresowe układu Chuy

Opiszemy obecnie poszukiwania orbit okresowych w układzie Chuy. Najpierw wygenerowany został zbiór zawierający 500000 punktów położonych na trajektorii układu. Został on uzyskany w wyniku całkowania układu Chuy metodą Rungego-Kutty czwartego rzędu z krokiem całkowania $\tau = 0.1$. Następnie utworzona została trajektoria odwzorowania Poincarégo z płaszczyzną transwersalną $x = 1$, zawierająca ok. 3000 punktów. Procedurę poszukiwania orbit okresowych zastosowaliśmy ze stałymi $\varepsilon_1 = 0.01$, $\varepsilon_2 = 0.01$, przy czym zmienne na przekroju zostały znormalizowane do przedziału $[0, 1]$. Poszukiwane były punkty okresowe o okresie mniejszym od 6. Znalezionych zostało 560 orbit pseudookresowych, przy czym większość z nich odpowiadała orbicie symetrycznej $\gamma_{2,2}$ (porównaj Rys. 2.2e). Po zastosowaniu procedury eliminacji pokrywających się orbit pozostało 14 orbit okresowych, z których 12 zostało przedstawionych na Rys. 2.2.

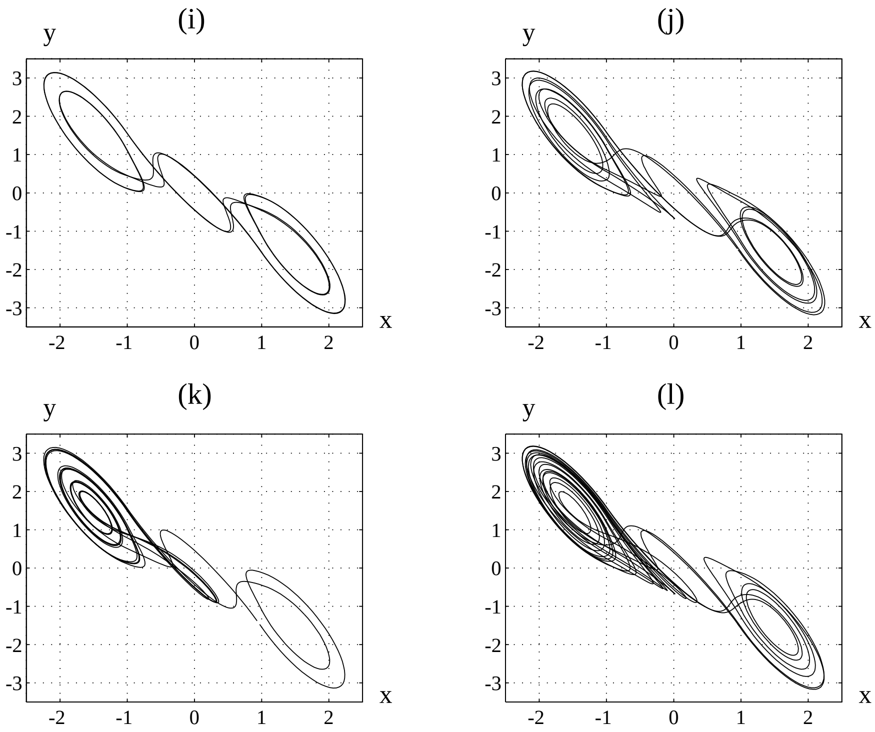
Na Rys. 2.2a–d przedstawiono orbity okresowe zawarte tylko w jednej części atraktora. Warto zwrócić uwagę, że orbity c i d, mimo że mają tę samą liczbę nawinięć wokół punktów stałych układu są różne. Na Rys. 2.2e przedstawiono orbitę okresową symetryczną względem początku układu z dwoma nawinięciami wokół każdego z punktów stałych $\mathbf{p}_+$, $\mathbf{p}_-$. Posiada ona własność słabego odpychania trajektorii, co powoduje, że trajektoria chaotyczna przez długie okresy przebywa w jej otoczeniu i w efekcie znalezienie tej orbity okresowej jest bardzo łatwe. Kolejna symetryczna orbita okresowa jest przedstawiona na Rys. 2.2g. Na Rys. 2.2h–l przedstawiono dłuższe orbity okresowe. Orbita $\gamma_{4,4}$, przedstawiona na Rys. 2.2i powstała przypuszczalnie w wyniku bifurkacji typu *podwajanie okresu*. Leży ona w pobliżu orbity okresowej $\gamma_{2,2}$, lecz ma w przybliżeniu dwa razy większy okres niż orbita $\gamma_{2,2}$. Dla każdej orbity niesymetrycznej istnieje ponadto druga orbita okresowa symetryczna do niej względem początku układu.

Podobne poszukiwania prowadzono przy użyciu większego zbioru danych, zawierającego 2000000 próbek. Wówczas liczba znalezionych orbit okresowych była znacznie większa [55].

Podana metoda poszukiwania orbit okresowych poza możliwością wykorzystania ich do sterowania układów chaotycznych pozwala również na przeprowadzenie charakteryzacji układu. Znalezione orbity okresowe niosą wiele informacji o strukturze atraktora i charakteryzują topologiczne własności układu. Opis taki porównujący atraktory double-scroll, double-hook i atraktor spiralny typu Röslera pod względem istniejących w nich orbit okresowych został przedstawiony w pracy [55]. Istnienie wielu orbit okresowych dowodzi skomplikowanej struktury przestrzennej i może zostać wykorzystane do udowodnienia istnienia chaosu z topologicznego punktu widzenia (porównaj podrozdział 2.2.8).



Rysunek 2.2: Wybrane orbity okresowe układu Chuy (a) $\gamma_{1,0}$, (b) $\gamma_{2,0}$, (c) $\gamma_{4,0}$, (d) $\gamma_{4,0}$, (e) $\gamma_{2,2}$, (f) $\gamma_{2,3}$, (g) $\gamma_{3,3}$, (h) $\gamma_{5,3}$, (i) $\gamma_{4,4}$, (j) $\gamma_{6,8}$, (k) $\gamma_{2,12}$, (l) $\gamma_{6,16}$. Indeksy oznaczają liczbę nawinięć wokół punktów stałych $\mathbf{p}_{+}$, $\mathbf{p}_{-}$



Rysunek 2.2: Wybrane orbity okresowe układu Chuy, c.d.

2.2 Metody analityczne

Kolejną część rozważań poświęcimy metodom ścisłego dowodzenia istnienia orbit okresowych. Pierwsza z przedstawionych metod pozwala na udowodnienie istnienia punktu stałego w przypadku gdy punkt stały posiada macierz Jakobianową o jednej wartości własnej stabilnej i drugiej niestabilnej, zaś druga na udowodnienie istnienia nieskończenie wielu punktów okresowych odwzorowania, w którym jest zanurzona (zdeformowana) podkowa Smale'a. Obie metody składają się z dwóch części. W pierwszej części dowodzone jest twierdzenie o istnieniu punktów okresowych ma podstawie pewnych topologicznych własności rozważanego odwzorowania. Wykorzystywane jest przy tym pojęcie indeksu punktu stałego i jego podstawowe własności. W drugiej części sprawdzane są założenia twierdzenia sformułowanego w części pierwszej. Z uwagi na dużą lecz skończoną ilość obliczeń jaką należy przeprowadzić, w trakcie dowodu może być wykorzystany komputer. Aby uwzględnić błędy obliczeń komputerowych wszystkie operacje przeprowadzane są w arytmetyce interwałowej.

2.2.1 Indeks punktu stałego

Poniżej przedstawimy pojęcie obrotu pola wektorowego [45]. Przypuśćmy, że w każdym punkcie ξ zbioru Ω zawartego w płaszczyźnie $\mathbf{R}^2$ jest zadany wektor $F(\xi)$, tzn. dane jest pole wektorowe $F\colon \Omega \mapsto \mathbf{R}^2$. Zakładamy, że pole wektorowe F jest ciągłe. W szczególności będziemy rozważać pola wektorowe F zadane przez ciągłe odwzorowania płaszczyzny $f\colon U \mapsto \mathbf{R}^2$, zdefiniowane wzorem $F(\xi) = f(\xi) - \xi$.

Jeśli pole wektorowe F nie przyjmuje na krzywej γ wartości zero to można zdefiniować obrót pola wektorowego na tej krzywej.

Definicja 2.1 Przypuśćmy, że ciągłe, niezerowe pole wektorowe F jest zadane na krzywej Jordana γ nie posiadającej samoprzecięć. Przypuśćmy, że krzywa jest zadana w formie parametrycznej równaniem $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t))$, $t \in [a, b]$. Dla każdego $t \in [a, b]$ określmy przez $\theta(t)$ kąt w radianach między wektorami $F(\xi(t))$ i $F(\xi(a))$. Funkcję θ nazywamy *funkcją kątową pola F na krzywej γ. Obrotem pola wektorowego na krzywej γ* nazywamy wielkość

$$\Gamma(F, \gamma) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{1}{2\pi}(\theta(b) - \theta(a)) = \frac{1}{2\pi}\theta(b).$$

W dalszej części będziemy rozważać pola wektorowe na krzywych zamkniętych. Przypuśćmy, że γ jest zamkniętą krzywą Jordana. W myśl twierdzenia Jordana [21] rozcina ona płaszczyznę na dwa obszary. Jeden z nich jest ograniczony i homeomorficzny z kołem. O tym obszarze mówimy, że leży wewnątrz krzywej γ i oznaczamy go przez Ω. Dodatnim kierunkiem obejścia krzywej γ nazywamy taki kierunek, przy którym obszar Ω pozostaje z lewej strony. Jest to obejście przeciwne do ruchu wskazówek zegara. W dalszym ciągu będziemy rozważać krzywe zamknięte z parametryzacjami odpowiadającymi dodatniemu kierunkowi obejścia. W przypadku gdy γ jest krzywą zamkniętą to obrót pola wektorowego jest liczbą całkowitą. Poniższe twierdzenie mówi o wartości obrotu niezerowych pól wektorowych.

Twierdzenie 2.1 ([45, Tw. 3.1, str. 26]) *Przypuśćmy, że pole wektorowe w zamkniętym obszarze $\overline{\Omega}$ nie przyjmuje wartości zero. Wówczas obrót pola wektorowego $\Gamma(F, \gamma)$ na granicy γ obszaru Ω jest równy zeru.*

Jako konkluzję z powyższego twierdzenia otrzymujemy wniosek o istnieniu punktów stałych odwzorowania płaszczyzny.

Wniosek 2.1 *Niech Ω będzie obszarem ograniczonym krzywą Jordana γ. Załóżmy, że ciągłe odwzorowanie f zdefiniowane na zbiorze Ω nie posiada punktów stałych na krzywej γ. Oznaczmy przez F pole wektorowe zdefiniowane wzorem $F(\xi) = \xi - f(\xi)$ Jeśli $\Gamma(F, \gamma) \neq 0$ to istnieje punkt $\xi \in \Omega$ taki, że $f(\xi) = \xi$.*

Dowód: Ponieważ odwzorowanie f nie posiada punktów stałych na krzywej γ to pole wektorowe $F \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathrm{id} - f$ (gdzie id oznacza odwzorowanie identycznościowe) jest niezerowe na krzywej γ, zatem obrót pola wektorowego $\Gamma(F, \gamma)$ jest dobrze zdefiniowany. Jeśliby pole wektorowe F nie przyjmowało wartości zero na obszarze Ω to wtedy w myśl Twierdzenia 2.1 mielibyśmy $\Gamma(F, \gamma) = 0$, co jest sprzeczne z założeniem. Zatem istnieje punkt $\xi \in \Omega$ taki, że $F(\xi) = 0$ co jest równoważne warunkowi $f(\xi) = \xi$. □

Okazuje się, że homotopijne pola wektorowe mają ten sam obrót pola wektorowego. Przed sformułowaniem twierdzenia zdefiniujmy co to znaczy, że dwa pola wektorowe są homotopijne.

Definicja 2.2 Mówimy, że pola wektorowe F_0 i F_1 są homotopijne na ograniczonym zbiorze Ω jeśli istnieje ciągła funkcja $F\colon \Omega \times [0, 1] \mapsto \mathbf{R}^2$ nie przyjmująca wartości zero, taka że $F_0(\xi) = F(\xi, 0)$ oraz $F_1(\xi) = F(\xi, 1)$ dla każdego $\xi \in \Omega$.

Kolejne twierdzenie mówi o homotopijnej niezmienniczości obrotu pola wektorowego.

Twierdzenie 2.2 ([45, Tw. 4.2, str. 34]) *Jeśli pola wektorowe F i G są homotopijne na krzywej γ to ich obroty są równe*

$$\Gamma(F, \gamma) = \Gamma(G, \gamma).$$

Wprowadzimy teraz pojęcie indeksu punktu stałego pary (f, U), będące uogólnieniem pojęcia pola wektorowego. W pracy niniejszej stosujemy terminologię używaną np. w pracy [19], nie pokrywającą się z terminologią używaną w pracy [45], gdzie indeks punktu stałego definiuje się dla konkretnego punktu stałego. Indeks punktu stałego będziemy definiować dla dowolnego odwzorowania ciągłego f i zbioru niekoniecznie zawierającego punkt stały.

Niech $A \subset X$ będzie podzbiorem przestrzeni X. Przez ∂A, $\mathrm{int} A$ oznaczamy brzeg i wnętrze zbioru A.

Niech $\mathcal{G}$ oznacza klasę par (f, U) takich, że $f{:}\, U \mapsto \mathbf{R}^n$ jest ciągłym odwzorowaniem ze zbioru otwartego $U \subset \mathbf{R}^n$ oraz zbiór punktów stałych $\mathrm{Fix} f \stackrel{\mathrm{df}}{=} \{x \in U{:}\, f(x) = x\}$ jest zwarty. Zwykle indeks punktu stałego wprowadza się na gruncie topologii algebraicznej (porównaj np. [19, str. 202], citegranas). My podamy definicję typu aksjomatycznego nie wymagającą tak skomplikowanego aparatu matematycznego.

Definicja 2.3 ([19, str. 207]) *Indeks punktu stałego* jest to funkcja $f{:}\,\mathcal{G} \quad \mathbf{Z}$ przyporządkowująca parom (f, U) liczby całkowite $I(f, U)$ spełniająca następujące warunki:

1. jeśli W jest zbiorem otwartym takim, że $\mathrm{Fix} f \cap U \subset W \subset U$ to $I(f, U) = I(f, W)$, gdzie przez $I(f, W)$ rozumiemy indeks punktu stałego pary $(f|W, W)$.

2. jeśli f jest funkcją stałą to $I(f, U) = 1$ jeśli $f(U) \in U$ oraz $I(f, U) = 0$ jeśli $f(U) \notin U$,

3. jeśli U jest sumą skończonej liczby zbiorów otwartych U_i, $i = 1, \dots, m$, takich, że $U_i \cap U_j \cap \mathrm{Fix} f|U = \emptyset$ dla $i \neq j$ to $I(f, U) = \sum_{i=1}^{m} I(f, U_i)$,

4. jeśli $f{:}\, U \mapsto \mathbf{R}^n$, $f'{:}\, U' \mapsto \mathbf{R}^m$ posiadają zwarte zbiory punktów stałych (tzn. zbiory $\mathrm{Fix} f$ i $\mathrm{Fix} f'$ są zwarte) to $I(f \times f', U \times U') = I(f, U) I(f', U')$, gdzie $f \times f'{:}\, U \times U' \mapsto \mathbf{R}^{n+m}$,

5. jeśli $F{:}\, U \times [0, 1] \mapsto \mathbf{R}^n$ jest homotopią[2] oraz zbiór $\mathrm{Fix} F_t$ jest zwarty dla każdego $t \in [0, 1]$ to $I(F_0, U) = I(F_1, U)$.

Indeks punktu stałego jest zdefiniowany dla bardzo szerokiej klasy zbiorów. W szczególności jest on zdefiniowany dla zbiorów ograniczonych U, które nie posiadają punktow stałych na brzegu, tzn. $\mathrm{Fix} f \cap \partial U = \emptyset$. Dla dowolnego, niekoniecznie otwartego, zbioru $N \subset \mathbf{R}^n$ indeks $I(f, N)$ będzie oznaczał indeks funkcji f względem wnętrza zbioru N: $I(f, N) \stackrel{\mathrm{df}}{=} I(f, \mathrm{int} N)$.

Indeks punktu stałego jest uogólnieniem pojęcia obrotu pola wektorowego, tzn. jeśli Ω jest obszarem ograniczonym krzywą Jordana γ oraz f jest odwzorowaniem płaszczyzny ciągłym na Ω to indeks punktu stałego pary (f, Ω) jest równy obrotowi pola wektorowego $F \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathrm{id} - f$ na krzywej γ.

$$I(f, \Omega) = \Gamma(\mathrm{id} - f, \gamma).$$

Przypomnijmy za [19] dwie własności indeksu punktu stałego, które będą wykorzystane w dalszej części pracy. Pierwsza własność, będąca uogólnieniem Wniosku 2.1, stwierdza istnienie punktu stałego odwzorowania w sytuacji, gdy indeks punktu stałego jest niezerowy. Jest to prosty wniosek z punktu 3. Definicji 2.3.

Uwaga 2.1 *Niech $f{:}\, V \mapsto \mathbf{R}^n$ będzie odwzorowaniem ciągłym, U otwartym zbiorem ograniczonym $\overline{U} \subset V \subset \mathbf{R}^n$. Załóżmy, że $\mathrm{Fix} f \cap \partial U = \emptyset$. Jeśli $I(f, U) \neq 0$ to $\mathrm{Fix} f \cap U \neq \emptyset$,*

[2] Jeśli X, Y są przestrzeniami topologicznymi i $[0, 1]$ oznacza przedział jednostkowy to ciągłe odwzorowanie $F : X \times [0, 1] \mapsto Y$ nazywamy *homotopią* (X w Y). Dla każdego $t \in [0, 1]$ odwzorowanie $F_t : X \mapsto Y$, $F_t(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} F(x, t)$ jest ciągłe.

Własność druga, nazywana homotopijną niezmienniczością indeksu punktu stałego, uogólnia rezultat dla homotopijnych pól wektorowych sformułowany w Twierdzeniu 2.2.

Uwaga 2.2 *Jeśli* $F_\lambda : V \mapsto \mathbf{R}^n$ *jest homotopią,* U *jest zbiorem otwartym i ograniczonym* $\overline{U} \subset V \subset \mathbf{R}^n$ *oraz* $\mathrm{Fix}F_t \cap \partial U = \emptyset$ *dla* $t \in [0,1]$ *to* $I(F_0, U) = I(F_1, U)$.

Opiszemy obecnie jak można obliczyć indeks punktu stałego dla odwzorowania liniowego (porównaj [19, str. 206]). Niech $f : \mathbf{R}^n \mapsto \mathbf{R}^n$ będzie odwzorowaniem liniowym. Zbiór $\mathrm{Fix}f$ jest zwarty wtedy i tylko wtedy gdy $+1$ nie jest wartością własną odwzorowania f. W tym przypadku $\mathbf{0} \in \mathbf{R}^n$ jest jedynym punktem stałym f i indeks odwzorowania f względem dowolnego otwartego otoczenia zera U jest równy

$$I(f, U) = (-1)^\eta, \tag{2.18}$$

gdzie η jest liczbą rzeczywistych wartości własnych λ takich, że $\lambda > 1$.

2.2.2 Metoda dowodu istnienia orbity okresowej

W podrozdziale tym przedstawiona zostanie metoda dowodu istnienia rozwiązań okresowych w ciągłych układach dynamicznych. Metoda jest oparta na dowodzie istnienia punktu okresowego odwzorowania Poincarégo przy użyciu pewnych własności topologicznych tego odwzorowania.

W wielu zastosowaniach (np. przy stabilizacji orbit okresowych) zwykle przyjmuje się istnienie orbity okresowej o ile wskazują na to symulacje komputerowe. Istnieją jednakże przykłady układów, w których nie ma rozwiązań okresowych, natomiast obliczenia komputerowe wskazują na istnienie takowych i co więcej, zwiększenie dokładności obliczeń powoduje, że położenie punktu okresowego wydaje się być obliczone dokładniej [1]. Jest zatem ważne, aby mieć możliwość ścisłego udowodnienia istnienia orbit okresowych.

W przypadku orbit asymptotycznie stabilnych do dowodu istnienia orbity okresowej można zastosować jedną z wersji twierdzenia o punkcie stałym. Jeśli wybierzemy odpowiednio małe otoczenie punktu stałego (homeomorficzne z kulą) na płaszczyźnie transwersalnej, to obraz tego otoczenia przez odwzorowanie Poincarégo będzie zawarty w nim samym, co na podstawie twierdzenia Brouwer'a o punkcie stałym [20] dowodzi istnienia punktu stałego wewnątrz tego otoczenia. Podobnie można postąpić w przypadku gdy orbita okresowa odpycha trajektorie we wszystkich kierunkach. Odpowiada to punktowi stałemu typu "źródło" na płaszczyźnie transwersalnej i twierdzenie o punkcie stałym można zastosować do odwzorowania odwrotnego do odwzorowania Poincarégo.

Najbardziej skomplikowany jest przypadek orbit okresowych typu siodłowego. Dowód taki może być przeprowadzony w oparciu o pojęcie obrotu pola wektorowego [45]. Poniżej zostanie zaproponowana inna metoda dowodu istnienia takich orbit oparta o własności topologiczne odwzorowania. W celu wykorzystania tej metody należy znaleźć odpowiedni czworobok i wykazać, że obrazy jego boków są ułożone w odpowiedni sposób względem niego. Metoda ta jest również ciekawa z powodu dużych możliwości uogólnień. Odpowiednia jej modyfikacja pozwoli na udowodnienie istnienia nieskończenie wielu rozwiązań okresowych.

Niech $N = [-1,1] \times [-1,1]$. Niech $P = [-1,1] \times \mathbf{R}$ będzie najmniejszym pionowym pasem zawierającym N. Oznaczmy $M_- = [-1,1] \times (-\infty, -1)$, $M_+ = [-1,1] \times (1, \infty)$. M_- i M_+ są podzbiorami P leżącymi odpowiednio poniżej i powyżej zbioru N. Niech N_D, N_U, N_L, N_R oznaczają dolną, górną, prawą i lewą krawędź kwadratu N (tzn. $N_D = [-1,1] \times [-1,-1]$, $N_L = [-1,-1] \times [-1,1]$, etc.).

Załóżmy, że f jest ciągłym odwzorowaniem płaszczyzny $\mathbf{R}^2$ w siebie. Poniższe twierdzenie podaje warunki wystarczające, aby wewnątrz zbioru N istniał punkt stały odwzorowania f. Zestaw założeń został przedstawiony graficznie na Rys. 2.4a.

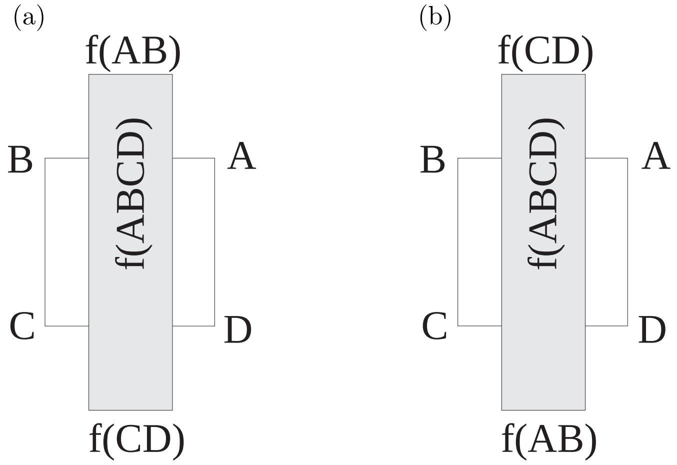
Twierdzenie 2.3 *Jeśli*
(a) obrazy poziomych krawędzi zbioru N są rozłączne ze zbiorem N i leżą w pasie P po przeciwnych stronach względem kwadratu N, tzn. $f(N_D) \subset M_+$ i $f(N_U) \subset M_-$ lub $f(N_D) \subset M_-$ i $f(N_U) \subset M_+$,
(b) $f(N) \subset \mathrm{int}P$
to istnieje punkt stały odwzorowania f należący do zbioru N.

Dowód: W trakcie dowodu będziemy wykorzystywać pojęcie obrotu pola wektorowego względem krzywej ∂N. Dowód twierdzenia przebiega w następujących etapach:

1. Niech g_+, g_- będą odwzorowaniami liniowymi danymi wzorem

$$g_\pm \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & \pm 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Działanie odwzorowań $g_\pm$ na kwadrat N jest przedstawione na rys. 2.3. Twierdzenie udowodnimy



Rysunek 2.3: Kwadrat N oraz jego obraz przez (a) odwzorowanie g_+, (b) odwzorowanie g_-

dla przypadku $f(N_D) \subset M_-$ i $f(N_U) \subset M_+$. W tym przypadku wybieramy odwzorowanie $g = g_+$ (w przypadku przeciwnym, gdy $f(N_D) \subset M_+$ i $f(N_U) \subset M_-$ dowód przebiega analogicznie, z wyjątkiem tego, że $g = g_-$). Niech F będzie homotopią łączącą f z g daną wzorem

$$F_\lambda(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} F(\lambda, x) = (1-\lambda)f(x) + \lambda g(x).$$

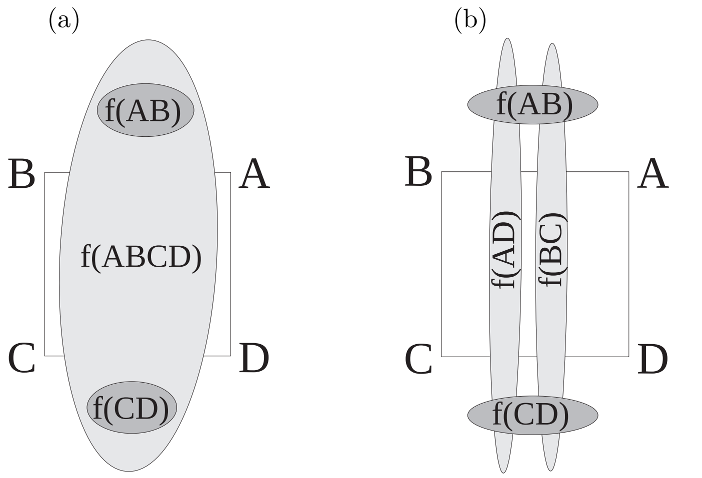
2. Wykażemy, że odwzorowanie F_λ nie posiada punktów stałych na brzegu kwadratu N (dla $\lambda \in [0,1]$). Homotopia F jest skonstruowana w ten sposób, że własności (a) i (b) z założenia twierdzenia są spełnione dla każdego F_λ ($\lambda \in [0,1]$), tzn. $F_\lambda(N_D) \subset M_-$, $F_\lambda(N_U) \subset M_+$, $F_\lambda(N) \subset \mathrm{int}P$.

Wynika to z faktu, że $f(N_D), g(N_D) \subset M_-$, $f(N_U), g(N_U) \subset M_+$, $f(N), g(N) \subset \mathrm{int}P$, zbiory M_-, M_+, $\mathrm{int}P$ są wypukłe oraz z definicji odwzorowania F_λ punkt $F_\lambda(x)$ należy do odcinka $\overline{f(x)g(x)}$. Ponieważ $F_\lambda(N_D) \subset M_-$ i $M_- \cap N = \emptyset$ to F_λ nie posiada punktów stałych należących do krawędzi N_D. Podobnie pokazuje się, że F_λ nie ma punktów stałych na krawędzi N_U. Ponieważ $F_\lambda(N) \subset \mathrm{int}P$ oraz $(N_L \cup N_R) \cap \mathrm{int}P = \emptyset$ to odwzorowanie F_λ nie posiada punktów stałych na pionowych krawędziach kwadratu N. Podsumowując F_λ nie posiada punktów stałych na brzegu N, a zatem obrót pola wektorowego $\mathrm{id} - F_\lambda$ na brzegu zbioru N jest dobrze określony dla każdego $\lambda \in [0,1]$ (porównaj Definicja 2.1) i pola wektorowe $\mathrm{id} - f$, $\mathrm{id} - g$ są homotopijne na krzywej ∂N w sensie Definicji 2.2.

3. Z homotopijności pól wektorowych $\mathrm{id} - f$, $\mathrm{id} - g$ wynika na podstawie Twierdzenia 2.2, że ich obroty są równe $\Gamma(\mathrm{id} - f, \partial N) = \Gamma(\mathrm{id} - g, \partial N)$. Ponieważ obrót pola wektorowego $\mathrm{id} - g$ na krzywej ∂N jest równy -1 (porównaj wzór (2.18)) to również $\Gamma(\mathrm{id} - f, \partial N) = -1$. W przypadku odwzorowania g_- jego obrót jest równy $+1$, a więc również jest niezerowy.

4. Na podstawie Wniosku 2.1 z niezerowości obrotu pola wektorowego $\mathrm{id} - f$ wynika istnienie punktu stałego odwzorowania f w zbiorze N. □

Uwaga 2.3 *Powyższe twierdzenie zostało sformułowane dla szczególnego położenia zbioru N. Można je również zastosować w przypadku, gdy zbiór N jest dowolnym równoległobokiem po afinicznej zamianie zmiennych.*



Rysunek 2.4: Zestaw założeń które należy sprawdzić w (a) Twierdzeniu 2.3, (b) Twierdzeniu 2.4

Jeśli odwzorowanie f jest injekcją to założenia poprzedniego twierdzenia można osłabić. Wykorzystamy w tym celu następujący lemat.

Lemat 2.1 *Niech $N \subset \mathbf{R}^2$ będzie zbiorem, którego brzeg jest homeomorficzny z okręgiem, zaś P zbiorem wypukłym. Załóżmy, że $f\colon N \mapsto \mathbf{R}^2$ jest injekcją. Jeśli $f(\partial N) \subset P$ to $f(N) \subset P$.*

Dowód: Na mocy twierdzenia Jordana [21] obraz brzegu N rozcina płaszczyznę na dwie składowe i jest ich wspólnym ograniczeniem. Ponieważ odwzorowanie injektywne f jest określone na całym zbiorze N to jego obraz musi być zawarty w składowej ograniczonej. Wiemy, że obraz brzegu zbioru N jest zawarty w zbiorze wypukłym P. Zatem obraz całego zbioru N jest zawarty w zbiorze P.

□

Twierdzenie 2.4 *Załóżmy, że odwzorowanie f zacieśnione do N jest injektywne. Jeśli spełniony jest warunek (a) z poprzedniego twierdzenia oraz*
(b') $f(N_L), f(N_R) \subset \mathrm{int}P$
to istnieje punkt stały odwzorowania f należący do N.

Dowód: Zastosujemy Lemat 2.1 do zbioru N, którego brzeg jest homeomorficzny z okręgiem i zbioru wypukłego $\mathrm{int}P$. Na podstawie warunku (a) i (b') mamy $f(N_D), f(N_U) \subset \mathrm{int}P$ i $f(N_L), f(N_R) \subset \mathrm{int}P$ czyli $f(\partial N) \subset \mathrm{int}P$. Na podstawie Lematu 2.1 mamy $f(N) \subset \mathrm{int}P$ i możemy zastosować Twierdzenie 2.3. □

Aby zastosować powyższe twierdzenia do układów ciągłych opisanych równaniami różniczkowymi należy wybrać płaszczyznę transwersalną do potoku i udowodnić istnienie punktu okresowego odwzorowania Poincarégo. Przy stosowaniu obu twierdzeń należy udowodnić, że odwzorowanie Poincarégo jest ciągłe na kwadracie N.

Twierdzenie 2.4 może być zastosowane w przypadku układów równań różniczkowych z jednoznacznością rozwiązań. Przykładami takich układów są układy z prawą stroną spełniającą globalny warunek Lipschitza, czyli przykładowo obwód Chuy i trójkomórkowa sieć neuronowa rozważana w niniejszej pracy. Jednoznaczność rozwiązań pociąga za sobą różnowartościowość odwzorowania Poincarégo.

2.2.3 Metoda dowodu istnienia nieskończenie wielu orbit okresowych

Obecnie zajmiemy się problemem istnienia nieskończenie wielu rozwiązań okresowych w układach dynamicznych. Zaprezentowane zostanie twierdzenie o istnieniu punktów okresowych odwzorowań, homotopijnych ze zdeformowaną podkową Smale'a. Ten wynik zostanie następnie wykorzystany do dowodu istnienia nieskończenie wielu orbit okresowych dla obwodu Chuy, oraz do oszacowania od dołu entropii topologicznej odwzorowania Poincarégo, skojarzonego z tym układem dynamicznym.

Zgliczyński w pracy [73] udowodnił istnienie nieskończenie wielu orbit okresowych dla odwzorowań równoważnych poprzez odpowiednią homotopię (tj. homotopię nie zmieniającą indeksu punktu stałego dla dowolnej iteracji odwzorowania) z podkową Smale'a. Przedstawimy modyfikację tej metody dla odwzorowań, w których jest zanurzona zdeformowana podkowa.

Podkowa Smale'a

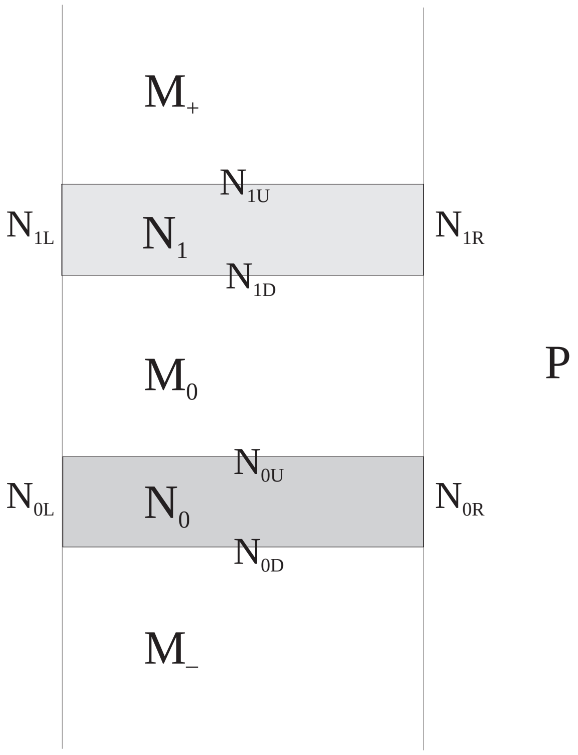
Niech $N_0 = [-1,1]\times[-1,-0.5]$, $N_1 = [-1,1]\times[0.5,1]$. Niech $P = [-1,1]\times\mathbf{R}$ będzie najmniejszym pionowym pasem zawierającym N_0 i N_1. Oznaczmy $M_- = [-1,1]\times(-\infty,-1)$, $M_0 = [-1,1]\times(-0.5,0.5)$, $M_+ = [-1,1]\times(1,\infty)$. M_-, M_0 i M_+ są podzbiorami P leżącymi odpowiednio poniżej, pomiędzy i powyżej zbiorów N_0, N_1. Niech N_{0D}, N_{0U} oznaczają dolny i górny poziomy bok, N_{0L}, N_{0R} lewy i prawy pionowy bok prostokąta N_0, i podobnie niech N_{1D}, N_{1U}, N_{1L}, N_{1R} oznaczają dolny, górny, lewy i prawy bok czworokąta N_1 (tzn. $N_{0D} = [-1,1]\times[-1,-1]$, $N_{0L} = [-1,-1]\times[-1,-0.5]$, etc.). Zbiory zdefiniowane powyżej zostały przedstawione na Rys. 2.5.

Podkowa Smale'a jest odwzorowaniem liniowym na N_0 i N_1 zdefiniowanym przez:

$$h_s(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}, \pm 5\left(y+\frac{3}{4}\right)\right) & \text{dla } (x,y)\in N_0, \\ \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, \pm 5\left(y-\frac{3}{4}\right)\right) & \text{dla } (x,y)\in N_1. \end{cases} \tag{2.20}$$

Obrazy prostokątów N_0 i N_1 przez odwzorowanie h_s zostały przedstawione na Rys. 2.6a. Łatwo można zauważyć, że obrazy poziomych krawędzi prostokątów N_0 i N_1 są położone powyżej zbioru N_1 lub poniżej zbioru N_0. Wybór znaku przy współczynnikach zmienia położenie tych obrazów w następujący sposób: jeśli współczynnik w pierwszym równaniu wynosi $+5$ to $h_s(N_{0D})\subset M_-$, $h_s(N_{0U})\subset M_+$, jeśli natomiast współczynnik ten jest równy -5 to $h_s(N_{0D})\subset M_+$, $h_s(N_{0U})\subset M_-$. Podobnie znak współczynnika w drugim równaniu zmienia położenie zbiorów $h_s(N_{1D})$ i $h_s(N_{1U})$.

Korzystając z liniowości podkowy Smale'a łatwo można podać liczbę punktów okresowych podkowy Smale'a o danym okresie oraz obliczyć odpowiednie indeksy punktu stałego. Wybierzmy liczbę naturalną n, oraz ciąg $(a_0,\ldots,a_{n-1})$ o wyrazach ze zbioru dwuelementowego $\{0,1\}$. Ponieważ podkowa Smale'a jest liniowa na N_0 i N_1 oraz każdy z obrazów $h_s(N_0)$, $h_s(N_1)$ pokrywa w pionie zbiory N_0 i N_1, to oczywiste jest, że istnieje punkt okresowy x odwzorowania h_s taki, że $h_s^i(x)\in N_{a_i}$ dla $i = 0, 1,\ldots, n-1$ oraz $h_s^n(x) = x$. Macierz Jakobianowa odwzorowania h_s^n w



Rysunek 2.5: Położenie zbiorów N_0, N_1, M_-, M_0 i M_+ na płaszczyźnie

punkcie x jest równa

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0.25^n & 0 \\ 0 & \pm 5^n \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

$+1$ nie jest wartością własną macierzy $\mathbf{J}$. Zatem istnieje otoczenie U punktu x nie zawierające innych poza x punktów stałych odwzorowania h_s^n. Na podstawie wzoru (2.18) indeks punktu stałego pary (h^n, U) jest niezerowy. Ponieważ różne ciągi prowadzą do różnych punktów stałych odwzorowania h_s^n a ciągów takich jest 2^n to wnioskujemy stąd, że istnieje 2^n różnych punktów stałych odwzorowania h_s^n.

Zdeformowana podkowa Smale'a

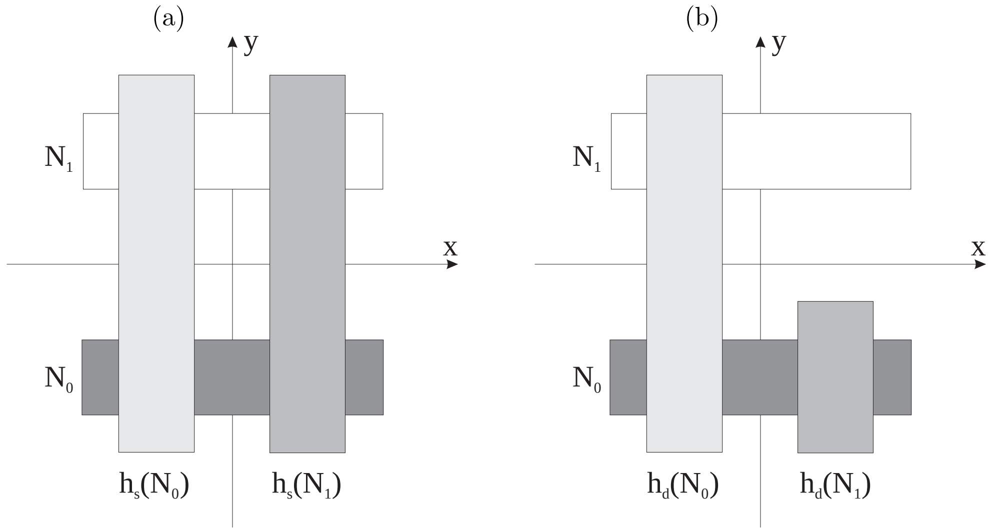
Zdeformowana podkowa Smale'a h_d również jest odwzorowaniem liniowym na N_0 i N_1. Dla $(x,y) \in N_0$ definicja h_d jest taka sama jak definicja oryginalnej podkowy Smale'a, natomiast dla $(x,y) \in N_1$ działanie rozciągające jest słabsze i obraz prostokąta N_1 pokrywa w pionie tylko zbiór N_0:

$$h_d(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{1}{4}x - \frac{1}{2}, \pm 5\left(y + \frac{3}{4}\right)\right) & \text{dla } (x,y) \in N_0, \\ \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}, \pm 2\left(y - \frac{3}{4}\right) - \frac{3}{4}\right) & \text{dla } (x,y) \in N_1. \end{cases} \tag{2.22}$$

Obrazy N_0 i N_1 przez odwzorowanie h_d są przedstawione na Rys. 2.6b.

Z definicji zdeformowanej podkowy Smale'a wynika, że jeśli $x \in N_1$ to $h_d(x) \notin N_1$. Zatem nie istnieją punkty okresowe odwzorowania h_d odpowiadające ciągom zawierającym podciąg $(1,1)$.

Podobnie jak w przypadku oryginalnej podkowy Smale'a można wykazać, że dla dowolnego punktu okresowego x o okresie n zdeformowanej podkowy Smale'a indeks punktu stałego odwzorowania h_d^n względem wystarczająco małego otoczenia punktu x jest niezerowy.



Rysunek 2.6: Zbiory N_0, N_1 i ich obrazy pod działaniem (a) podkowy Smale'a, (b) zdeformowanej podkowy Smale'a

Ciekawą własnością zdeformowanej podkowy Smale'a jest to, że w jej drugiej iteracji zanurzona jest oryginalna podkowa.

Twierdzenia o istnieniu nieskończenie wielu punktów okresowych

Niech $f\colon N_0 \cup N_1 \mapsto \mathbf{R}^2$ będzie ciągłą funkcją. Następujące twierdzenie stwierdza istnienie nieskończenie wielu orbit okresowych dla odwzorowań f, w których jest zanurzona podkowa Smale'a.

Twierdzenie 2.5 ([73]) *Jeśli $f(N_0), f(N_1) \subset \mathrm{int}P$, poziome krawędzie zbiorów N_0, N_1 są odwzorowane przez f poza zbiór $N_0 \cup N_1$ (w ten sposób, że jeden ze zbiorów $f(N_{0D})$, $f(N_{0U})$ jest zawarty w M_+, podczas gdy drugi jest zawarty w M_-, i podobnie dla poziomych krawędzi prostokąta N_1) to dla dowolnego skończonego ciągu $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \{0,1\}^n$ istnieje punkt stały x odwzorowania f^n spełniający*

$$f^i(x) \in N_{a_i} \quad dla \quad i = 0, \ldots, n-1.$$

Dowód jest oparty na konstrukcji homotopii F_λ pomiędzy odwzorowaniem f i podkową Smale'a. Homotopia jest skonstrułowana w ten sposób, że indeks punktu stałego pary $(F_\lambda^n, N_a^\lambda)$ nie zależy od wartości $\lambda \in [0,1]$ dla dowolnego naturalnego n i dla dowolnego ciągu $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \{0,1\}^n$, gdzie

$$N_a^\lambda \stackrel{\mathrm{df}}{=} N_{a_0} \cap F_\lambda^{-1}(N_{a_1}) \cap \cdots \cap F_\lambda^{-(n-1)}(N_{a_{n-1}}). \tag{2.23}$$

Stąd można otrzymać istnienie co najmniej tylu punktów okresowych co dla podkowy Smale'a (2^n punktów stałych odwzorowania h^n). Więcej szczegółów dotyczących tej metody jest podanych w dowodzie następnego twierdzenia.

Następne twierdzenie porusza przypadek odwzorowań, w których zanurzona jest zdeformowana podkowa Smale'a. Ze zbioru ciągów n-elementowych o wyrazach ze zbioru dwuelementowego $\{0,1\}$ wybierzmy te podciągi, które po utworzeniu cyklu nie zawierają podciągu $(1,1)$

$$T_n = \{\, (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \{0,1\}^n \colon (a_j, a_{(j+1) \bmod n}) \neq (1,1) \text{ dla } 0 \leqslant j < n \,\}. \tag{2.24}$$

Ponieważ zdeformowana podkowa Smale'a nie posiada punktów okresowych odpowiadających ciągom nie należącym do T_n, to musimy osłabić tezę następnego twierdzenia.

Twierdzenie 2.6 *Jeśli $f(N_0), f(N_1) \subset \mathrm{int}P$, poziome krawędzie N_0, N_1 są odwzorowane przez f w ten sposób, że jeden ze zbiorów $f(N_{0D})$, $f(N_{0U})$ jest zawarty w M_+, podczas gdy drugi jest zawarty w M_-, oraz jeden ze zbiorów $f(N_{1D})$, $f(N_{1U})$ jest zawarty w M_-, zaś drugi w $M_0 \cup N_1 \cup M_+$ to dla każdego skończonego ciągu $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in T_n$ istnieje punkt x taki, że*

$$f^i(x) \in N_{a_i} \quad dla \quad i = 0, \ldots, n-1 \quad oraz \quad f^n(x) = x. \tag{2.25}$$

Dowód: Przedstawiony zostanie jedynie szkic dowodu, ponieważ jest on oparty na dowodzie Twierdzenia 2.5, podanym w pracy [73]. Niech h_d oznacza zdeformowaną podkowę Smale'a. Niech

$$F_\lambda(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} F(\lambda, x) = (1-\lambda)f(x) + \lambda h_d(x).$$

F jest ciągłą homotopią łączącą f z h_d. Homotopia F jest skonstruowana w ten sposób, że założenia twierdzenia są spełnione dla każdej funkcji F_λ ($\lambda \in [0,1]$). Wybierzmy liczbę naturalną n i ciąg $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in T_n$. Niech N_a^λ będzie zdefiniowane wzorem (2.23). Łatwo widać (porównaj str. 40), że istnieje punkt stały x odwzorowania h_d^n spełniający warunki $h_d^i(x) \in N_{a_i}$ dla $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Dowód, że dla ciągu a istnieje punkt x należący do zbioru N_a^λ spełniający warunki (2.25) składa się z kilku kroków. W tym przypadku obrót pola wektorowego jest pojęciem niewystarczająco ogólnym. Ponieważ chcemy udowodnić istnienie punktów stałych wewnątrz zbiorów N_a^λ, które niekoniecznie muszą być ograniczone krzywą Jordana to musimy wykorzystywać ogólniejsze pojęcie indeksu punktu stałego.

Najpierw trzeba udowodnić, że odwzorowanie F_λ^n nie ma punktów stałych na brzegu zbioru N_a^λ. N tej podstawie można wywnioskować, że indeks punktu stałego $I(F_\lambda^n, N_a^\lambda)$ odwzorowania F_λ^n względem zbioru N_a^λ jest dobrze określony (porównaj Definicja 2.3).

Z niezmienniczości indeksu punktu stałego względem homotopii (Uwaga 2.1) otrzymujemy

$$I(f^n, N_a^0) = I(F_0^n, N_a^0) = I(F_1^n, N_a^1) = I(h_d^n, N_a^1).$$

Ponieważ indeks punktu stałego odwzorowania h_d^n względem N_a^1 jest niezerowy to indeks $I(f^n, N_a^0)$ jest również różny od zera, i stąd na podstawie Uwagi 2.2 istnieje punkt x spełniający warunki (2.25). □

Powyższe twierdzenie zostało sformułowane dla konkretnego położenia zbiorów N_0 i N_1 na płaszczyźnie. Łatwo można zastosować je gdy zbiory N_0 i N_1 są położone inaczej dokonując odpowiedniej zamiany zmiennych.

Za pomocą Twierdzenia 2.6 można wykazać istnienie nieskończenie wielu orbit okresowych dowodząc, że obraz pewnych części zbiorów N_0, N_1 jest zawarty w odpowiednich podzbiorach pasa P, do czego może zostać wykorzystany komputer. Najbardziej czasochłonnym założeniem Twierdzenia 2.6 jest założenie pierwsze, tzn. sprawdzenie, że $f(N_0), f(N_1) \subset P$. Jeśli f jest injekcją to można osłabić to założenie korzystając z następującego lematu:

Lemat 2.2 *Niech f będzie injekcją oraz N_0, N_1, P będą zdefiniowane na początku tego podrozdziału. Jeśli $f(\partial N_0), f(\partial N_1) \subset P$ to również $f(N_0), f(N_1) \subset P$.*

Dowód: Stosujemy dwukrotnie Lemat 2.1. □

2.2.4 Arytmetyka przedziałowa

W celu zastosowania twierdzeń o istnieniu rozwiązań okresowych, podanych w poprzednich podrozdziałach, należy w każdym konkretnym przypadku sprawdzić zachodzenie założeń tych twierdzeń, co sprowadza się do sprawdzenia, czy obrazy krawędzi zbiorów N, N_0, N_1 są zawarte w odpowiednich podzbiorach pasa P. Przy dowodzie tych założeń może być wykorzystany komputer. Rozważany zbiór pokrywany jest dużą ilością prostokątów. Obliczany jest następnie obraz każdego z tych prostokątów przez odwzorowanie Poincarégo i sprawdzany jest warunek czy obraz ten jest odpowiednio położony na płaszczyźnie. W celu uwzględnienia błędów obliczeniowych zastosowana została arytmetyka przedziałowa [2]. Idea tego typu obliczeń polega na przeprowadzaniu wszystkich operacji arytmetycznych na przedziałach. Wynikiem operacji jest przedział zawierający wszystkie możliwe wyniki operacji. Przykładowo $[a,b]+[c,d]$ jest to przedział zawierający zbiór: $\{x : x = x_1 + x_2, x_1 \in [a,b], x_2 \in [c,d]\}$. W trakcie obliczeń został wykorzystany zestaw procedur do arytmetyki interwałowej w języku C++ sporządzony przez Olafa Knüppela z Uniwersytetu Technicznego Hamburg-Harburg. Jako kompilator języka C++ wybraliśmy kompilator gnu C++ na komputerze Sun SPARC 2.

W celu sprawdzania wyników obliczeń opracowany został drugi pakiet procedur do arytmetyki interwałowej. Został on zaimplementowany w języku Borland–Pascal i uruchomiony na komputerze PC–486.

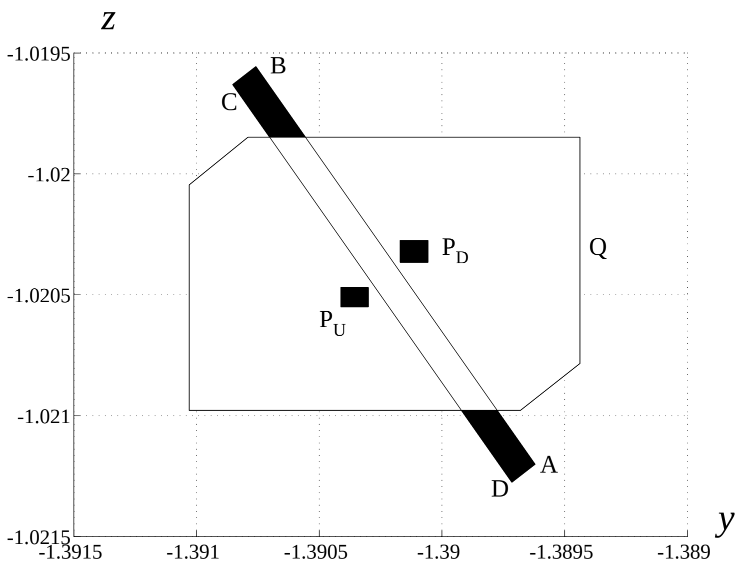
2.2.5 Dowód istnienia orbity okresowej w obwodzie Chuy

Zaprezentowana w podrozdziale 2.2.2 metoda dowodu istnienia rozwiązań okresowych została zastosowana do dowodu istnienia orbity okresowej w układzie Chuy. Istnienie orbity okresowej może wydawać się problemem nieciekawym dla układu, w którym w symulacjach obserwuje się zachowania chaotyczne. Symulacje jednak mogą prowadzić do mylnych wniosków. W pracy [1] podany jest przykład układu, w którym obserwowane zachowania chaotyczne są efektem błędów zaokrągleń popełnianych w czasie symulacji. Ponieważ a priori nie wiemy, czy układ Chuy jest chaotyczny, to nie wiemy również, czy istnieje jakakolwiek orbita okresowa. Ponadto za pomocą tej metody można znaleźć w sposób ścisły położenie orbity okresowej z bardzo dużą dokładnością. Metodę można zastosować dla równoległoboku N dowolnie przeskalowanego (jedynym ograniczeniem jest precyzja obliczeń komputerowych) i nie powoduje to zwiększenia ilości obliczeń. Można w ten sposób po odpowiednim zmniejszeniu równoległoboku N określić z bardzo dużą dokładnością położenie orbity okresowej, co może być przydatne przy późniejszej jej stabilizacji. Idealny obwód Chuy jest opisany równaniami (1.16) i (1.17). Jest on rozważany z następującym zbiorem parametrów: $C_1 = 1$, $C_2 = -0.632$, $G = -0.0033$, $L = -1.02$, $R = -0.33$, $G_a = -0.419$, $G_b = 0.839$, $E = 1$.

Jako płaszczyznę transwersalną wybierzmy płaszczyznę $\Sigma = V_+ = \{(x,y,z)^T : x = 1\}$. Niech

$$A = (-1.38962066, -1.02120083), \quad B = (-1.39075810, -1.01955576),$$
$$C = (-1.39085249, -1.01962986), \quad D = (-1.38971505, -1.02127492),$$

będą punktami należącymi do płaszczyzny Σ. Niech N będzie równoległobokiem $\overline{ABCD}$, zaś P — pasem wyznaczonym przez proste równoległe AD i BC. Położenie równoległoboku N na płaszczyźnie transwersalnej przedstawiono na Rys.2.7. Przy wyznaczaniu obrazów punktów przez odwzorowanie Poincarégo używano rozwiązań dokładnych typu e^{At} w obszarach liniowych $U_\pm$, U_0 zamiast całkowania numerycznego. Było to możliwe ponieważ układ Chuy jest odcinkami liniowy. Szczegóły obliczeń komputerowych zostały przedstawione w podrozdziale 2.2.7. Wykazano, że obraz odcinka $N_U = \overline{AB}$ przez odwzorowanie Poincarégo jest zawarty w zbiorze P_U, oraz że obraz odcinka $N_D = \overline{CD}$ jest zawarty w zbiorze P_D. Ponadto wykazano, że obraz równoległoboku N jest zawarty w zbiorze Q. W celu udowodnienia powyższych własności odcinki $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ zostały pokryte prostokątami (10000 prostokątów w każdym pokryciu) i udowodniono przy użyciu arytmetyki przedziałowej, że obraz każdego z pokrywających prostokątów zawarty jest odpowiednio w zbiorze P_U lub P_D. Wnętrze równoległoboku N pokryto przy użyciu ok. 60000 kwadratów o boku 0.0000002 i wykazano, że ich obrazy są zawarte w zbiorze R. Tak duża liczba zbiorów wynika z charakteru punktu stałego, który dość silnie odpycha trajektorie wzdłuż podrozmaitości niestabilnej.



Rysunek 2.7: Równoległobok $N = \overline{ABCD}$, $N_U = \overline{AB}$, $N_D = \overline{CD}$, zbiór Q zawierający obraz $f(N)$, zbiór P_U zawierający $f(N_U)$, zbiór P_D zawierający $f(N_D)$

Wartości własne macierzy Jakobianowej odwzorowania Poincarégo w punkcie stałym wynoszą w przybliżeniu $\lambda_s = -0.00517$, $\lambda_u = -2.58$. Z uwagi na dużą ilość pokrywających kwadratów długość obliczeń jest znaczna.

Zatem na mocy Twierdzenia 2.3 istnieje wewnątrz równoległoboku $ABCD$ punkt stały odwzorowania Poincarégo. Ten punkt stały odpowiada orbicie okresowej układu (1.16), (1.17).

Przy wykorzystaniu Twierdzenia 2.4 można znacznie zredukować ilość obliczeń. Nie jest wówczas konieczne wykazywanie, że obraz całego czworokąta leży w pasie P, lecz tylko, że na całym czworokącie jest określone ciągłe odwzorowanie Poincarégo. W tym przypadku należy dodatkowo wykazać, że obrazy "pionowych" krawędzi $N_L = \overline{BC}$ i $N_R = \overline{DA}$ równoległoboku N są również są zawarte w pasie P. W tym przypadku korzystniej jest wybrać czworokąt N nieco szerszy. Dzięki zwiększeniu szerokości czworokąta N do pokrycia boków $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ wystarczyło po 600 prostokątów. Boki $\overline{BC}$ i $\overline{DA}$ były pokryte za pomocą 800 prostokątów każdy. Wykazano również istnienie ciągłego odwzorowania Poincarégo określonego na N. Do udowodnienia tego wystarczyło pokrycie czworokąta N składające się z czterech kwadratów o boku 0.002. Czas obliczeń przy użyciu tego samego komputera był ok. 50 razy krótszy.

2.2.6 Dowód istnienia nieskończenie wielu orbit okresowych w obwodzie Chuy

Opisane w podrozdziale 2.2.3 twierdzenia o istnieniu nieskończenie wielu rozwiązań okresowych zostały zastosowane do odwzorowania Poincarégo związanego z obwodem Chuy.

W przypadku obwodów odcinkami liniowych naturalnym jest wybór jako płaszczyzny transwersalnej jednej z płaszczyzn oddzielających obszary liniowe przestrzeni stanów. Wybierzmy płaszczyznę transwersalną $\Sigma = V_+ = \{(x, y, z)^T : x = 1\}$ i odwzorowanie Poincarégo

$$\mathbf{P}(\mathbf{x}) = \mathbf{P}_\Sigma(\mathbf{x}) = \varphi_{\tau(\mathbf{x})}(\mathbf{x}), \tag{2.26}$$

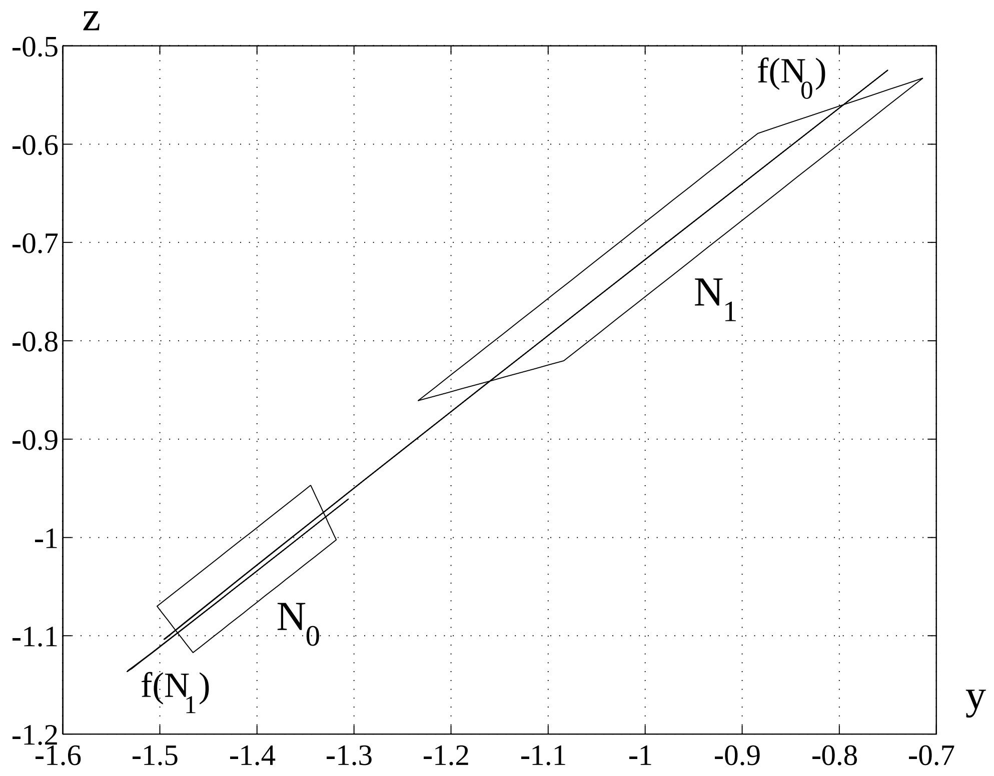
zdefiniowane tak, jak w równaniu (1.12). Jeśli płaszczyzna Σ jest transwersalna do potoku w punktach $\mathbf{x}$ i $\mathbf{P}(\mathbf{x})$ to istnienie ciągłego odwzorowania Poincarégo określonego w pewnym otwartym otoczeniu $\mathbf{x}$ jest zagwarantowane (porównaj Twierdzenie 1.10). Udowodnimy istnienie nieskończenie wielu punktów okresowych odwzorowania $\mathbf{P}$. Punkty okresowe $\mathbf{P}$ odpowiadają rozwiązaniom okresowym układu (1.16).

Na płaszczyźnie Σ wybierzmy punkty $A_1, \ldots A_8$ leżące na dwóch prostych równoległych:

$$A_1 \approx (-0.7138, -0.5328), A_2 \approx (-0.8838, -0.5889),$$
$$A_3 \approx (-1.2338, -0.8609), A_4 \approx (-1.0838, -0.8203),$$
$$A_5 \approx (-1.3182, -1.0024), A_6 \approx (-1.3445, -0.9469),$$
$$A_7 \approx (-1.5029, -1.0699), A_8 \approx (-1.4659, -1.1172).$$

Jako zbiory N_1 i N_0 wybieramy czworokąty $A_1A_2A_3A_4$ i $A_5A_6A_7A_8$. "Poziome" krawędzie N_0 i N_1 są zdefiniowane w następujący sposób: $N_{1U} = \overline{A_1A_2}$, $N_{1D} = \overline{A_3A_4}$, $N_{0U} = \overline{A_5A_6}$, $N_{0D} = \overline{A_7A_8}$ (porównaj Rys. 2.9). Niech P będzie pasem wyznaczonym przez proste A_1A_8 i A_2A_7. Niech M_-, M_0, M_+ będą częściami pasa P pozostałymi po usunięciu z niego zbiorów N_0 i N_1, tzn. M_- jest nieograniczoną częścią pasa P ograniczoną z jednej strony przez odcinek $\overline{A_7A_8}$, M_0 jest czworokątem $A_3A_4A_6A_5$ zaś M_+ jest częścią pasa P ograniczoną z jednej strony odcinkiem $\overline{A_1A_2}$.

W symulacjach komputerowych równanie (1.16) było całkowane przy użyciu metody Rungego-Kutty czwartego rzędu z krokiem całkowania $\tau = 0.1$. Zaobserwowana została zdeformowana pod-



Rysunek 2.8: Zbiory N_0, N_1 i ich obrazy pod działaniem odwzorowania Poincarégo $\mathbf{P}$ — symulacja komputerowa

kowa Smale'a zanurzona w odwzorowaniu Poincarégo $\mathbf{P}$. Na Rys.2.8 zostały pokazane czworoboki N_0, N_1 i ich obrazy przez odwzorowanie Poincarégo. Rysunek ten przypomina zdeformowaną podkowę Smale'a z Rys.2.6b. Obserwacja taka nie dowodzi istnienia orbit okresowych. Kolejnym krokiem jest udowodnienie tego w sposób ścisły. W wyniku zastosowania arytmetyki przedziałowej zostało udowodnione następujące twierdzenie:

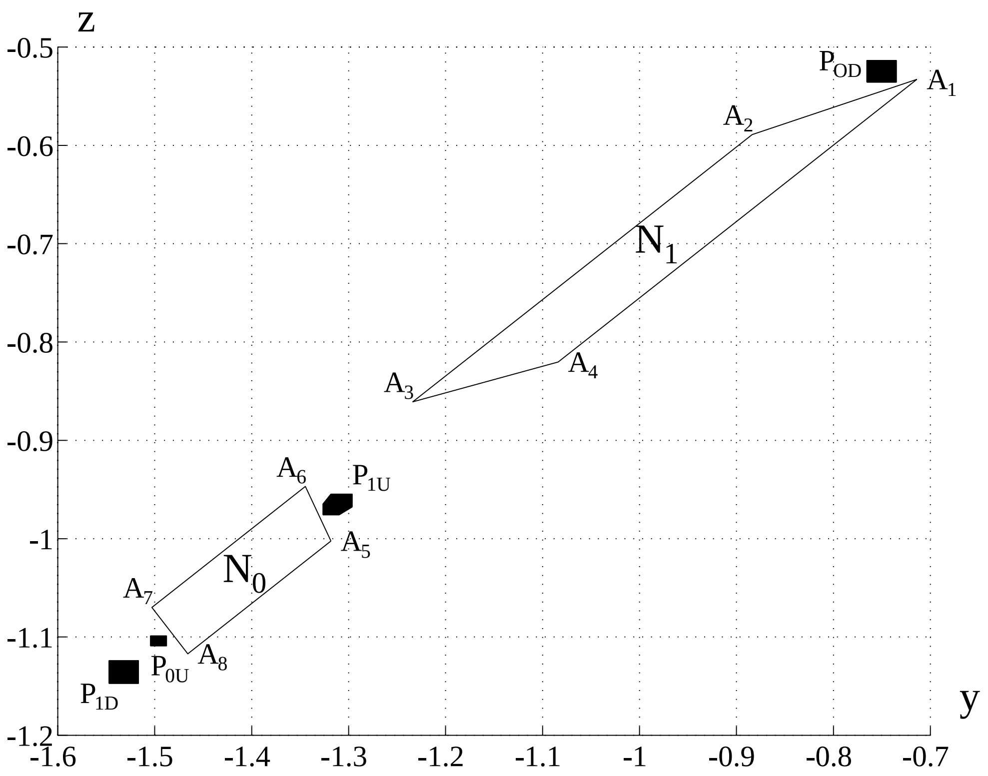
Twierdzenie 2.7 *Dla wszystkich wartości parametrów należących do wystarczająco małego otoczenia punktu* $(C_1, C_2, G, L, R, G_a, G_b, E) = (1.02, -0.632, -0.0033, -1.02, -0.33, -0.419, 0.839, 1)$

1. *istnieje ciągłe odwzorowanie Poincarégo określone na* $N_0 \cup N_1$*,*

2. *obrazy* $\mathbf{P}(N_{0L})$*,* $\mathbf{P}(N_{0R})$*,* $\mathbf{P}(N_{1L})$*,* $\mathbf{P}(N_{1R})$ *"pionowych" krawędzi czworokątów* N_0*,* N_1 *leżą wewnątrz pasa* P*,*

3. *obrazy "poziomych" boków* N_0*,* N_1 *spełniają następujące warunki:* $\mathbf{P}(N_{0D}) \subset M_+$*,* $\mathbf{P}(N_{0U}) \subset M_-$*,* $\mathbf{P}(N_{1D}) \subset M_-$*,* $\mathbf{P}(N_{1U}) \subset M_0$*.*

Dowód: Aby uwzględnić błędy obliczeniowe używaliśmy arytmetyki przedziałowej. Głównym problemem w naszym przypadku jest obliczanie obrazu prostokąta (iloczyn kartezjański dwóch przedziałów) przez odwzorowanie Poincarégo. Szczegółowy opis procedury służącej do obliczania



Rysunek 2.9: Obrazy "poziomych" krawędzi czworokątów N_0 i N_1 przez odwzorowanie Poincarégo, $N_{1U} = \overline{A_1A_2}$, $N_{1D} = \overline{A_3A_4}$, $N_{0U} = \overline{A_5A_6}$, $N_{0D} = \overline{A_7A_8}$, $\mathbf{P}(N_{1U}) \subset P_{1U}$, $\mathbf{P}(N_{1D}) \subset P_{1D}$, $\mathbf{P}(N_{0U}) \subset P_{0U}$, $\mathbf{P}(N_{0D}) \subset P_{0D}$

obrazu dowolnego prostokąta przez odwzorowanie Poincarégo zostanie przedstawiony w następnym podrozdziale. Gdy procedura ta była gotowa mogliśmy sprawdzić trzy wymagane warunki:

1. W pierwszym kroku udowodniliśmy istnienie ciągłego odwzorowania Poincarégo na $N_0 \cup N_1$. Zbiór N_0 został pokryty przez 186326 prostokątów. Zbiór N_1 został pokryty przez 137 prostokątów.

2. Boki N_{1L}, N_{1R} zostały pokryte za pomocą 2000 prostokątów każdy. Boki N_{0L}, N_{0R} zostały pokryte za pomocą 5000 prostokątów. Udowodniliśmy, że obrazy wszystkich tych prostokątów są zawarte w pasie P.

3. Krawędzie N_{1U}, N_{1D} zostały pokryte odpowiednio przez 1500 i 2000 prostokątów. Krawędzie N_{0U}, N_{0D} zostały pokryte przez 3000 i 20000 prostokątów. Udowodniliśmy, że $\mathbf{P}(N_{1U})$, $\mathbf{P}(N_{1D})$, $\mathbf{P}(N_{0U})$, $\mathbf{P}(N_{0D})$ są zawarte odpowiednio w zbiorach P_{1U}, P_{1D}, P_{0U}, P_{0D} pokazanych na Rys. 2.9.

Większe liczby w przypadku zbioru N_0 spowodowane są przez silniejsze rozciąganie odwzorowania $\mathbf{P}$ na zbiorze N_0, szczególnie w pobliżu krawędzi N_{0D}. Oszacowano, że w tym obszarze wartość bezwzględna niestabilnej wartości własnej macierzy Jakobianowej odwzorowania Poincarégo jest większa niż 30. $\square$

Na podstawie Twierdzeń 2.6 i 2.7 oraz Lematu 2.2 otrzymujemy następujący wniosek:

Twierdzenie 2.8 *Dla wszystkich wartości parametrów należących do wystarczająco małego otoczenia punktu* $(C_1, C_2, G, L, R, G_a, G_b, E) = (1.02, -0.632, -0.0033, -1.02, -0.33, -0.419, 0.839, 1)$ *odwzorowanie Poincarégo* $\mathbf{P}$ *posiada nieskończenie wiele punktów okresowych, ściślej mówiąc dla każdego skończonego ciągu* n*-elementowego* $a = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in T_n$ *istnieje punkt* $\mathbf{x}$ *taki, że*

$$\mathbf{P}^i(\mathbf{x}) \in N_{a_i} \quad \textit{dla} \quad i = 0, \ldots, n-1 \quad \textit{oraz} \quad \mathbf{P}^n(\mathbf{x}) = \mathbf{x}. \tag{2.27}$$

Dowód: Na podstawie części pierwszej Twierdzenia 2.7 odwzorowanie Poincarégo jest ciągłe na zbiorze $N_0 \cup N_1$. Ponieważ układ Chuy posiada własność jednoznaczności rozwiązań to odwzorowanie Poincarégo jest injektywne. Na podstawie części drugiej i trzeciej Twierdzenia 2.7 obrazy brzegów zbiorów N_0 i N_1 przez odwzorowanie $\mathbf{P}$ są zawarte we wnętrzu pasa P. Zatem na podstawie Lematu 2.2 spełnione są warunki $\mathbf{P}(N_0)$, $\mathbf{P}(N_1) \subset P$.

Na podstawie części trzeciej Twierdzenia 2.7 obrazy "poziomych" boków czworokątów leżą w pasie P poza N_0, N_1, w szczególności spełnione są warunki $\mathbf{P}(N_{0D}) \subset M_+$, $\mathbf{P}(N_{0U}) \subset M_-$, $\mathbf{P}(N_{1D}) \subset M_-$, $\mathbf{P}(N_{1U}) \subset M_0$.

Spełnione są zatem założenia Twierdzenia 2.6 i dowód jest zakończony ponieważ teza Twierdzenia 2.6 pokrywa się z tezą obecnie dowodzonego twierdzenia. $\square$

2.2.7 Szczegóły obliczeń komputerowych

Opiszemy obecnie szczegółowo procedurę służącą do obliczania obrazu zbioru przez odwzorowanie Poincarégo. Parametrem wejściowym procedury jest prostokąt, którego obraz chcemy obliczyć. Procedura wyznacza prostokąt zawierający obraz wejściowego prostokąta. Procedura ta wykorzystuje arytmetykę interwałową. Wszystkie błędy popełniane przez komputer w czasie kolejnych działań są uwzględniane i wpływają na zwiększenie wymiaru wyjściowego prostokąta. W celu uniknięcia nieporozumień zmienne typu przedział (a także wektory i macierze, których elementami są przedziały) będziemy oznaczać przez dodanie daszka ˆ nad zmienną. Jeśli $\hat{x}$ jest przedziałem to przez $\inf(\hat{x})$ i $\sup(\hat{x})$ będziemy oznaczać odpowiednio dolny i górny koniec przedziału $\hat{x}$. Aby uprościć zapis prostokąt $[y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$ należący do płaszczyzny Σ będziemy zapisywać w postaci wektorowej jako $\hat{\mathbf{x}} = (1, [y_1, y_2], [z_1, z_2])^T$.

Obliczenia wstępne

Przed przystąpieniem do obliczania wartości odwzorowania Poincarégo należy wyznaczyć kilka wielkości, istotnych dla dalszych obliczeń.

1. Inicjalizacja macierzy $\hat{\mathbf{A}}_0$, $\hat{\mathbf{A}}_1$ i wektorów $\hat{\mathbf{v}}_0$, $\hat{\mathbf{v}}_1$.

$$\hat{\mathbf{A}}_0 = \begin{pmatrix} -G_a/C_1 & 0 & 1/C_1 \\ 0 & -G/C_2 & 1/C_2 \\ -1/L & -1/L & -R/L \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{v}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{2.28a}$$

$$\hat{\mathbf{A}}_1 = \begin{pmatrix} -G_b/C_1 & 0 & 1/C_1 \\ 0 & -G/C_2 & 1/C_2 \\ -1/L & -1/L & -R/L \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{pmatrix} (G_a - G_b)/C_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.28b}$$

2. Obliczenie współczynników równania charakterystycznego macierzy $\hat{\mathbf{A}}_0$, $\hat{\mathbf{A}}_1$.

3. Obliczenie pierwiastków równania charakterystycznego. Każda z macierzy $\hat{\mathbf{A}}_0$, $\hat{\mathbf{A}}_1$ posiada jeden pierwiastek rzeczywisty oraz parę pierwiastków zespolonych. Załóżmy, że równanie charakterystyczne ma postać:

$$\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_2\lambda + a_1 = 0. \tag{2.29}$$

Wartości własne można obliczyć za pomocą wzorów Cardano, ale z uwagi na prowadzenie obliczeń w arytmetyce interwałowej łatwiej jest używać następującej metody:

- Wyznaczenie pierwiastka rzeczywistego $\hat{\lambda}$ zmodyfikowaną metodą bisekcji. Oznaczmy

  $$\hat{f}(\lambda) := \lambda^3 + \hat{a}_3\lambda^2 + \hat{a}_2\lambda + \hat{a}_1,$$

  gdzie λ jest liczbą rzeczywistą, natomiast $\hat{a}_i$ są przedziałami zawierającymi odpowiednie współczynniki równania charakterystycznego (2.29). Warto zwrócić uwagę, że $\hat{f}(\lambda)$ jest przedziałem, jako że powstaje w wyniku operacji na przedziałach. Pierwiastek rzeczywisty $\hat{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2]$ można wyznaczyć za pomocą procedury przedstawionej poniżej. Rzeczywista liczba dodatnia ε_0, pojawiająca się w procedurze, określa interesującą nas dokładność obliczeń. Jej zmniejszenie powoduje zmniejszenie długości wyznaczonego przedziału, do którego należy pierwiastek λ oraz wydłużenie czasu obliczeń.

  begin
  {Znalezienie λ_1 takiego, że $\hat{f}(\lambda_1) \subset (-\infty, 0)$}
  $\lambda_1 = -1$;
  while $\sup(\hat{f}(\lambda_1)) \geqslant 0$ **do** $\lambda_1 = 2 * \lambda_1$;
  {Znalezienie λ_2 takiego, że $\hat{f}(\lambda_2) \subset (0, \infty)$}
  $\lambda_2 = 1$;
  while $\inf(\hat{f}(\lambda_2)) \leqslant 0$ **do** $\lambda_2 = 2 * \lambda_2$;
  {Znalezienie maksymalnego λ_1 takiego, że $\hat{f}(\lambda_1) \subset (-\infty, 0)$}
  $\lambda_{\min} = \lambda_1$;
  $\lambda_{\max} = \lambda_2$;
  while $(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) > \varepsilon_0$ **do begin**
  $\lambda_{\text{med}} = (\lambda_{\max} + \lambda_{\min})/2$;
  if $(\sup(\hat{f}(\lambda_{\text{med}})) < 0)$
  then $\lambda_{\min} = \lambda_{\text{med}}$
  else $\lambda_{\max} = \lambda_{\text{med}}$;
  end;
  $\lambda_1 = \lambda_{\min}$;

{Znalezienie minimalnego λ_2 takiego, że $\hat{f}(\lambda_2) \subset (0, \infty)$}
$\lambda_{\min} = \lambda_1$;
$\lambda_{\max} = \lambda_2$;
while $(\lambda_{\max} - \lambda_{\min}) > \varepsilon_0$ **do begin**
$\lambda_{\text{med}} = (\lambda_{\max} + \lambda_{\min})/2$;
if $(\inf(\hat{f}(\lambda_{\text{med}})) > 0)$
then $\lambda_{\max} = \lambda_{\text{med}}$
else $\lambda_{\min} = \lambda_{\text{med}}$;
end;
$\lambda_2 = \lambda_{\max}$;
$\hat{\lambda} = [\lambda_1, \lambda_2]$;
end;

- Obliczenie pozostałych pierwiastków $\hat{\alpha} \pm i\hat{\beta}$ z wzorów

$$\hat{\alpha} = -(\hat{a}_3 + \hat{\lambda})/2 \;\; , \;\; \hat{\beta} = \sqrt{-(\hat{a}_3 + \hat{\lambda})^2 + 4(\hat{a}_2 + \hat{\lambda}(\hat{a}_3 + \hat{\lambda}))} \tag{2.30}$$

4. Wyznaczenie macierzy odwrotnych $\hat{\mathbf{A}}_0^{-1}$, $\hat{\mathbf{A}}_1^{-1}$ metodą minorów

$$(\hat{\mathbf{A}}^{-1})_{i,j} = (-1)^{i+j} \hat{\mathbf{M}}_{i,j} / \det \hat{\mathbf{A}}.$$

5. Obliczenie położenia punktów stałych: $\hat{\mathbf{p}}_0 = \hat{\mathbf{A}}_0^{-1} \hat{\mathbf{v}}_0$, $\hat{\mathbf{p}}_1 = \hat{\mathbf{A}}_1^{-1} \hat{\mathbf{v}}_1$.

6. Obliczenie wektorów własnych macierzy $\mathbf{A}_0$, $\mathbf{A}_1$. Przykładowo niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą z wartościami własnymi λ, $\alpha \pm i\beta$. Poszukujemy kolumnowych wektorów własnych $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}_3$ spełniających następujące równanie macierzowe:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}_1 \; \mathbf{x}_2 \; \mathbf{x}_3) = (\mathbf{x}_1 \; \mathbf{x}_2 \; \mathbf{x}_3) \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix}.$$

Wektor własny $\mathbf{x}_1$ spełnia równanie $\mathbf{A}\mathbf{x}_1 = \lambda \mathbf{x}_1$, natomiast wektory własne $\mathbf{x}_2$ i $\mathbf{x}_3$ spełniają układ równań: $\mathbf{A}\mathbf{x}_2 = \alpha \mathbf{x}_2 + \beta \mathbf{x}_3$, $\mathbf{A}\mathbf{x}_3 = -\beta \mathbf{x}_2 + \alpha \mathbf{x}_3$. Można je wyznaczyć w następujący sposób:

- obliczenie wektora własnego odpowiadającego wartości własnej $\hat{\lambda}$ z równania $\hat{\mathbf{A}}\hat{\mathbf{x}}_1 = \hat{\lambda}\hat{\mathbf{x}}_1$.
- obliczenie wektora własnego $\hat{\mathbf{x}}_2$ z równania $(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\alpha}\mathbf{I})^2 \hat{\mathbf{x}}_2 = -\hat{\beta}^2 \hat{\mathbf{x}}_2$
- obliczenie $\hat{\mathbf{x}}_3 := -\hat{\beta}(\hat{\mathbf{A}} - \hat{\alpha}\mathbf{I})^{-1} \hat{\mathbf{x}}_2$,
- wstawienie ich w macierz $\hat{\mathbf{E}} := (\hat{\mathbf{x}}_1 \; \hat{\mathbf{x}}_2 \; \hat{\mathbf{x}}_3)$.

7. Obliczenie macierzy odwrotnych $\hat{\mathbf{E}}_0^{-1}$, $\hat{\mathbf{E}}_1^{-1}$.

Obliczanie $e^{\hat{\mathbf{A}}\hat{t}}$

Macierz $\mathbf{A}$ o wartościach własnych λ, $\alpha \pm i\beta$ można przedstawić w postaci

$$\mathbf{A} = \mathbf{E} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \beta & \alpha \end{pmatrix} \mathbf{E}^{-1}, \tag{2.31}$$

gdzie $\mathbf{E}$ jest macierzą utworzoną z wektorów własnych w sposób opisany powyżej. Wówczas $e^{\hat{\mathbf{A}}\hat{t}}$ można obliczyć ze wzoru

$$e^{\hat{\mathbf{A}}\hat{t}} = \hat{\mathbf{E}} \begin{pmatrix} e^{\hat{\lambda}\hat{t}} & 0 & 0 \\ 0 & e^{\hat{\alpha}\hat{t}} \cos \hat{\beta}\hat{t} & -e^{\hat{\alpha}\hat{t}} \sin \hat{\beta}\hat{t} \\ 0 & e^{\hat{\alpha}\hat{t}} \sin \hat{\beta}\hat{t} & e^{\hat{\alpha}\hat{t}} \cos \hat{\beta}\hat{t} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{E}}^{-1}. \tag{2.32}$$

Obliczanie obrazu punktu po czasie $\hat{t}$

W obszarach liniowych równanie $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_i(\mathbf{x} - \mathbf{p}_i)$ opisuje rozważany układ dynamiczny. Zatem obraz prostokąta $\hat{\mathbf{x}}$ po czasie $\hat{t}$ można obliczyć ze wzoru:

$$\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t}) = e^{\hat{\mathbf{A}}_i \hat{t}}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{p}}_i) + \hat{\mathbf{p}}_i. \tag{2.33}$$

Wzór powyższy jest prawdziwy przy założeniu, że trajektoria przez czas $\hat{t}$ pozostaje w jednym z obszarów liniowych U_0 albo U_+.

Obliczanie czasu powrotu

Obliczanie czasu powrotu jest najbardziej czasochłonnym i skomplikowanym fragmentem procedury wyznaczania obrazów przez odwzorowanie Poincarégo. Zostanie on opisany dla przypadku powrotu do V_+ trajektorii startującej z V_+ po przejściu przez obszar U_+. Postępowanie w drugim przypadku (przy przechodzeniu przez U_0) jest analogiczne. Załóżmy, że $\hat{\mathbf{x}}$ jest dowolnym prostokątem, zawartym w płaszczyźnie V_+. Procedura obliczania czasu powrotu składa się z kilku części:

1. Znalezienie t_1 takiego, że fragment trajektorii $\varphi(\hat{\mathbf{x}}, (0, t_1])$ jest zawarty w zbiorze U_+. Obliczenie $\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, [0, t_1])$ według wzoru (2.33) nie może dać oczekiwanych rezultatów. Ponieważ arytmetyka interwałowa uwzględnia błędy komputera to zbiór $\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, [0, t_1])$ wyznaczony według wzoru (2.33) na pewno będzie miał niepuste przecięcie z obszarem U_0. Trzeba zatem zastosować inną metodę sprawdzenia czy zbiór $\varphi(\hat{\mathbf{x}}, (0, t_1])$ jest zawarty w U_+. Najpierw obliczamy $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, [0, t_1])$ a następnie sprawdzamy, czy $\hat{\mathbf{y}}$ należy do obszaru, gdzie zmienna stanu x rośnie. Należy w tym celu obliczyć prawą stronę równania stanu $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{A}}_1\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{v}}_1$ i sprawdzić czy punkty ze zbioru $\hat{\mathbf{z}}$ mają pierwszą współrzędną dodatnią ($\hat{\mathbf{z}}^T\mathbf{e}_1 \subset (0, \infty)$, gdzie $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)^T$). Sprawdzenie takie wraz z ewentualnym zmniejszeniem t_1 jest wykonywane przez poniższą procedurę.

   begin
   wybierz $t_1 > 0$;
   repeat
   $t_1 = t_1/2$;
   $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, [0, t_1])$;
   $\hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{A}}_1\hat{\mathbf{y}} + \hat{\mathbf{v}}_1$;
   until $(\inf(\hat{\mathbf{z}}^T\mathbf{e}_1) > 0)$;
   end;

2. Znalezienie maksymalnego t_2 takiego, że $\varphi(\hat{\mathbf{x}}, (0, t_2])$ jest zawarty w zbiorze U_+. W tym celu wybieramy Δ_t oraz ustawiamy wartości początkowe $t_{\min} = t_1$ i $t_{\max} = t_1 + \Delta_t$. Jeśli $\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, [t_{\min}, t_{\max}]) \subset U_+$ to zwiększamy $t_{\min}$ do wartości $t_{\max}$. W przeciwnym wypadku zmniejszamy Δ_t i powtarzamy sprawdzenie warunku. Procedura jest kontynuowana dopóki Δ_t jest większe od pewnej ustalonej liczby ε_1.

   begin
   wybierz $\Delta_t > 0$;
   $t_{\min} = t_1$;
   while $\Delta_t > \varepsilon_1$ **do begin**
   $t_{\max} = t_{\min} + \Delta_t$;
   $\hat{\mathbf{y}} = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, [t_{\min}, t_{\max}])$;
   if $(\inf(\hat{\mathbf{y}}^T\mathbf{e}_1) > 1)$ **then begin**
   $\Delta_t = 1.5 * \Delta_t$;

$t_{\min} = t_{\max}$;
end
else $\Delta_t = \Delta_t/1.5$;
end;
$t_2 = t_{\min}$;
end;

W trakcie procedury sprawdzane jest, dla kolejnych przedziałów $[t_{\min}, t_{\max}]$, czy spełniony jest warunek $\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, [t_{\min}, t_{\max}]) \subset U_+$. Wartość $t_{\min}$ jest zwiększana do wartości $t_{\max}$ tylko w przypadku, gdy warunek ten jest spełniony. Ponieważ kolejne przedziały $[t_{\min}, t_{\max}]$ pokrywają przedział $[t_1, t_2]$ to stąd wnioskujemy, że $\varphi(\hat{\mathbf{x}}, [t_1, t_2]) \subset U_+$.

3. Znalezienie minimalnego $t_3 > t_2$ takiego, że $\varphi(\hat{\mathbf{x}}, t_3)$ jest zawarty w zbiorze U_0. Procedura ta składa się z dwóch części. W pierwszej poszukujemy dowolnego $t_3 > t_2$ spełniającego ten warunek, zaś w drugiej wartość t_3 jest optymalizowana. Różnica pomiędzy znalezioną wartością t_3 i wartością optymalną zależy od dodatniej liczby ε_3.

begin
wybierz $\Delta_t > 0$;
$t_3 = t_2$;
repeat
$\Delta_t = 1.5 * \Delta_t$;
$t_3 = t_3 + \Delta_t$;
$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, t_3)$;
until $(\sup(\hat{\mathbf{y}}^T \mathbf{e}_1) < 1)$;
{optymalizacja t_3}
$t_{\min} = t_2$;
$t_{\max} = t_3$;
while $(t_{\max} - t_{\min} < \varepsilon_2)$ **do begin**
$t_{\text{med}} = (t_{\min} + t_{\max})/2$;
$\hat{\mathbf{y}} = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, t_{\text{med}})$;
if $(\sup(\hat{\mathbf{y}}^T \mathbf{e}_1) < 1)$
then $t_{\max} = t_{\text{med}}$
else $t_{\min} = t_{\text{med}}$;
end;
$t_3 = t_{\max}$;
end;

4. Ponieważ $\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, (0, t_2])$ jest zawarte w obszarze U_+ i $\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, t_3)$ jest zawarte w obszarze U_0 to zbiór $\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, [t_2, t_3])$ zawiera obraz zbioru $\hat{\mathbf{x}}$ przez odwzorowanie Poincarégo. Poszukiwany czas powrotu należy zatem do przedziału $\hat{t} = [t_2, t_3]$.

5. W celu sprawdzenia ciągłości odwzorowania Poincarégo należy sprawdzić następujący warunek. Jeśli na zbiorze $\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, [t_2, t_3])$ zmienna stanu x maleje (tzn. pole wektorowe ma ujemną składową w kierunku osi x) to płaszczyzna $x = 1$ jest transwersalna do potoku na zbiorze $\mathbf{P}(\hat{\mathbf{x}})$. Wobec tego na podstawie Twierdzenia 1.10 odwzorowanie Poincarégo jest ciągłe na zbiorze $\hat{\mathbf{x}}$.

Obliczanie obrazu zbioru przez odwzorowanie Poincarégo

Po opracowaniu procedury do wyznaczania czasu powrotu obliczenia obrazu przez odwzorowanie Poincarégo jest proste. Przypuśćmy, że $\hat{\mathbf{x}}$ jest prostokątem zawartym w płaszczyźnie $V_+ = \{ (x,y,z)^T : x = 1 \}$. Przypuśćmy ponadto, że prostokąt ten jest zawarty w takiej części płaszczyzny V_+, z której startujące trajektorie wchodzą w obszar U_0. Pełne odwzorowanie Poincarégo $\mathbf{P}$ rozkłada się z na dwa odwzorowania $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$. Pierwsze odpowiada przejściu przez obszar U_0 i powrotowi do płaszczyzny V_+, zaś drugie powrotowi do płaszczyzny V_+ po przejściu przez obszar U_+. Najpierw wyznaczamy czas powrotu $\hat{t}_0 = [t_{0\,\min}, t_{0\,\max}]$ trajektorii startujących z $\hat{\mathbf{x}}$ do płaszczyzny V_+. Obraz $\hat{\mathbf{x}}$ przez pierwszą część odwzorowania Poincarégo może być wyznaczony ze wzoru:

$$\hat{\mathbf{P}}_1(\hat{\mathbf{x}}) := \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{t}_0) = e^{\hat{\mathbf{A}}_0 \hat{t}_0}(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{p}}_0) + \hat{\mathbf{p}}_0. \tag{2.34}$$

$\hat{\mathbf{P}}_1(\hat{\mathbf{x}})$ jest prostokątem zawierającym obraz $\hat{\mathbf{x}}$ przez odwzorowanie $\mathbf{P}_1$. Powtarzamy powyższą procedurę, wyznaczając czas powrotu $\hat{t}_1 = [t_{1\,\min}, t_{1\,\max}]$ do płaszczyzny V_+ po przejściu przez obszar U_+ i obliczamy ostatecznie obraz $\mathbf{x}$ przez pełne odwzorowanie Poincarégo ze wzoru:

$$\hat{\mathbf{P}}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\mathbf{P}}_2(\hat{\mathbf{P}}_1(\hat{\mathbf{x}})) = \hat{\varphi}(\hat{\mathbf{P}}_1(\hat{\mathbf{x}}), t_1) = e^{\hat{\mathbf{A}}_1 \hat{t}_1}(\hat{\mathbf{P}}_1(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{p}}_1) + \hat{\mathbf{p}}_1. \tag{2.35}$$

2.2.8 Entropia topologiczna odwzorowania Poincarégo

Definicja entropii topologicznej podana w podrozdziale 1.2 nie jest wygodna do obliczeń, głównie z uwagi na konieczność obliczania supremum po wszystkich pokryciach otwartych. Jest wiele równoważnych definicji entropii topologicznej. Przy oszacowaniu entropii topologicznej odwzorowania Poincarégo skorzystamy z definicji równoważnej opartej na pojęciu zbiorów rozdzielonych. Załóżmy, podobnie jak poprzednio, że (X, ϱ) jest przestrzenią metryczną, zaś φ jest ciągłym odwzorowaniem przestrzeni X w siebie.

Definicja 2.4 Zbiór $E \subset X$ nazywamy (n, ε)-*rozdzielonym* jeśli dla dowolnych różnych punktów $x, y \in E$ istnieje $0 \leqslant j < n$ takie, że $\varrho(\varphi^j(x), \varphi^j(y)) > \varepsilon$.

Bowen w pracy [7] udowodnił następujące twierdzenie:

Twierdzenie 2.9

$$h(\varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon), \tag{2.36}$$

gdzie

$$s_n(\varepsilon) = \max\{\operatorname{card} E : E \textit{ jest } (n, \varepsilon)\textit{-rozdzielony}\}.$$

$\operatorname{card} E$ *oznacza moc zbioru* E.

Powyższy wzór zostanie użyty w celu oszacowania od dołu entropii topologicznej odwzorowania $\mathbf{P}$. Jako zbiory (n, ε)-rozdzielone będziemy wybierać zbiory utworzone z punktów okresowych odwzorowania $\mathbf{P}$ indeksowane przez ciągi n-elementowe należące do zbioru T_n zdefiniowanego równaniem (2.24). Przypomnijmy, że do zbioru T_n należą te ciągi, które po utworzeniu cyklu nie zawierają podciągu $(1,1)$. Wykażemy najpierw, że ciąg $P_n = \operatorname{card} T_n$ jest ciągiem Fibonacciego.

Lemat 2.3 *Niech* T_n *będzie zdefiniowane równaniem* (2.24). *Oznaczmy moc zbioru* T_n *przez* P_n. *Wzór rekurencyjny na* P_n *jest następujący:*

$$\left\{ \begin{array}{lcll} P_1 & = & 1, & \\ P_2 & = & 3, & \\ P_n & = & P_{n-1} + P_{n-2} & n \geqslant 3. \end{array} \right. \tag{2.37}$$

Dowód: Jest tylko jeden jednoelementowy ciąg $(a_0) \in T_1$: (0). Są trzy dwuelementowe ciągi $(a_0, a_1) \in T_2$: $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$. Zatem $P_1 = 1$ i $P_2 = 3$. Zdefiniujmy:

$$\begin{aligned} Q_n &= \{ (a_0, \dots, a_{n-1}) \in T_n : a_0 = 1, a_{n-1} = 0 \}, \\ R_n &= \{ (a_0, \dots, a_{n-1}) \in T_n : a_0 = 0 \}. \end{aligned}$$

Q_n zawiera ciągi zaczynające się na 1 i kończące na 0, R_n zawiera ciągi rozpoczynające się elementem 0. Z definicji zbiorów Q_n i R_n wynika, że $Q_n \cup R_n \subset T_n$. Jeśli wybierzemy ciąg a ze zbioru T_n to jego pierwszym elementem może być 0 lub 1. Jeśli $a_0 = 0$ to $a \in R_n$. Jeśli $a_0 = 1$ to $a_{n-1} \neq 1$, bo w przeciwnym wypadku ciąg a po utworzeniu z niego cyklu zawierałby podciąg $(1,1)$. Zatem $a \in Q_n$. Wobec tego $T_n \subset Q_n \cup R_n$. Ponieważ $T_n = Q_n \cup R_n$ oraz zbiory Q_n, R_n są rozłączne to $P_n = \operatorname{card} Q_n + \operatorname{card} R_n$ dla każdego $n > 0$. Ciągi z Q_n można otrzymać z ciągów z Q_{n-1} przez dodanie elementu 0 i z ciągów należących do Q_{n-2} przez dodanie ciągu dwuelementowego $(1,0)$. Ciągi otrzymane tymi dwoma metodami są różne, a ponadto w ten sposób otrzymamy wszystkie ciągi należące do Q_n. Zatem $\operatorname{card} Q_n = \operatorname{card} Q_{n-1} + \operatorname{card} Q_{n-2}$. Podobnie ciągi w R_n można otrzymać z ciągów należących do R_{n-1} przez dodanie elementu 0 i z ciągów należących do R_{n-2} przez dodanie ciągu $(0,1)$: $\operatorname{card} R_n = \operatorname{card} R_{n-1} + \operatorname{card} R_{n-2}$. Dla dowolnego $n > 2$ mamy:

$$\begin{aligned} P_n &= \operatorname{card} Q_n + \operatorname{card} R_n \\ &= \operatorname{card} Q_{n-1} + \operatorname{card} Q_{n-2} + \operatorname{card} R_{n-1} + \operatorname{card} R_{n-2} \\ &= \operatorname{card} Q_{n-1} + \operatorname{card} R_{n-1} + \operatorname{card} Q_{n-2} + \operatorname{card} R_{n-2} \\ &= P_{n-1} + P_{n-2}. \end{aligned}$$

□

Następny lemat podaje wzór wyraźny na P_n.

Lemat 2.4

$$P_n = z_1^n + z_2^n, \tag{2.38}$$

gdzie $z_1 = (1+\sqrt{5})/2$, $z_2 = (1-\sqrt{5})/2$.

Dowód: Użyjemy metody funkcji tworzących [48]. Niech $L_n \stackrel{\text{df}}{=} P_{n+1}$.

$$\begin{aligned} L(x) &\stackrel{\text{df}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n = L_0 + L_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} L_n x^n \\ &= L_0 + L_1 x + \sum_{n=2}^{\infty} (L_{n-1} + L_{n-2}) x^n \\ &= L_0 + L_1 x + x \sum_{n=1}^{\infty} L_n x^n + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} L_n x^n \\ &= L_0 + L_1 x + x(L(x) - L_0) + x^2 L(x) \\ &= 1 + 3x + xL(x) - x + x^2 L(x). \end{aligned}$$

Stąd można wyliczyć $L(x)$:

$$\begin{aligned} L(x) &= \frac{1+2x}{1-x-x^2} = \frac{\frac{2+z_1}{z_1-z_2}}{1-z_1 x} - \frac{\frac{2+z_2}{z_1-z_2}}{1-z_2 x} = \frac{z_1}{1-z_1 x} + \frac{z_2}{1-z_2 x} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(z_1^{n+1} x^n + z_2^{n+1} x^n \right) \end{aligned}$$

gdzie $z_1 = (1+\sqrt{5})/2$, $z_2 = (1-\sqrt{5})/2$. Ostatecznie z równości szeregów potęgowych mamy:

$$L_n = z_1^{n+1} + z_2^{n+1}.$$

□

Uwaga 2.4 *P_n jest liczbą punktów stałych odwzorowania h_d^n.*

Teraz jesteśmy przygotowani do oszacowania od dołu entropii topologicznej odwzorowania $\mathbf{P}$.

Twierdzenie 2.10 *Niech $\mathbf{P}$ będzie odwzorowaniem Poincarégo zdefiniowanym równaniem* (2.26)*. Dla wszystkich wartości parametrów należących do wystarczająco małego otoczenia punktu* $(C_1, C_2, G, L, R, G_a, G_b, E) = (1.02, -0.632, -0.0033, -1.02, -0.33, -0.419, 0.839, 1)$

$$h(\mathbf{P}) \geqslant \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{2.39}$$

Dowód: Wybierzmy dodatnią liczbę δ w taki sposób, aby $\delta < d(x,y)$ dla wszystkich $x \in N_0$ i $y \in N_1$. Wybierzmy liczbę naturalną n i dodatnią liczbę rzeczywistą $\varepsilon < \delta$. Dla każdego ciągu $a \in T_n$ wybierzmy punkt x_a spełniający (2.27). Z Twierdzenia 2.8 wynika, że takie x_a istnieje. Zdefiniujmy

$$E_n = \{x_a\}_{a \in T_n}. \tag{2.40}$$

Pokażemy, że zbiór E_n jest (n,ε)-rozdzielony. Wybierzmy dwa różne punkty x_a, x_b. Ponieważ ciągi $a, b \in T_n$ są różne to istnieje $0 \leqslant i < n$ takie, że $a_i \neq b_i$. Z warunku (2.27) wynika, że $\mathbf{P}^i(x_a) \in N_{a_i}$ i $\mathbf{P}^i(x_b) \in N_{b_i}$. Ponieważ $\varepsilon < \delta \leqslant \inf_{x \in N_0, y \in N_1}\{\, d(x,y)\,\}$ to $d(\mathbf{P}^i(x_a), \mathbf{P}^i(x_b)) > \varepsilon$ i E_n jest (n,ε)-rozdzielony. Moc zbioru E_n jest równa P_n. Zatem $s_n(\varepsilon) \geqslant P_n$. Na podstawie Twierdzenia 2.9 mamy:

$$\begin{aligned} h(\mathbf{P}) &= \lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon) \geqslant \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n = \lim_{n\to\infty} \log \sqrt[n]{z_1^n + z_2^n} \\ &= \log z_1 = \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

□

Ponieważ $(1+\sqrt{5})/2 > 1$, to otrzymujemy natychmiast następujący wniosek:

Wniosek 2.2 *Dla wszystkich wartości parametrów należących do wystarczająco małego otoczenia punktu* $(C_1, C_2, G, L, R, G_a, G_b, E) = (1.02, -0.632, -0.0033, -1.02, -0.33, -0.419, 0.839, 1)$ *odwzorowanie Poincarégo $\mathbf{P}$, określone równaniem* (2.26) *posiada dodatnią entropię topologiczną.*

Istnieją również inne możliwości oszacowania entorpii topologicznej na podstawie liczby orbit okresowych. Najbardziej znanym rezultatem jest pochodzący od Bowena wynik dotyczący dyfoemorfizmów spełniających aksjomat A[3]. Entropia topologiczna dyfeomorfizmu spełniającego aksjomat A jest równa

$$h(\varphi) = \lim_{n\to\infty} \frac{\log C(\varphi^n)}{n},$$

[3]Mówimy, że dyfeomorfizm φ określony na rozmaitości M *spełnia aksjomat A* jeśli zbiór punktów niewędrujących $\Omega(\varphi)$ jest zbiorem hiperbolicznym oraz punkty okresowe φ są gęste w $\Omega(\varphi)$. Zbiór nazywamy *hiperbolicznym* jeśli w każdym jego punkcie istnieje rozkład na kierunki stabilny i niestabilny i rozkład ten jest ciągły.

gdzie $C(\varphi^n)$ oznacza liczbę punktów stałych przekształcenia φ^n [68, Tw. 5.9.7, str. 258]. Zastosowanie powyższego twierdzenia jest jednak w naszym przypadku trudne o ile nie niemożliwe z uwagi na konieczność wykazania silnych założeń o odwzorowaniu φ.

Inną możliwością jest obliczenie entropii topologicznej przesunięcia na dwóch symbolach na podstawie jego macierzy przejścia. Niech $\sigma\colon \Sigma_2 \mapsto \Sigma_2$ będzie przesunięciem w lewo (przesunięcie Bernoulliego) określonym na przestrzeni nieskończonych ciągów o elementach ze zbioru dwuelementowego $\{0,1\}$. Niech Σ_d będzie podzbiorem Σ_2 zawierającym ciągi nie zawierające podciągu $(1,1)$. Σ_d jest zbiorem niezmienniczym względem przesunięcia σ. Podprzesunięcie (subshift) $\sigma|\Sigma_d$ odpowiadające zdeformowanej podkowie Smale'a posiada macierz przejścia równą

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entropia topologiczna podprzesunięcia o danej macierzy przejścia $\mathbf{A}$ jest równa logarytmowi wartości własnej λ_1 macierzy $\mathbf{A}$ takiej, że $\lambda_1 \geqslant |\lambda_j|$ dla wszystkich wartości własnych macierzy $\mathbf{A}$ [63, Twierdzenie 1.9, str. 340]. Stąd otrzymujemy $h(\sigma|\Sigma_d) = \left(1+\sqrt{5}\right)/2$. Aby zastosować ten rezultat do oszacowania entropii topologicznej odwzorowania Poincarégo należy również wykazać, że istnieje semisprzężenie[4] pomiędzy odwzorowaniem Poincarégo i odwzorowaniem $\sigma|\Sigma_d$ tzn. istnieje ciągła surjekcja $g\colon N_1 \cup N_2 \mapsto \Sigma_d$ taka, że $g \circ \mathbf{P} = \sigma \circ g$. Po wykazaniu istnienia semisprzężenia $\mathbf{P}$ z $\sigma|\Sigma_d$ entropię topologiczną $h(\mathbf{P})$ można oszacować od dołu w następujący sposób: $h(\mathbf{P}) \geqslant h(\sigma|\Sigma_d)$ [63, Twierdzenie 1.7, str. 340]. Jest to inny sposób otrzymania Twierdzenia 2.10.

2.2.9 Entropia topologiczna układu Chuy

Istnienie nieskończenie wielu orbit okresowych może również być wykorzystane do wykazania, że entropia topologiczna układu ciągłego w sensie Definicji 1.21 jest dodatnia.

Twierdzenie 2.11 *Dla wszystkich wartości parametrów należących do wystarczająco małego otoczenia punktu* $(C_1, C_2, G, L, R, G_a, G_b, E) = (1.02, -0.632, -0.0033, -1.02, -0.33, -0.419, 0.839, 1)$ *entropia topologiczna potoku* π *generowanego przez równania* (1.16), (1.17) *opisujące obwód Chuy jest dodatnia*

$$h(\pi) > 0.$$

Dowód: Wybierzmy N_0', N_1' otoczenia zbiorów N_0 i N_1 w płaszczyźnie transwersalnej Σ tak, aby $N_0' \cap N_1' = \emptyset$ oraz aby płaszczyzna Σ była transwersalna do pola wektorowego na zbiorze $N_0' \cup N_1'$.

Wybierzmy liczbę rzeczywistą T spełniającą warunek $T > \tau(\mathbf{x})$ dla każdego $\mathbf{x} \in N_0 \cup N_1$, gdzie $\tau(\mathbf{x})$ jest czasem powrotu punktu $\mathbf{x}$ do płaszczyzny Σ. Takie skończone T istnieje ponieważ odwzorowanie Poincarégo jest określone na zbiorze zwartym $N_0 \cup N_1$.

Niech $N_0(\delta)$ oznacza przecięcie otoczenia zbioru N_0 o promieniu δ z płaszczyzną U_+:

$$N_0(\delta) = \{\mathbf{x}\colon d(\mathbf{x},\mathbf{y}) < \delta \text{ dla pewnego } \mathbf{y} \in N_0\} \cap U_+.$$

Podobnie definiujemy $N_1(\delta)$. Istnieje δ takie, że trajektorie startujące z punktów należących do $N_0(3\delta)$ przecinają płaszczyznę transwersalną po raz pierwszy w punkcie należącym do N_0' i takie, że trajektorie startujące z punktów należących do $N_1(3\delta)$ przecinają płaszczyznę transwersalną po raz pierwszy w punkcie należącym do N_1'. Istnienie takiego dodatniego δ wynika z transwersalności pola wektorowego do płaszczyzny Σ na zbiorze $N_0' \cup N_1'$.

[4] Mówimy, że odwzorowania $f\colon X \mapsto X$ i $g\colon Y \mapsto Y$ są *semisprzężone* jeśli istnieje ciągła surjekcja $k\colon X \mapsto Y$ spełniająca zależność $k \circ f = g \circ k$. Dla takich odwzorowań f, g zachodzi nierówność $h(f) \geqslant h(g)$.

Oznaczmy przez M zbiór punktów utworzonych przez fragmenty trajektorii startujących z $N_0 \cup N_1$ do momentu ich powrotu do płaszczyzny transwersalnej

$$M = \{\mathbf{x} \colon \mathbf{x} = \pi(\mathbf{y}, t) \text{ dla pewnego } \mathbf{y} \in N_0 \cup N_1 \text{ oraz } t \in [0, \tau(\mathbf{y})]\}.$$

Wybierzmy dodatnią liczbę rzeczywistą t tak, aby $d(\mathbf{x}, \pi(\mathbf{x}, t)) < \delta$ dla dowolnego $\mathbf{x} \in M$. Istnienie $t > 0$ wynika ze zwartości zbioru M. Niech N będzie liczbą naturalną większą od T/t. Niech E_n będzie podobnie jak w (2.40) zbiorem punktów okresowych o okresie n odwzorowania $\mathbf{P}$ indeksowanym przez ciągi n-elementowe $a \in T_n$. Wykażemy, że zbiór E_n jest (Nn, δ)-rozdzielony względem odwzorowania $\pi_t \colon \mathbf{R}^3 \mapsto \mathbf{R}^3$ zdefiniowanego wzorem $\pi_t(\mathbf{x}) = \pi(\mathbf{x}, t)$, tzn. dla każdych dwóch różnych punktów $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b \in E_n$ istnieje $0 \leqslant j < nN$ takie, że $d(\pi(\mathbf{x}_a, jt), \pi(\mathbf{x}_b, jt)) > \delta$.

Załóżmy, że dla punktów $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_b \in E_n$ zachodzi $d(\pi(\mathbf{x}_a, jt), \pi(\mathbf{x}_b, jt)) \leqslant \delta$ dla każdego naturalnego $j \in \{0, Nn-1\}$. Wykażemy, że wówczas ciągi a i b są równe.

Wybierzmy dowolne $j \in \{0, n\}$ i przypuśćmy, że $a_j = 0$. Ponieważ odwzorowanie π_t przesuwa punkty nie więcej niż o δ to przed przecięciem trajektorii ze zbiorem N_0 dyskretna trajektoria musi przejść przez zbiór $N_0(2\delta) \setminus N_0(\delta)$. Zatem istnieje $p \in \{0, Nn-1\}$ takie, że $\pi(\mathbf{x}_a, pt) \in N_0(2\delta/3) \setminus N_0(\delta/3)$. Na podstawie założenia o punktach $\mathbf{x}_a$, $\mathbf{x}_b$ mamy $\pi(\mathbf{x}_b, pt) \in N_0(3\delta)$. Ale trajektoria startująca z $N_0(3\delta)$ musi przeciąć płaszczyznę Σ i punkt przecięcia należy do N_0, czyli symbol b_j dla $\mathbf{x}_b$ jest równy a_j. Dla przypadku $a_j = 1$ dowód przebiega podobnie.

Ponieważ E_n jest zbiorem (Nn, δ)-rozdzielonym to $s_{Nn}(\delta) \geqslant \operatorname{card} E_n$. Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned} h(\varphi_t) &= \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log s_n(\delta) \geqslant \lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{Nn} \log s_{Nn}(\delta) \\ &\geqslant \lim_{n\to\infty} \frac{1}{Nn} \log \operatorname{card} E_n = \frac{1}{N} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_n = \frac{1}{N} \log \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \end{aligned}$$

Na podstawie Twierdzenia 1.7 można otrzymać oszacowanie na entropię topologiczną potoku:

$$h(\pi) = h(\pi_1) = \frac{1}{t} h(\pi_t) \geqslant \frac{1}{Nt} \log \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0.$$

2.2.10 Wnioski

Zaprezentowaliśmy metodę dowodu istnienia nieskończenie wielu orbit okresowych dla odwzorowań, w których jest zanurzona zdeformowana podkowa Smale'a. Metoda ta może być uogólniona na inne deformacje podkowy Smale'a. Przedstawiono następnie sposób zastosowania tej metody do dowodu istnienia nieskończenie wielu orbit okresowych w ciągłych układach dynamicznych na przykładzie układu Chuy. Metoda ta może być stosowana również do układów z innymi (niż odcinkami liniowe) typami nieliniowości, ale wówczas należy również uwzględnić błędy spowodowane całkowaniem numerycznym. Ten wynik został następnie użyty do oszacowania entropii topologicznej odwzorowania Poincarégo. Udowodniliśmy w ten sposób chaotyczność odwzorowania Poincarégo, generowanego przez trajektorie układu Chuy w sensie posiadania dodatniej entropii topologicznej. Udowodniliśmy również dodatniość entropii topologicznej ciągłego układu dynamicznego generowanego przez równania opisujące obwód Chuy.

Alternatywna metoda podejścia do tego problemu opiera się na zastosowaniu twierdzenia Szylnikowa [69, 71]. Wykorzystując twierdzenie Szylnikowa można wykazać istnienie orbity homoklinicznej, a co za tym idzie podkowy Smale'a i nieskończenie wielu orbit w jej otoczeniu. W wyniku zastosowania twierdzenia Szylnikowa otrzymujemy pewien przedział parametrów, zawierający punkt, dla którego istnieje trajektoria homokliniczna i w pewnym jej otoczeniu podkowa Smale'a. Zasadniczą różnicą w porównaniu z metodą opisaną w tym rozdziale jest to, że istnienie orbity homoklinicznej i nieskończenie wielu orbit okresowych jest wykazane dla pewnej nieznanej wartości parametru. W pracy [50] wykazano istnienie orbity homoklinicznej dla układu Chuy i oszacowano, że orbita homokliniczna istnieje dla wartości parametrów stosunkowo dalekich od parametrów oryginalnie rozważanego obwodu generującego trajektorie typu double-scroll. Wyników tych nie można wykorzystać do wykazania istnienia nieskończenie wielu orbit dla zadanych z góry wartości parametrów. W przeciwieństwie do metody opartej o twierdzenie Szylnikowa metoda zaproponowana w tym rozdziale pozwala udowodnić istnienie nieskończenie wielu orbit okresowych dla ustalonych z góry wartości parametrów.

Metody tego typu rozumie się często jako dowody istnienia chaosu. Nie pozwalają one jednak udowodnić chaotyczności układu w sensie Definicji 1.27. Ponieważ istnienie nieskończenie wielu orbit okresowych oraz dodatniość entropii topologicznej są warunkami słabszymi niż istnienie atraktora chaotycznego to te dowody istnienia chaosu należy uznać za niepełne.

Rozdział 3

Sterowanie układów chaotycznych

Zjawiska chaotyczne tak często spotykane w układach fizycznych są zwykle uznawane za zjawiska niechciane. Dlatego też jednym z najważniejszych problemów przy badaniu układów chaotycznych jest możliwość ich sterowania. Najczęstszym celem sterowania układów chaotycznych jest stłumienie oscylacji chaotycznych i takie wpłynięcie na dynamikę układu, aby zachowywał się on w z góry zadany sposób.

W przeciwieństwie do klasycznych problemów sterowania w przypadku układów chaotycznych cel sterowania nie jest określony jednoznacznie. W zależności od aplikacji sterowanie można rozumieć jako stabilizację punktu stałego, niestabilnej orbity okresowej lub też eliminację wielu obszarów atrakcji, które mogą występować w układach chaotycznych.

Najprostszym sposobem stłumienia oscylacji chaotycznych jest zmiana wartości jednego z parametrów układu. Wpływ zmiany parametru na dynamikę układu najwygodniej oprzeć jest o analizę diagramu bifurkacyjnego. Typowy diagram bifurkacyjny pokazuje bogactwo zachowań dynamicznych różnego typu. Na jego podstawie stosunkowo łatwo można dobrać wartość parametru układu dla której będzie on zachowywał się w pożądany sposób, np. generował oscylacje okresowe. Wadą takiego podejścia jest jednak konieczność znacznej zmiany parametru. Zmiana parametru niezbędna do uzyskania żądanego zachowania jest nie do zaakceptowania w układach, w których parametry są ustalone lub mogą być zmieniane tylko w niewielkim zakresie.

Kolejną możliwością jest modyfikacja struktury układu poprzez dodanie dodatkowego układu, który stłumi oscylacje chaotyczne. Przykład takiego rozwiązania został przedstawiony w pracy [43] gdzie do układu Chuy dołączono poprzez rezystor obwód równoległy RLC. Przy odpowiednio dobranej wartości rezstora sprzęgającego można przekształcić drgania chaotyczne układu oryginalnego w stabilne oscylacje okresowe. Wadą tej metody jest konieczność budowy dodatkowego podsystemu. Inną niedogodnością jest to, że cel sterowania musi być wybrany metodą prób i błędów.

Inną możliwością sterowania układów chaotycznych jest modyfikacja równań układu przez dodanie do nich zewnętrznych sygnałów. Pierwszą grupę stanowią metody, w których dodawany sygnał jest niezależny od stanu układu — metody sterowania bez sprzężenia zwrotnego (open-loop control). Przeprowadzono doświadczenia potwierdzające, że dodanie sinusoidalny sygnał o małej amplitudzie i odpowiednio dobranej częstotliwości dodany do równania stanu może spowodować stłumienie oscylacji chaotycznych [8]. Dodanie sygnału szumu o małej amplitudzie może spowodować usunięcie wielu obszarów atrakcji [37]. Dodanie nieokresowego sygnału sterującego w taki sposób aby trajektoria układu śledziła trajektorię będącą celem sterowania było studiowane w pracy [39].

Jeśli dodawany sygnał jest zależny od stanu układu to mamy szereg metod sterowania ze sprzężeniem zwrotnym. W metodzie opisanej w pracy [62] sygnał sterujący dodany do równań stanu jest proporcjonalny do różnicy pomiędzy sygnałem wyjściowym i jego wersją opóźnioną o czas τ. W zależności od stałej τ i siły sprzężenia obserwowano wiele rodzajów okresowych zachowań. Z kolei w metodzie opisanej w pracy [10] do równań układu dodawany jest sygnał proporcjonalny do różnicy pomiędzy wyjściem układu i pożądaną trajektorią. Wszystkie te metody mają jedną podstawową wadę. Dodanie sygnału do równań łatwo jest zrealizować w symulacjach, jednak w przypadku wielu układów rzeczywistych trudno jest taką metodę zaimplementować.

Kolejną metodą sterowania układami chaotycznymi jest stabilizacja niestabilnych orbit okresowych należących do dziwnego atraktora. Jest to metoda niezwykle obiecująca. W metodzie tej nie jest wymagana zmiana struktury układu ani też duża zmiana jego parametrów. Do ustabilizowania dowolnej orbity okresowej wystarczają dowolnie małe zmiany jednego z parametrów układu. Zasada działania metody jest niezależna od dynamiki sterowanego układu. Daje się ją zastosować również w przypadku, gdy nie są znane równania opisujące układ a cała informacja na jego temat jest oparta na obserwacji jednej zmiennej pochodzącej z układu.

Szczegółowy przegląd metod sterowania układów chaotycznych został przedstawiony przykładowo w pracach [9, 58, 59].

W rozdziale tym przedstawimy wybrane metody sterowania autonomicznych układów chaotycznych rozumianego jako stabilizacja wybranej niestabilnej orbity okresowej zanurzonej w dziwnym atraktorze. Metody tego typu oparte są na fakcie istnienia w dziwnym atraktorze nieskończenie wielu niestabilnych orbit okresowych. Rozważania nasze ograniczymy do układów trzeciego rzędu. Układy autonomiczne ciągłe niższego rzędu nie mogą generować sygnałów chaotycznych. Opisane metody mogą być zastosowane do sterowania układów wyższych rzędów praktycznie bez żadnych modyfikacji w przypadku, gdy orbita okresowa posiada jedną niestabilną wartość własną [60]. Przy większej ilości niestabilnych wartości własnych orbity okresowej do jej ustabilizowania potrzebna jest możliwość zmiany większej liczby parametrów układu.

3.1 Metody stabilizacji orbit okresowych

W pierwszej części rozdziału przedstawimy wybrane metody stabilizacji orbit okresowych w układach chaotycznych. Wszystkie metody zostaną opisane w najprostszej wersji, tzn. stabilizacji punktu stałego odwzorowania płaszczyzny w siebie.

Będziemy używać następujących oznaczeń. Niech $\mathbf{P}$ będzie różniczkowalnym odwzorowaniem płaszczyzny w siebie zależnym od parametru p, nazywanego parametrem sterującym

$$\mathbf{P}\colon \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \ni (\xi, p) \longrightarrow \mathbf{P}(\xi, p) \in \mathbf{R}^2. \tag{3.1}$$

Zakładamy, że parametr p możemy zmieniać w pewnym niewielkim zakresie wokół jego wartości nominalnej p_0 ($p \in [p_0 - \delta p_{\max}, p_0 + \delta p_{\max}]$, gdzie $\delta p_{\max}$ jest maksymalną dopuszczalną zmianą parametru). Niech ξ_F będzie punktem stałym odwzorowania $\mathbf{P}$, dla $p = p_0$ ($\mathbf{P}(\xi_F, p_0) = \xi_F$). Zakładamy również, że dla p należącego do przedziału $[p_0 - \delta p_{\max}, p_0 + \delta p_{\max}]$ istnieje chaotyczny atraktor odwzorowania (3.1). Zakładamy, że punkt stały ξ_F należy do atraktora oraz, że nie znika on przy zmianie parametru p w dopuszczalnym zakresie. Załóżmy ponadto, że typowa trajektoria układu wypełnia gęsto atraktor. Niech aproksymacja pierwszego rzędu odwzorowania $\mathbf{P}$ w otoczeniu punktu (ξ_F, p_0) będzie miała postać

$$\mathbf{P}(\xi, p) \approx \mathbf{P}(\xi_F, p_0) + \mathbf{A} \cdot (\xi - \xi_F) + \mathbf{w} \cdot (p - p_0), \tag{3.2}$$

gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą Jakobianową odwzorowania $\mathbf{P}(\cdot, p_0)$ w punkcie ξ_F, zaś $\mathbf{w} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p}(\xi_F, p_0)$ jest pochodną odwzorowania $\mathbf{P}$ po parametrze p.

Z założenia, że punkt stały należy do chaotycznego atraktora, (poza przypadkami zdegenerowanymi, gdy jedna z wartości własnych leży na okręgu jednostkowym) wynika, że punkt stały posiada jedną stabilną i jedną niestabilną wartość własną ($|\lambda_s| < 1 < |\lambda_u|$). Gdyby obie wartości własne leżały na zewnątrz okręgu jednostkowego to punkt stały nie należałby do dziwnego atraktora, gdyż odpychałby trajektorie we wszystkich kierunkach. Gdyby obie wartości własne leżały wewnątrz okręgu jednostkowego to punkt stały byłby stabilny i nie mógłby należeć do chaotycznego atraktora. Niech $\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_u$ będą stabilnym i niestabilnym wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}$, zaś λ_s, λ_u odpowiadającymi im wartościami własnymi. Niech $\mathbf{f}_u, \mathbf{f}_s$ oznaczają kontrawariantne wektory macierzy $\mathbf{A}$ zdefiniowane przez równości $\mathbf{f}_s^T\mathbf{e}_u = \mathbf{f}_u^T\mathbf{e}_s = 0$ i $\mathbf{f}_s^T\mathbf{e}_s = \mathbf{f}_u^T\mathbf{e}_u = 1$.

Często dla uproszczenia rozważań będziemy zakładać, że macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą diagonalną postaci

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Założenie takie nie zmniejsza ogólności rozważań, ponieważ z uwagi na istnienie stabilnej i niestabilnej wartości własnej zawsze można dokonać liniowej zamiany zmiennych tak, aby w nowych współrzędnych macierz Jakobianowa była postaci (3.3).

Sterowanie układu (3.1) polega na dokonywaniu w każdej iteracji odwzorowania $\mathbf{P}$ takich zmian wartości parametru p w niewielkim zakresie wokół jego wartości nominalnej p_0, aby ustabilizować punkt stały ξ_F. Zmiana parametru p nie powoduje zmiany punktu początkowego, lecz tylko zmianę równań układu. W przypadku opisywanych metod sterowanie polega na dodaniu liniowego sprzężenia zwrotnego $p = p(\xi)$ i przekształceniu odwzorowania $\mathbf{P}$ w funkcję jednej zmiennej $\mathbf{P}(\xi) = \mathbf{P}(\xi, p(\xi))$, dla której ξ_F jest stabilnym punktem stałym.

Opiszemy obecnie ideę zastosowania tej metody stabilizacji do sterowania układów ciągłych. Rozważmy autonomiczny układ równań różniczkowych zwyczajnych rzędu trzeciego, który zależy od jednego z parametrów systemu, oznaczonego przez p:

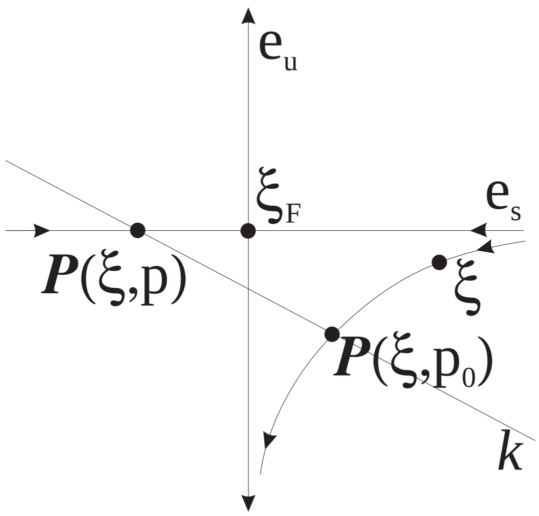
$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t), p), \tag{3.4}$$

gdzie $\mathbf{F}$ jest ciągłym polem wektorowym. Załóżmy, że układ ten dla każdego p należącego do przedziału $[p_0 - \delta p_{\max}, p_0 + \delta p_{\max}]$ definiuje ciągły układ dynamiczny. Załóżmy, że orbita okresowa γ należy do chaotycznego atraktora. Wybierzmy płaszczyznę Σ, transwersalną do potoku i przecinającą orbitę okresową γ w punkcie ξ_F. Oznaczmy przez $\mathbf{P}$ odwzorowanie Poincarégo zdefiniowane w pewnym otoczeniu punktu ξ_F. Odwzorowanie $\mathbf{P}$ zależy od parametru p, zatem jest ono odwzorowaniem postaci (3.1). Sterowanie polega na takiej zmianie parametru p, aby ustabilizować orbitę okresową γ. W najprostszym przypadku parametr p jest zmieniany przy każdym przecięciu trajektorii z płaszczyzną transwersalną raz na okres orbity γ. Stabilizacja orbity γ układu ciągłego odpowiada zatem stabilizacji punktu stałego ξ_F odwzorowania Poincarégo. W przypadku sterowania wielopunktowego, kiedy parametr p jest zmieniany kilka razy w ciągu okresu orbity, odwzorowanie Poincarégo $\mathbf{P}$ rozkładane jest na n uogólnionych odwzorowań Poincarégo $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_n$ i procedury sterowania stosowane są kolejno do każdego z nich. Dokładny opis zastosowania tego typu metod do sterowania orbit okresowych w ciągłych układach dynamicznych rzędu trzeciego zostanie podany w podrozdziale 3.2.3.

3.1.1 Metoda Otta-Grebogi'ego-Yorke'a

Metoda sterowania układów chaotycznych, nazywana w niniejszej pracy metodą OGY, polegająca na stabilizacji wybranej orbity okresowej została opisana po raz pierwszy w pracy [60] w 1990 roku.

Idea metody została przedstawiona na Rys.3.1. W celu ustabilizowania punktu stałego obserwowana jest trajektoria układu. W momencie, gdy zbliży się ona do punktu stałego modyfikowany



Rysunek 3.1: Idea metody OGY, ξ_F — siodłowy punkt stały, $\mathbf{e}_s$, $\mathbf{e}_u$ — stabilny i niestabilny wektor własny, k — kierunek wektora $\mathbf{w}$, ξ — aktualny stan układu, $\mathbf{P}(\xi, p_0)$ — stan układu w następnej iteracji bez sterowania ($p = p_0$), $\mathbf{P}(\xi, p)$ — stan układu w następnej iteracji, po zmianie wartości parametru p zgodnie z metodą OGY, $\mathbf{P}(\xi, p)$ leży na kierunku stabilnym punktu ξ_F

jest parametr p w taki sposób, aby w następnej iteracji trajektoria trafiła w lokalną stabilną podrozmaitość punktu stałego. Ponieważ stabilny wektor własny $\mathbf{e}_s$ jest styczny do podrozmaitości stabilnej to powyższy warunek może być zapisany jako: $\mathbf{f}_u^T(\mathbf{P}(\xi, p) - \xi_F) = 0$. Stąd, korzystając z liniowej aproksymacji (3.2), można wyprowadzić wzór na wartość parametru sterującego p, dla której trajekoria w następnej iteracji trafi w podrozmaitość stabilną punktu stałego

$$p = p_0 - \frac{\lambda_u}{\mathbf{f}_u^T \mathbf{w}} \mathbf{f}_u^T (\xi - \xi_F). \tag{3.5}$$

Aby metoda mogła być zastosowana musi być spełniony warunek $\mathbf{f}_u^T \mathbf{w} \neq 0$, tzn. kierunki wektorów $\mathbf{w}$ i $\mathbf{e}_s$ nie mogą się pokrywać. Sygnałem sterującym w tej metodzie podobnie jak i we wszystkich innych metodach omawianych w niniejszej pracy jest zmiana jednego z parametrów układu.

Sterowanie można rozpocząć tylko w momencie, gdy trajektoria przechodzi blisko stabilizowanego punktu stałego (założenie o linearyzacji jest spełnione), tzn. gdy $d(\xi, \xi_F) < d_{\max}$, gdzie $d_{\max}$ jest pewną małą liczbą rzeczywistą. Ponieważ jednak z założenia punkt stały należy do atraktora to po pewnym czasie odległość trajektorii od niego będzie dowolnie mała. W kolejnej iteracji po przyłożeniu sygnału sterującego trajektoria powinna pozostać w pobliżu punktu stałego, co umożliwi powtórzenie procedury sterowania i ustabilizowanie punktu stałego.

3.1.2 Modyfikacja Dressler-Nitschego

Dressler i Nitsche [23] zauważyli, że w przypadku rekonstrukcji atraktora metodą opóźnień czasowych [70] odwzorowanie Poincarégo $\mathbf{P}$ zależy nie tylko od aktualnej wartości parametru p_i ale również od wartości poprzedniej p_{i-1}, tzn.

$$\xi_{i+1} = \mathbf{P}(\xi_i, p_{i-1}, p_i). \tag{3.6}$$

Linearyzacja odwzorowania $\mathbf{P}$ może być zapisana w postaci

$$\mathbf{P}(\xi, p_{i-1}, p_i) \approx \mathbf{P}(\xi_F, p_0, p_0) + \mathbf{A} \cdot (\xi - \xi_F) + \mathbf{v} \cdot (p_{i-1} - p_0) + \mathbf{u} \cdot (p_i - p_0), \tag{3.7}$$

gdzie $\mathbf{A} = \mathbf{D}_\xi \mathbf{P}(\xi_F, p_0, p_0)$, $\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p_{i-1}}(\xi_F, p_0, p_0)$ oraz $\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial p_i}(\xi_F, p_0, p_0)$. Żądając, aby $\mathbf{f}_u^T(\xi_{i+1} - \xi_F) = 0$ można otrzymać wzór na p_i

$$p_i = p_0 - \frac{\lambda_u}{\mathbf{f}_u^T \mathbf{u}} \mathbf{f}_u^T(\xi_i - \xi_F) - \frac{\mathbf{f}_u^T \mathbf{v}}{\mathbf{f}_u^T \mathbf{u}}(p_{i-1} - p_0). \tag{3.8}$$

Powyższy wzór na wartość parametru sterującego może dawać niestabilne zachowanie systemu. W przypadku gdy $|\frac{\mathbf{f}_u^T \mathbf{v}}{\mathbf{f}_u^T \mathbf{u}}| \geqslant 1$ sygnał sterujący δp_i może rosnąć aż przekroczy dopuszczalną zmianę parametru $\delta p_{\max}$. Aby tego uniknąć Dressler i Nitsche zaproponowali wyprowadzenie wzoru na δp_i, w taki sposób aby δp_{i+1} automatycznie przyjmowało wartość zero. Można to uczynić przez żądanie, aby układ stabilizował się w dwóch krokach i aby δp_{i+1} było równe zeru, tzn. $\mathbf{f}_u^T(\xi_{i+2} - \xi_F) = 0$, $\delta p_{i+1} = 0$. Z tych warunków można wyprowadzić następujący wzór:

$$p_i = p_0 - \frac{\lambda_u^2}{\lambda_u \mathbf{f}_u^T \mathbf{u} + \mathbf{f}_u^T \mathbf{v}} \mathbf{f}_u^T(\xi_i - \xi_F) - \frac{\lambda_u \mathbf{f}_u^T \mathbf{v}}{\lambda_u \mathbf{f}_u^T \mathbf{u} + \mathbf{f}_u^T \mathbf{v}}(p_{i-1} - p_0) \tag{3.9}$$

Przepis ten ma lepsze własności pod względem stabilności niż wzór (3.8).

3.1.3 Własności metody OGY

Metoda OGY pozwala na stabilizację dowolnej niestabilnej orbity okresowej zanurzonej w dziwnym atraktorze. W przypadku idealnym stabilizacja może być osiągnięta przy dowolnie małej maksymalnej zmianie parametru sterującego.

Wielopunktowa metoda OGY zaproponowana w pracy [60] nie działa poprawnie we wszystkich przypadkach. Przypuśćmy, że $(\xi_{F_1}, \ldots, \xi_{F_n})$ jest orbitą okresową odwzorowania $\mathbf{P}$ należącą do atraktora. W metodzie wielopunktowej parametr sterujący jest zmieniany przy każdej iteracji odwzorowania $\mathbf{P}$. Macierz Jakobianowa $\mathbf{A} = \mathbf{DP}^n(\xi_{F_1})$ ($\mathbf{DP}^n(\xi)$ oznacza pochodną odwzorowania $\mathbf{P}^n$ w punkcie ξ) orbity okresowej jest rozkładana na macierze Jakobianowe odwzorowania $\mathbf{P}$ w punktach $\xi_{F_1}, \ldots, \xi_{F_n}$: $\mathbf{A}_i = \mathbf{DP}(\xi_{F_i})$ ($\mathbf{A} = \mathbf{A}_n \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}_1$). Wartość parametru sterującego dla trajektorii przechodzącej w pobliżu punktu ξ_{F_i} jest wyprowadzona z warunku, aby w następnej iteracji trajektoria trafiła w podrozmaitość stabilną macierzy $\mathbf{A}_{i+1}$. Zakłada się przy tym milcząco, że każda z macierzy $\mathbf{A}_i$ posiada kierunek stabilny i niestabilny. Jest to prawdą w przypadku metody jednopunktowej. W tym przypadku macierz $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}$ musi posiadać wartości własne stabilną i niestabilną, jako że punkt stały jest niestabilny i należy do atraktora. Jednak w przypadku metody wielopunktowej może się zdarzyć, że niektóre macierze $\mathbf{A}_i$ nie będą posiadały kierunku stabilnego lub niestabilnego. Podobna sytuacja może wystąpić przy stabilizacji orbity okresowej układu ciągłego. Odpowiedni przykład zostanie podany poniżej.

Metodę OGY można zmodyfikować tak, aby jej działanie nie zależało od istnienia rozkładu macierzy $\mathbf{A}_i$ na kierunki stabilny i niestabilny. Zamiast wpychania trajektorii na kierunek stabilny macierzy $\mathbf{A}_{i+1}$ można żądać trafienia trajektorii w kierunek stabilny macierzy Jakobianowej orbity okresowej $\mathbf{A}_i \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}_1 \cdot \mathbf{A}_n \cdot \ldots \cdot \mathbf{A}_{i+1}$. To rozwiązanie również nie jest szczególnie korzystne, zwłaszcza dla długich orbit okresowych, ponieważ powyższa macierz nie może być wyznaczona zbyt dokładnie. Drugim powodem jest to, że takie rozwiązanie może prowadzić do wpychania trajektorii na podrozmaitość stabilną również w obszarach, gdzie trajektorie są lokalnie odpychane od orbity okresowej w kierunku stabilnej podrozmaitości (porównaj poniższy przykład).

Przykład orbity okresowej lokalnie odpychającej trajektorie w kierunku rozmaitości stabilnej

Przedstawimy obecnie przykład dwuwymiarowego układu dynamicznego, posiadającego stabilną orbitę okresową, która odpycha trajektorie w jednej ze swych części. Dodając trzeci wymiar uzyskamy siodłową orbitę okresową, która lokalnie odpycha trajektorie. Rozkładając pełne odwzorowanie

Poincarégo na dwie składowe otrzymamy uogólnione odwzorowanie Poincarégo, którego macierz Jakobianowa w punkcie okresowym nie posiada kierunku stabilnego. Rozważmy układ dynamiczny zdefiniowany we współrzędnych biegunowych następującym równaniem stanu:

$$\begin{cases} \dot{r} &= (1-r)(1-c\sin\theta), \\ \dot{\theta} &= 1. \end{cases} \tag{3.10}$$

Rozwiązując powyższy układ można otrzymać równania potoku:

$$\varphi_t(r,\theta) = (1+(r-1)e^{c\cos\theta - c\cos(t+\theta)-t}, t+\theta). \tag{3.11}$$

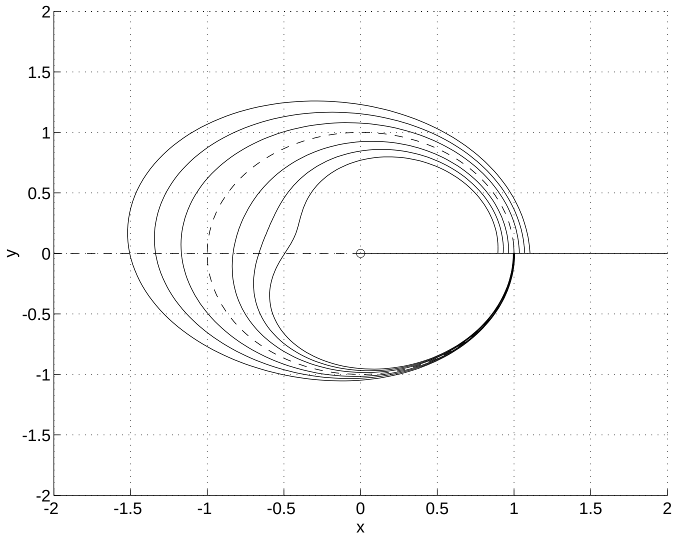
Wybierzmy transwersalne płaszczyzny w sposób następuący:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\stackrel{\mathrm{df}}{=} \{(r,\theta)\in \mathbf{R}^+\times S^1 \colon r>0, \theta=0\}, \\ \Sigma_2 &\stackrel{\mathrm{df}}{=} \{(r,\theta)\in \mathbf{R}^+\times S^1 \colon r>0, \theta=\pi\}. \end{aligned}$$

Zdefiniujmy odwzorowanie Poincarégo jako $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{\Sigma_1}$. Czas powrotu $\tau(\mathbf{x})$ do płaszczyzny Σ_1 dla dowolnego punktu $\mathbf{x}\in\Sigma_1$ jest taki sam i wynosi $\tau = 2\pi$, zatem odwzorowanie Poincarégo jest dane wzorem

$$\mathbf{P}(r) = 1+(r-1)e^{-2\pi}.$$

Punkt $r=1$ jest punktem stałym odwzorowania $\mathbf{P}$, odpowiadającym orbicie okresowej (ruch po kole o promieniu 1) układu (3.10). Macierz Jakobianowa tej orbity wynosi $\mathbf{DP}(1) = \frac{d\mathbf{P}}{dr}\big|_{r=1} = e^{-2\pi}$, czyli orbita okresowa jest stabilna. Zdefiniujmy dwa uogólnione odwzorowania Poincarégo: $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_{\Sigma_1\Sigma_2}$, $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_{\Sigma_2\Sigma_1}$. Dla $c=\pi$ macierze Jakobianowe uogólnionych odwzorowań Poincarégo są równe $\mathbf{DP}_1(1) = e^{2c-\pi} = e^{\pi} > 1$, $\mathbf{DP}_2(1) = e^{-2c-\pi} = e^{-3\pi} < 1$. Zatem odwzorowanie $\mathbf{P}_1$ jest odpychające, ale ponieważ przyciąganie w drugiej części orbity jest dominujące to orbita okresowa pozostaje stabilna ($\mathbf{DP}(1) = \mathbf{DP}_2(1)\cdot\mathbf{DP}_1(1)$). Kilka trajektorii układu startujących z punktów usytuowanych na płaszczyźnie Σ w pobliżu punktu $(r,\theta) = (1,0)$ jest przedstawionych na Rys. 3.2. Orbita okresowa jest oznaczona linią przerywaną. Można zauważyć, że trajektorie są globalnie przyciągane do orbity okresowej, ale lokalnie w górnej półpłaszczyźnie są od niej odpychane.



Rysunek 3.2: Przykad stabilnej orbity okresowej odpychającej trajektorie w górnej półpłaszczyźnie

Dodajmy trzecią niezależną zmienną do układu (3.10)

$$\begin{cases} \dot{r} &= (1-r)(1-c\sin\theta), \\ \dot{\theta} &= 1, \\ \dot{z} &= z. \end{cases} \tag{3.12}$$

Równanie potoku ma postać $\varphi_t(r,\theta,z) = (1+(r-1)e^{c\cos\theta - c\cos(t+\theta)-t}, t+\theta, ze^t)$. Płaszczyzny transwersalne są zdefiniowane w sposób następujący:

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &\stackrel{\mathrm{df}}{=} \{(r,\theta,z) \in \mathbf{R}^+ \times S^1 \times \mathbf{R} \colon r > 0, \theta = 0\}, \\ \Sigma_2 &\stackrel{\mathrm{df}}{=} \{(r,\theta,z) \in \mathbf{R}^+ \times S^1 \times \mathbf{R} \colon r > 0, \theta = \pi\}. \end{aligned}$$

Odwzorowania Poincarégo są dane równaniami

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(r,z) &= \mathbf{P}_{\Sigma_1}(r,z) = (1+(r-1)e^{-2\pi}, ze^{2\pi}), \\ \mathbf{P}_1(r,z) &= \mathbf{P}_{\Sigma_1\Sigma_2}(r,z) = (1+(r-1)e^{2c-\pi}, ze^{\pi}), \\ \mathbf{P}_2(r,z) &= \mathbf{P}_{\Sigma_2\Sigma_1}(r,z) = (1+(r-1)e^{-2c-\pi}, ze^{\pi}). \end{aligned}$$

Macierze Jakobianowe powyższych odwzorowań dla $c = \pi$ są równe odpowiednio

$$\mathbf{DP}(1,0) = \begin{bmatrix} e^{-2\pi} & 0 \\ 0 & e^{2\pi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{DP}_1(1,0) = \begin{bmatrix} e^{\pi} & 0 \\ 0 & e^{\pi} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{DP}_2(1,0) = \begin{bmatrix} e^{-3\pi} & 0 \\ 0 & e^{\pi} \end{bmatrix}.$$

Ponieważ odwzorowanie $\mathbf{P}$ może być rozłożone jako $\mathbf{P} = \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_1$, to warunek $\mathbf{DP} = \mathbf{DP}_2 \cdot \mathbf{DP}_1$ musi być spełniony. Macierz $\mathbf{DP}_1$ posiada dwie wartości własne leżące poza kołem jednostkowym, czyli nie posiada ona kierunku stabilnego. Badana orbita okresowa stanowi przykład orbity siodłowej, która w pewnej części odpycha trajektorie we wszystkich kierunkach.

3.2 Metoda minimum odległości

W związku z uwagami zawartymi w poprzednim podrozdziale dotyczącymi ograniczeń metody OGY zostanie obecnie zaproponowana metoda, która może być zastosowana również w przypadku gdy nie istnieje rozkład macierzy $\mathbf{A}_i$ na kierunki stabilny i niestabilny.

W metodzie OGY sygnał sterujący jest dobierany tak, aby zepchnąć trajektorię na podrozmaitość stabilną orbity okresowej. W metodzie przedstawionej poniżej sygnał sterujący (zmiana parametru układu) obliczany jest w inny sposób, przy którym nie jest wykorzystywane istnienie stabilnego i niestabilnego kierunku macierzy $\mathbf{A}$. Zamiast wpychania trajektorii na podrozmaitość stabilną orbity okresowej, która może lokalnie odpychać trajektorie będziemy w każdej iteracji odwzorowania $\mathbf{P}$ zmieniać wartość parametru p tak, aby zminimalizować odległość trajektorii od orbity okresowej.

3.2.1 Metoda minimum odległości dla punktu stałego

Najpierw przedstawimy metodę stabilizacji punktu stałego odwzorowania płaszczyzny. Załóżmy, że odwzorowanie $\mathbf{P}$ zdefiniowane równaniem (3.1) posiada aproksymację pierwszego rzędu opisaną równaniem (3.2).

Ideą metody minimum odległości jest taki dobór wartości parametru p, aby $\xi_{i+1} = \mathbf{P}(\xi_i, p)$ leżało jak najbliżej punktu stałego ξ_F. Aby wyprowadzić wzór na wartość parametru sterującego wykorzystamy następujący lemat:

Lemat 3.1 *Niech* $f(p) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{A}\xi + \mathbf{w}p$*, gdzie* $\mathbf{A}$ *jest macierzą kwadratową wymiaru dwa,* $p \in \mathbf{R}$ *oraz* $\xi, \mathbf{w} \in \mathbf{R}^2$*. Wówczas dla*

$$p = -\frac{\mathbf{w}^T \mathbf{A}}{||\mathbf{w}||_2^2} \cdot \xi$$

funkcja $||f(\cdot)||_2$ *posiada minimum, gdzie* $||\cdot||_2$ *oznacza normę Euklidesową*[1]*.*

Dowód: Zapiszmy normę funkcji f w następującej postaci:

$$\|f(p)\|_2^2 = (\mathbf{A}\xi + \mathbf{w}p)^T(\mathbf{A}\xi + \mathbf{w}p) = \xi^T\mathbf{A}^T\mathbf{A}\xi + \xi^T\mathbf{A}^T\mathbf{w}p + p\mathbf{w}^T\mathbf{A}\xi + p\mathbf{w}^T\mathbf{w}p$$

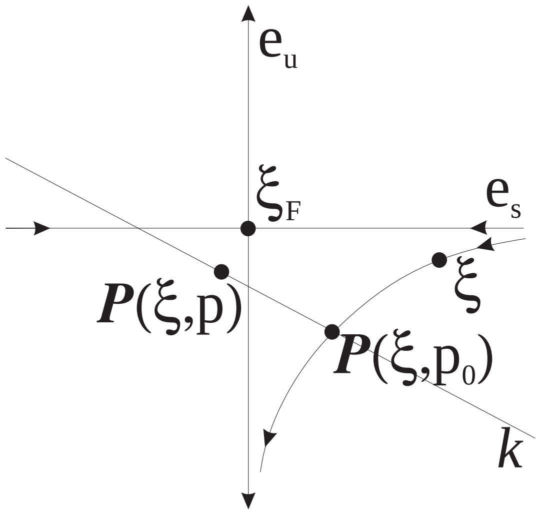
i policzmy jej pochodną względem p:

$$(||f(p)||_2^2)' = \xi^T\mathbf{A}^T\mathbf{w} + \mathbf{w}^T\mathbf{A}\xi + 2p\mathbf{w}^T\mathbf{w} = 2\mathbf{w}^T\mathbf{A}\xi + 2p||\mathbf{w}||_2^2.$$

Minimum może być znalezione z warunku $(||f(p)||_2^2)' = 0$. Warunek konieczny na istnienie minimum jest spełniony, gdyż $||f(p)||_2^2$ jest funkcją kwadratową zmiennej p. □

Stosując powyższy lemat do funkcji $f(p) = \mathbf{P}(\xi, p) - \xi_F$ oraz używając linearyzacji (3.2) otrzymujemy wartość parametru sterującego, dla którego odległość $\mathbf{P}(\xi, p)$ od punktu stałego jest minimalna:

$$p = p_0 - \frac{\mathbf{w}^T\mathbf{A}}{||\mathbf{w}||_2^2}(\xi - \xi_F). \tag{3.13}$$



Rysunek 3.3: Zasada działania metody minimum odległości: ξ_F — siodłowy punkt stały, $\mathbf{e}_s$, $\mathbf{e}_u$ — stabilny i niestabilny wektor własny, k — kierunek wektora $\mathbf{w}$, ξ — aktualny stan układu, $\mathbf{P}(\xi, p_0)$ — stan układu w następnej iteracji bez sterowania ($p = p_0$), $\mathbf{P}(\xi, p)$ — stan układu w następnej iteracji, dla parametru p obliczonego przy użyciu metody minimum odległości. Wartość p jest tak dobrana, że odległość punktu $\mathbf{P}(\xi, p)$ od punktu stałego ξ_F jest minimalna

Na Rys. 3.3 przedstawione zostało działanie opisanej powyżej metody sterowania. ξ jest aktualnym stanem układu. Bez sterowania ($p = p_0$) w następnej iteracji trajektoria przeszłaby w punkt $\mathbf{P}(\xi, p_0)$. Zmieniając parametr p możemy przesuwać obraz punktu ξ przez odwzorowanie $\mathbf{P}$ wzdłuż prostej k, która odpowiada kierunkowi wektora $\mathbf{w}$ (porównaj Rys. 3.3). Wybieramy taką wartość parametru p, aby odległość obrazu punktu ξ od punktu stałego ξ_F była minimalna.

[1] *Norma Euklidesowa* wektora $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ jest zdefiniowana jako $||\mathbf{x}||_2 = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)}$.

3.2.2 Metoda minimum odległości, wersja wielopunktowa

Opiszemy obecnie jak zastosować metodę minimum odległości do stabilizacji orbit okresowych. Załóżmy w ogólnym przypadku, że mamy n odwzorowań:

$$\mathbf{P}_i\colon \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R} \ni (\xi, p) \longrightarrow \mathbf{P}_i(\xi, p) \in \mathbf{R}^2, \tag{3.14}$$

$i = 1, \ldots, n$. Przypuśćmy ponadto, że $\mathbf{P}_i(\xi_{F_i}) = \xi_{F_{i+1}}$ dla $i = 1, \ldots, n-1$ oraz $\mathbf{P}_n(\xi_{F_n}) = \xi_{F_1}$, tzn. punkt ξ_{F_1} jest punktem stałym odwzorowania $\mathbf{P}_n \circ \cdots \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_1$. W przypadku gdy odwzorowania $\mathbf{P}_i$ są takie same mamy zwykłą orbitę okresową odwzorowania $\mathbf{P}_1$ o okresie n. Uogólnienie na przypadek różnych $\mathbf{P}_i$ będzie potrzebne do zastosowania tej metody do sterowania układów ciągłych.

Aby ustabilizować orbitę okresową $\xi_{F_1}, \xi_{F_2}, \ldots, \xi_{F_n}$ obserwujemy trajektorię układu. W momencie gdy trajektoria zbliży się do jednego z punktów $\xi_{F_1}, \xi_{F_2}, \ldots, \xi_{F_n}$ (np. ξ_{F_i}) rozpoczynamy sterowanie. Parametr p jest modyfikowany według wzoru:

$$p = p_0 - \frac{\mathbf{w}_i^T \mathbf{A}_i}{||\mathbf{w}_i||_2^2}(\xi - \xi_{F_i}), \tag{3.15}$$

gdzie $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{w}_i$ są współczynnikami linearyzacji odwzorowania $\mathbf{P}_i$ w otoczeniu punktu (ξ_{F_i}, p_0) (porównaj równanie (3.2)). W następnej iteracji trajektoria powinna przejść blisko kolejnego punktu na orbicie okresowej, co pozwoli na powtórzenie procedury.

3.2.3 Sterowanie układów ciągłych

Rozważmy układ dynamiczny opisany równaniem (3.4). Załóżmy, że równanie to dla $p = p_0$ definiuje ciągły układ dynamiczny posiadający atraktor chaotyczny oraz że γ jest należącą do atraktora niestabilną orbitą okresową rozważanego układu dla $p = p_0$. Zakładamy również, że przy małej zmianie parametru p atraktor chaotyczny i orbita okresowa nie znikają. Wybierzmy n punktów na orbicie okresowej ($\mathbf{x}_i$, $i = 1, \ldots, n$) i w każdym z tych punktów wybierzmy hiperpłaszczyznę Σ_i transwersalną do potoku zdefiniowanego równaniem (3.4). Oznaczmy przez $\mathbf{P}_i$ ($i = 1, \ldots, n$) uogólnione odwzorowanie Poincarégo prowadzące z otoczenia U_i punktu $\mathbf{x}_i$ w Σ_i do Σ_{i+1} ($\Sigma_{n+1} \overset{\mathrm{df}}{=} \Sigma_1$). Istnienie odwzorowań $\mathbf{P}_i$ wynika z tego, że punkty $\mathbf{x}_i$ należą do tej samej trajektorii oraz z transwersalności hiperpłaszczyzn Σ_i względem potoku (porównaj Twierdzenie 1.10).

W celu zastosowania metody minimum odległości do stabilizacji orbity okresowej γ obserwujemy przecięcia trajektorii systemu z płaszczyznami Σ_i. Jeśli punkt przecięcia ξ trajektorii z płaszczyzną Σ_i leży blisko punktu okresowego ξ_{F_i} to modyfikujemy parametr sterujący według wzoru (3.15). Parametr sterujący pozostaje stały, aż do wykrycia przecięcia z następną hiperpłaszczyzną. Dzięki takiemu sterowaniu minimalizujemy odległość punktu przecięcia trajektorii z następną hiperpłaszczyzną Σ_{i+1} i punktu okresowego $\xi_{F_{i+1}}$. Jeśli sygnał sterujący obliczony według wzoru (3.15) różni się od wartości nominalnej więcej niż wynosi dopuszczalna zmiana parametru $\delta p_{\max}$ (tzn. $|p - p_0| > \delta p_{\max}$) lub jeśli odległość punktu przecięcia ξ od punktu stałego jest większa niż $d_{\max}$ (tzn. $d(\xi, \xi_F) > d_{\max}$) to sygnał sterujący ustawiamy na wartość nominalną $p = p_0$.

3.2.4 Własności metody minimum odległości

Opisana metoda pozwala na stabilizację dowolnej orbity okresowej istniejącej wewnątrz dziwnego atraktora za pomocą niewielkich zmian jednego z parametrów układu. Metoda ta polega na modyfikacji jednego z parametrów układu w taki sposób, aby zminimalizować odległość trajektorii od stabilizowanej orbity okresowej. Zmiana parametru jest dokonywana przy każdym przecięciu płaszczyzny transwersalnej. W przypadku idealnym (brak zakłóceń i szumów w układzie) dopuszczalna zmiana parametru $\delta p_{\max}$ może być dowolnie mała. Do zastosowania metody nie jest potrzebna znajomość równań opisujących układ. Wszystkie parametry potrzebne do obliczenia sygnału sterującego (znalezienie orbit okresowych istniejących wewnątrz dziwnego atraktora, ich macierzy Jakobianowych, itp.) mogą być wyznaczone na podstawie szeregu czasowego pochodzącego z eksperymentów za pomocą metod opisanych w rozdziale 2. W celu zastosowania metody należy wyznaczyć 5 parametrów, dla każdego z n punktów.

W przypadku gdy tylko jedna zmienna systemu jest mierzalna to można wykorzystać metodę opóźnień czasowych odtwarzania pełnej wielowymiarowej trajektorii z jednowymiarowego szeregu czasowego [70].

3.2.5 Efektywność sterowania

Zbadamy obecnie problem, kiedy sterowanie jest efektywne. Lemat 3.1 gwarantuje minimalizację odległości trajektorii od punktu okresowego, ale nie pociąga za sobą zbieżności trajektorii do orbity okresowej.

Definicja 3.1 Mówimy, że sterowanie jest *efektywne, z poziomem błędu* δ, jeśli istnieje t_0, takie że dla $t > t_0$ odległość trajektorii od orbity okresowej jest mniejsza niż δ.

Stabilizacja punktu stałego

Rozważmy przypadek stabilizacji punktu stałego układu dyskretnego lub równoważnie stabilizację orbity okresowej układu ciągłego w wersji jednopunktowej. Niech $\mathbf{P}(\xi, p)$ będzie odwzorowaniem płaszczyzny zdefiniowanym przez (3.1). Bez straty ogólności możemy założyć, że $\mathbf{0} = [0, 0]^T$ jest punktem stałym odwzorowania $\mathbf{P}$ dla $p = 0$ (tzn. $\mathbf{P}(\mathbf{0}, 0) = \mathbf{0}$). Załóżmy, że liniowa aproksymacja odwzorowania $\mathbf{P}$ ma postać:

$$f(\xi, p) = \mathbf{A}\xi + \mathbf{w}p. \tag{3.16}$$

Postaramy się odpowiedzieć na pytanie dla jakich wartości macierzy $\mathbf{A}$ i wektora $\mathbf{w}$ dobierając parametr p zgodnie z metodą minimum odległości otrzymamy układ stabilny. Problem efektywności sterowania można potraktować ogólniej. Dla danego układu (3.16) z macierzą niestabilną $\mathbf{A}$ należy dobrać liniowe sprzężenie zwrotne $p = \mathbf{c}^T\xi$ tak, aby układ

$$f(\xi) = f(\xi, \mathbf{c}^T\xi) = \mathbf{A}\xi + \mathbf{w}\mathbf{c}^T\xi \tag{3.17}$$

był stabilny. Dobierając wektor $\mathbf{c}$ tak, aby wartości własne macierzy $\mathbf{A}+\mathbf{w}\mathbf{c}^T$ leżały wewnątrz okręgu jednostkowego otrzymujemy całą klasę metod sterowania umożliwiających stabilizację punktu stałego. Metody podejścia do tak postawionego problemu podane są przykładowo w pracy [52].

W niniejszej pracy nie będziemy jednak zainteresowani podaniem warunków jakie musi spełniać wektor $\mathbf{c}$, aby układ (3.17) był stabilny. Podane zostaną jedynie warunki kiedy algorytm obliczania wektora $\mathbf{c}$ oparty na metodzie minimum odległości powoduje ustabilizowanie układu. Wyprowadzimy również warunki na zachodzenie kryterium silniejszego niż stabilizacja. Z uwagi na konieczność spełnienia założenia o linearyzacji oraz dopuszczalną zmianę parametru sterującego sterowanie układu rozpoczynamy w momencie gdy odległość trajektorii od punktu stałego jest mniejsza od pewnej rzeczywistej liczby $d_{\max}$. Chcielibyśmy, aby po rozpoczęciu sterowania trajektoria nie uciekła poza koło $\mathbf{B}(\xi_F, d_{\max})$, tak abyśmy w następnej iteracji mogli kontynuować sterowanie. Interesować nas zatem będzie warunek zapewniający w każdym kroku zmniejszanie odległości trajektorii od orbity okresowej, co jest warunkiem silniejszym od stabilności układu.

W metodzie minimum odległości wybieramy parametr $p(\xi) = -||\mathbf{w}||_2^{-2}\mathbf{w}^T\mathbf{A}\xi$ tak, aby zminimalizować wyrażenie $||f(\xi, p)||_2$. Ponieważ wybór parametru p zależy od ξ, to f może być zapisana jako funkcja zmiennej ξ:

$$f(\xi) = \mathbf{A}\xi + \mathbf{w}p(\xi) = \mathbf{A}\xi - \frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\mathbf{A}}{||\mathbf{w}||_2^2}\xi = \left(I - \frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{||\mathbf{w}||_2^2}\right)\mathbf{A}\xi \stackrel{\text{df}}{=} \mathbf{W}\xi. \tag{3.18}$$

Oznaczmy

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = ||\mathbf{w}|| \cdot (\cos\phi, \sin\phi)^T. \tag{3.19}$$

Lemat 3.2 *Niech f, $\mathbf{A}$, $\mathbf{w}$ będą określone wzorami* (3.18), (3.19). *Niech λ będzie liczbą dodatnią mniejszą od* 1. *Wówczas*

$$\forall\xi \quad ||f(\xi)||_2 \leqslant \lambda||\xi||_2 \tag{3.20}$$

wtedy i tylko wtedy gdy

$$l_1(\mathbf{A}, \mathbf{w}) \stackrel{\text{df}}{=} \left((a_{11}\sin\phi - a_{21}\cos\phi)^2 + (a_{12}\sin\phi - a_{22}\cos\phi)^2\right)^{1/2} \leqslant \lambda < 1 \tag{3.21}$$

Dowód: Ponieważ odwzorowanie f jest liniowe, to wystarczy sprawdzić warunek (3.20) dla ξ należących do sfery jednostkowej ($||\xi||_2 = 1$). Wystarczy zatem sprawdzić, kiedy macierzowa 2-norma[2] macierzy $\mathbf{W}$ jest mniejsza lub równa od λ. W celu jej obliczenia zapiszemy macierz $\mathbf{W}$ w następujacej postaci:

$$\mathbf{W} = \left(I - \frac{\mathbf{w}\mathbf{w}^T}{||\mathbf{w}||_2^2}\right)\mathbf{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos^2\phi & \cos\phi\sin\phi \\ \cos\phi\cos\phi & \sin^2\phi \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \sin^2\phi & -\cos\phi\sin\phi \\ -\cos\phi\cos\phi & \cos^2\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Po prostych przekształceniach można zapisać macierz $\mathbf{W}^T\mathbf{W}$ w postaci:

$$\begin{pmatrix} c_1^2 & c_1c_2 \\ c_1c_2 & c_2^2 \end{pmatrix},$$

gdzie $c_1 = a_{11}\sin\phi - a_{21}\cos\phi$ i $c_2 = a_{12}\sin\phi - a_{22}\cos\phi$. Wartości własne macierzy $\mathbf{W}^T\mathbf{W}$ wynoszą $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = c_1^2 + c_2^2 = (a_{11}\sin\phi - a_{21}\cos\phi)^2 + (a_{12}\sin\phi - a_{22}\cos\phi)^2$. Zatem $||\mathbf{W}_2|| = \sqrt{\mu_2}$. Ostatecznie $||\mathbf{W}_2|| \leqslant \lambda$ wtedy i tylko wtedy gdy $\sqrt{\mu_2} \leqslant \lambda$. $\square$

Warunek (3.21) może zostać zapisany w postaci

$$A \cdot \cos 2\phi + B \cdot \sin 2\phi > C, \tag{3.22}$$

gdzie $A = a_{11}^2 + a_{12}^2 - a_{21}^2 - a_{22}^2$, $B = 2(a_{11}a_{21} + a_{12}a_{22})$ i $C = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 - 2$. Po wprowadzeniu zmiennej θ, zdefiniownej przez warunki: $\cos 2\theta = A/\sqrt{A^2 + B^2}$, $\sin 2\theta = B/\sqrt{A^2 + B^2}$ możemy powyższą nierówność zapisać w następującej postaci:

$$\cos(2\phi - 2\theta) > D = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{3.23}$$

Przy zadanej macierzy $\mathbf{A}$ mamy zatem warunek jaki musi spełniać argument wektora $\mathbf{w}$. W zależności od wartości D można wyróżnić trzy przypadki:

---

[2] 2-norma macierzy $\mathbf{B}$ jest zdefiniowana jako $||\mathbf{B}||_2 \stackrel{\text{df}}{=} \max_{||\xi||_2=1} ||\mathbf{B}\xi||_2$, gdzie norma $||\cdot||_2$ po prawej stronie równania jest normą euklidesową. Można udowodnić [31], że 2-norma macierzy $\mathbf{B}$ jest równa pierwiastkowi z największej wartości własnej macierzy $\mathbf{B}^T\mathbf{B}$.

1. $|D| \leqslant 1$ ($a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 \geqslant 1 + \det^2 \mathbf{A}$).
Wówczas ϕ spełnia (3.23) jeśli istnieje naturalne k, takie że $\phi - \theta \in [-\frac{1}{2}\arccos D + k\pi, \frac{1}{2}\arccos D + k\pi]$.

2. $D < -1$ ($a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 < \max(1 + \det^2 \mathbf{A}, 2)$).
Nierówność (3.23) jest spełniona dla wszystkich ϕ. Przypadek ten odpowiada małym wartościom elementów macierzy $\mathbf{A}$. Jeśli wszystkie elementy macierzy $\mathbf{A}$ są małe to trajektorie są przyciągane do punktu stałego i nie jest potrzebne sterowanie do osiągnięcia żądanego zachowania.

3. $D > 1$ ($2 < a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2 < 1 + \det^2 \mathbf{A}$).
Nie istnieje ϕ spełniające nierówność (3.23).

Rozważmy przypadek, gdy macierz $\mathbf{A}$ ma jedną stabilną i jedną niestabilną wartość własną ($|\lambda_s| < 1 < |\lambda_u|$). W celu znalezienia optymalnego położenia wektora $\mathbf{w}$ względem kierunków własnych macierzy $\mathbf{A}$, załóżmy że macierz $\mathbf{A}$ jest macierzą diagonalną postaci (3.3). W tym przypadku $\theta = 0$ i warunek (3.23) przyjmuje postać:

$$\cos 2\phi > \frac{\lambda_u^2 + \lambda_s^2 - 2}{\lambda_u^2 - \lambda_s^2}. \tag{3.24}$$

Z powyższej nierówności wynika, że najlepsze efekty sterowania można osiągnąć, gdy $2\phi = k\pi$, tzn. gdy wektor $\mathbf{w}$ jest równoległy do niestabilnego wektora własnego macierzy $\mathbf{A}$. Można wykazać, że w przypadku gdy wektory własne macierzy $\mathbf{A}$ są prostopadłe to θ jest kątem pomiędzy osią x a niestabilnym wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}$.

Rozważmy obecnie warunek zbieżności słabszy niż (3.20), w ktorym żądaliśmy, aby w każdej iteracji malała odległość trajektorii od orbity okresowej. Oznaczmy

$$l_2(\mathbf{A}, \mathbf{w}) \stackrel{\mathrm{df}}{=} a_{11}\sin^2\phi + a_{22}\cos^2\phi - (a_{12} + a_{21})\cos\phi\sin\phi. \tag{3.25}$$

Wykażemy, że jeśli $|l_2(\mathbf{A}, \mathbf{w})| < 1$ to trajektoria układu liniowego po zastosowaniu metody minimum odległości jest zbieżna do punktu stałego.

Lemat 3.3 *Niech f, $\mathbf{A}$, $\mathbf{w}$ będą takie jak w lemacie* 3.2. *Wówczas*

$$\forall \xi \quad ||f^n(\xi)||_2 \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \tag{3.26}$$

wtedy i tylko wtedy gdy

$$|l_2(\mathbf{A}, \mathbf{w})| = |a_{11}\sin^2\phi + a_{22}\cos^2\phi - (a_{12} + a_{21})\cos\phi\sin\phi| < 1. \tag{3.27}$$

Dowód: Ponieważ odwzorowanie f jest liniowe, to musimy sprawdzić kiedy obie wartości własne macierzy $\mathbf{W}$ zdefiniowanej równaniem (3.18) leżą wewnątrz okręgu jednostkowego. Wartości własne macierzy $\mathbf{W}$ są równe $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = a_{11}\sin^2\phi + a_{22}\cos^2\phi - (a_{12}+a_{21})\cos\phi\sin\phi$, co kończy dowód. □

Warunek w lemacie 3.2 jest silniejszy niż warunek w lemacie 3.3. Pierwszy zapewnia zmniejszenie w każdej iteracji odległości od punktu stałego, natomiast drugi zbieżność trajektorii. Dla przykładu rozważmy odwzorowanie Poincarégo z diagonalną macierzą Jakobianową o wartościach własnych $\lambda_u = 2$ i $\lambda_s = 0.5$. Warunek (3.21) jest spełniony dla $\phi \in [-0.464, 0.464] \cup [2.678, 3.605]$ co stanowi ok. 30% przedziału 2π, natomiast warunek (3.27) jest spełniony dla $\phi \in [-0.615, 0.615] \cup [2.526, 3.757]$ co stanowi ok. 40% przedziału 2π. Warunek (3.27) może okazać się zbyt słaby w rzeczywistych eksperymentach. Jest możliwe, że po rozpoczęciu sterowania trajektoria opuści małe otoczenie orbity okresowej ograniczone przez maksymalną dopuszczalną zmianę parametru lub efekty nieliniowe. Lematy 3.2 i 3.3 określają własności liniowej aproksymacji odwzorowania $\mathbf{P}$. Jako natychmiastowy wniosek otrzymujemy następujące twierdzenie opisujące zachowanie odwzorowania $\mathbf{P}$ w otoczeniu punktu stałego ξ_F:

Twierdzenie 3.1 *Załóżmy, że ξ_F jest punktem stałym odwzorowania $\mathbf{P}$ dla $p = p_0$. Załóżmy, że liniowa aproksymacja odwzorowania $\mathbf{P}$ ma postać*

$$\mathbf{P}(\xi, p) \approx \xi_F + \mathbf{A} \cdot (\xi - \xi_F) + \mathbf{w} \cdot (p - p_0). \tag{3.28}$$

Parametr p jest modyfikowany według wzoru $p(\xi) = p_0 - ||\mathbf{w}||_2^{-2}\mathbf{w}^T\mathbf{A}(\xi - \xi_F)$, co odpowiada przekształceniu odwzorowania $\mathbf{P}$ w funkcję jednej zmiennej $\mathbf{P}(\xi) = \mathbf{P}(\xi, p(\xi))$. Jeśli spełniona jest nierówność (3.21) *to istnieje otoczenie U punktu stałego ξ_F oraz $\lambda' < 1$ takie, że*

$$\forall \xi \in U \quad ||\mathbf{P}(\xi) - \xi_F||_2 \leqslant \lambda' ||\xi - \xi_F||_2. \tag{3.29}$$

Jeśli spełniona jest nierówność (3.27) *to istnieje otoczenie U punktu stałego ξ_F takie, że*

$$\forall \xi \in U \quad ||\mathbf{P}^n(\xi) - \xi_F||_2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.30}$$

Wersja wielopunktowa

Zajmiemy się obecnie metodą wielopunktową, w której sygnał sterujący (zmiana parametru) jest podawany kilkakrotnie w czasie jednego okresu orbity okresowej. Załóżmy, że mamy n odwzorowań $\mathbf{P}_i$ zdefiniowanych przez (3.14). Załóżmy, że ξ_{F_1} jest punktem stałym odwzorowania $\mathbf{P} = \mathbf{P}_n \circ \cdots \circ \mathbf{P}_2 \circ \mathbf{P}_1$ dla $p = p_0$. Oznaczmy $\xi_{F_{i+1}} = \mathbf{P}_i(\xi_{F_i}, p_0)$ dla $i = 1, \ldots, n-1$. Przypuśćmy, że liniowa aproksymacja odwzorowania $\mathbf{P}_i$ w otoczeniu punktu (ξ_{F_i}, p_0) jest równa:

$$\mathbf{P}_i(\xi, p) \approx \mathbf{P}_i(\xi_{F_i}, p_0) + \mathbf{A}_i(\xi - \xi_{F_i}) + \mathbf{w}_i(p - p_0). \tag{3.31}$$

Oznaczmy $\mathbf{u}_i \overset{\text{df}}{=} \mathbf{w}_i/||\mathbf{w}_i||$. Niech $\mathbf{u}_i = (u_{i1}, u_{i2})^T$. Zdefiniujmy $\mathbf{v}_i \overset{\text{df}}{=} (u_{i2}, -u_{i1})^T$. Spełnione są zależności:

$$\mathbf{u}_i^T\mathbf{u}_i = 1, \quad \mathbf{v}_i^T\mathbf{v}_i = 1, \quad \mathbf{v}_i^T\mathbf{u}_i = 0. \tag{3.32}$$

Macierz Jakobianowa odwzorowania $\mathbf{P}$ jest równa:

$$\mathbf{J} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{u}_n\mathbf{u}_n^T\right)\mathbf{A}_n\left(\mathbf{I} - \mathbf{u}_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}^T\right)\mathbf{A}_{n-1}\ldots\left(\mathbf{I} - \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T\right)\mathbf{A}_1. \tag{3.33}$$

Oznaczmy

$$\mathbf{W} \overset{\text{df}}{=} \mathbf{A}_n\left(\mathbf{I} - \mathbf{u}_{n-1}\mathbf{u}_{n-1}^T\right)\mathbf{A}_{n-1}\ldots\left(\mathbf{I} - \mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T\right)\mathbf{A}_1, \tag{3.34}$$

$$l_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{w}_n) \overset{\text{df}}{=} \left(\left(\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n\right)^2 + \left(\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n\right)^2\right)^{1/2}, \tag{3.35}$$

$$l_2(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{w}_n) \overset{\text{df}}{=} \mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n. \tag{3.36}$$

Poniższe twierdzenie podaje kilka warunków wystarczających na poprawne działanie metody wielopunktowej.

Twierdzenie 3.2 *Niech $\mathbf{P}_i$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{W}$, $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{u}_i$ będą zdefiniowane powyżej. Odwzorowania $\mathbf{P}_i$ są przekształcane w funkcje jednej zmiennej $\mathbf{P}_i(\xi) = \mathbf{P}_i(\xi, p_i(\xi))$, gdzie $p_i(\xi) = p_0 - ||\mathbf{w}_i||_2^{-2}\mathbf{w}_i^T\mathbf{A}_i(\xi - \xi_F)$. W ten sposób odwzorowanie $\mathbf{P} = \mathbf{P}_n \circ \cdots \circ \mathbf{P}_1$ staje się również funkcją jednej zmiennej.*

1. *Jeśli*

$$|l_2(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{w}_n)| = \left|\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n\right| < 1 \tag{3.37}$$

to istnieje otoczenie U punktu stałego ξ_{F_1}, takie że

$$\forall \xi \in U \quad ||\mathbf{P}^n(\xi)||_2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{3.38}$$

2. *Jeśli*

$$l_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{A}_n, \mathbf{w}_n) = \left(\left(\mathbf{v}_n^T \mathbf{W} \mathbf{v}_n \right)^2 + \left(\mathbf{v}_n^T \mathbf{W} \mathbf{u}_n \right)^2 \right)^{1/2} < 1 \tag{3.39}$$

to istnieje otoczenie U punktu stałego ξ_{F_1} oraz $\lambda < 1$, takie że

$$\forall \xi \in U \quad ||\mathbf{P}(\xi)||_2 \leqslant \lambda ||\xi||_2. \tag{3.40}$$

3. *Jeśli dla każdego $i = 1, \ldots, n$ zachodzi*

$$l_1(\mathbf{A}_i, \mathbf{w}_i) = \left((a_{i11} u_{i1} - a_{i21} u_{i2})^2 + (a_{i12} u_{i1} - a_{i22} u_{i2})^2 \right)^{1/2} < 1 \tag{3.41}$$

to istnieją otoczenia U_i punktów ξ_{F_i} oraz $\lambda < 1$ takie, że dla każdego $i = 1, \ldots, n$

$$\forall \xi \in U_i \quad ||\mathbf{P}_i(\xi)||_2 \leqslant \lambda ||\xi||_2. \tag{3.42}$$

Dowód:

*ad.*1: Dowód oparty jest na metodzie podanej w pracy [3]. Wyznaczymy wartości własne macierzy $\mathbf{J}$. Skorzystamy w tym celu z faktu, że wartości własne macierzy $\mathbf{J}$ i $\mathbf{J}' \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}$ są równe gdzie $\mathbf{T}$ jest macierzą zmiany bazy [53]. Wybierzmy następującą macierz przejścia:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} u_{n2} & -u_{n1} \\ u_{n1} & u_{n2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n^T \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix}.$$

Łatwo można sprawdzić, że

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T = \begin{pmatrix} u_{n2} & u_{n1} \\ -u_{n1} & u_{n2} \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_n \quad \mathbf{u}_n).$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}' &= \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n^T \\ \mathbf{u}_n^T \end{pmatrix} \left(\mathbf{I} - \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T \right) \mathbf{W} \left(\mathbf{v}_n \quad \mathbf{u}_n \right) \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n^T (\mathbf{I} - \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T) \mathbf{W} \mathbf{v}_n & \mathbf{v}_n^T (\mathbf{I} - \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T) \mathbf{W} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_n^T (\mathbf{I} - \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T) \mathbf{W} \mathbf{v}_n & \mathbf{u}_n^T (\mathbf{I} - \mathbf{u}_n \mathbf{u}_n^T) \mathbf{W} \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n^T \mathbf{W} \mathbf{v}_n - \overbrace{\mathbf{v}_n^T \mathbf{u}_n}^{=0} \mathbf{u}_n^T \mathbf{W} \mathbf{v}_n & \mathbf{v}_n^T \mathbf{W} \mathbf{u}_n - \overbrace{\mathbf{v}_n^T \mathbf{u}_n}^{=0} \mathbf{u}_n^T \mathbf{W} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_n^T \mathbf{W} \mathbf{v}_n - \underbrace{\mathbf{u}_n^T \mathbf{u}_n}_{=1} \mathbf{u}_n^T \mathbf{W} \mathbf{v}_n & \mathbf{u}_n^T \mathbf{W} \mathbf{u}_n - \underbrace{\mathbf{u}_n^T \mathbf{u}_n}_{=1} \mathbf{u}_n^T \mathbf{W} \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n^T \mathbf{W} \mathbf{v}_n & \mathbf{v}_n^T \mathbf{W} \mathbf{u}_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Wartości własne macierzy $\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}$ są zatem równe: $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = \mathbf{v}_n^T \mathbf{W} \mathbf{v}_n$. Zbieżność trajektorii jest równoważna temu, aby obie wartości własne miały wartości bezwzględne mniejsze od 1 czyli $|\mathbf{v}_n^T \mathbf{W} \mathbf{v}_n| < 1$.

*ad.*2: Obliczmy 2-normę macierzy $\mathbf{J}$. Jest ona równa pierwiastkowi największej wartości własnej macierzy $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$. Obliczmy $\mathbf{J}'^T\mathbf{J}'$:

$$\mathbf{J}'^T \mathbf{J}' = (\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1})^T \mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\mathbf{J}^T\mathbf{T}^T\mathbf{T}\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}\mathbf{J}^T\mathbf{J}\mathbf{T}^{-1}.$$

Zatem macierze $\mathbf{J}'^T\mathbf{J}'$ i $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ są podobne i na podstawie niezależności wartości własnych macierzy odwzorowania liniowego od wyboru bazy macierze $\mathbf{J}'^T\mathbf{J}'$ i $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ mają równe wartości własne.

Korzystając z (3.43) możemy obliczyć

$$\begin{aligned}\mathbf{J}'^T\mathbf{J}' &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n & 0 \\ \mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n & \mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n & \mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n \\ \mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n & \mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Równanie charakterystyczne macierzy $\mathbf{J}'^T\mathbf{J}'$ ma postać:

$$(\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n-\lambda)(\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n-\lambda)-\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n=0,$$

$$\lambda^2-\lambda(\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n+\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n)=0.$$

Wartości własne macierzy $\mathbf{J}^T\mathbf{J}$ są zatem równe:

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=(\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n)^2+(\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n)^2,$$

zaś 2-norma macierzy $\mathbf{J}$ wynosi:

$$||\mathbf{J}||_2=\left((\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{v}_n)^2+(\mathbf{v}_n^T\mathbf{W}\mathbf{u}_n)^2\right)^{1/2}. \tag{3.44}$$

*ad.*3: Należy zastosować część pierwszą Twierdzenia 3.1 do każdego z odwzorowań $\mathbf{P}_i$. □

Uwaga 3.1 *Z Twierdzenia* 1.9 *wynika, że wartość* $l_2(\mathbf{A}_1,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{A}_n,\mathbf{w}_n)$ *nie zależy od wyboru, która z macierzy* $\mathbf{A}_1,\ldots\mathbf{A}_n$ *jest pierwsza. Dla wszystkich wyborów dostaniemy tę samą charakteryzację działania metody. Inaczej przedstawia się sytuacja w przypadku części drugiej twierdzenia. Wartość* $l_1(\mathbf{A}_1,\mathbf{w}_1,\ldots,\mathbf{A}_n,\mathbf{w}_n)$ *zależy od wyboru pierwszej macierzy i w ogólnym przypadku zastosowanie tego punktu może dać różne charakteryzacje zachowania sterowanego układu. W celu zapewnienia działania metody wystarczy, żeby dla jednego ponumerowania macierzy warunek z założenia zachodził. Wielkość w punkcie trzecim twierdzenia została oznaczona jako* $l_1(\mathbf{A}_i,\mathbf{w}_i)$. *Nie ma tu sprzeczności oznaczeń z punktem pierwszym, ponieważ zachodzi następująca równoważność:*

$$(a_{i11}u_{i1}-a_{i21}u_{i2})^2+(a_{i12}u_{i1}-a_{i22}u_{i2})^2=\left(\mathbf{v}_i^T\mathbf{A}_i\mathbf{v}_i\right)^2+\left(\mathbf{v}_i^T\mathbf{A}_i\mathbf{u}_i\right)^2.$$

Wszystkie trzy warunki w Twierdzeniu 3.2 pociągają za sobą poprawne działanie metody sterowania. Pierwszy zapewnia zbieżność trajektorii odwzorowania $\mathbf{P}$ do punktu stałego; drugi — zmniejszanie odległości trajektorii od punktu stałego w każdej iteracji odwzorowania $\mathbf{P}$; natomiast trzeci zapewnia zmniejszanie odległości trajektorii od orbity okresowej przy iteracji każdego z odwzorowań $\mathbf{P}_i$ w małym otoczeniu orbity okresowej. Trzeci warunek pociąga za sobą warunek drugi, bo jeśli odległość maleje pod działaniem każdego z odwzorowań $\mathbf{P}_i$ to maleje ona również pod działaniem pełnego odwzorowania $\mathbf{P}$. Warunek drugi jest z kolei mocniejszy od warunku pierwszego. Warunek trzeci jest konsekwencją części drugiej Twierdzenia 3.1. Części pierwszej nie można przedłużyć na przypadek wielopunktowy ponieważ na podstawie wartości własnych macierzy nie można wyciągnąć wniosku na temat wartości własnych ich iloczynu.

W lematach i twierdzeniach tego rozdziału nie zakładaliśmy istnienia kierunków stabilnych i niestabilnych macierzy Jakobianowych. Dlatego też można je stosować dla dowolnych odwzorowań i dowolnych orbit okresowych. Możliwe jest również stosowanie ich jako kryterium rozstrzygające możliwość ustabilizowania orbity okresowej odpychającej trajektorie we wszystkich kierunkach (dwie niestabilne wartości własne). Twierdzenia te można stosować praktycznie w niezmienionej postaci jako charakteryzację sterowania dla układów ciągłych. Wystarczy w tym celu zastosować je dla punktu stałego (lub orbity okresowej) odwzorowania Poincarégo odpowiadającego stabilizowanej orbicie okresowej układu ciągłego.

3.2.6 Optymalny dobór parametrów.

Działanie metody zależy od doboru kilku parametrów. Jednym z istotnych parametrów jest $d_{\max}$, który określa kiedy należy uaktywniać sygnał sterujący. Po wykryciu przecięcia trajektorii z jedną z płaszczyzn transwersalnych obliczana jest odległość d punktu przecięcia od orbity okresowej. Jeśli jest ona większa od $d_{\max}$ to sygnał sterujący ustawiany jest na wartość nominalną (brak sterowania). Jeśli $d \leqslant d_{\max}$ to parametr sterujący (parametr układu) jest obliczany ze wzoru (3.15). Postępowanie takie w przypadku układu rzeczywistego zwiększa opóźnienie z jakim sygnał sterujący jest podawany do układu jednak w większości zastosowań jest nieuniknione. Inną możliwością jest nie przeprowadzanie testu odległości i podawanie sygnału sterującego zawsze po wykryciu przecięcia. Rozwiązanie to jednak nie daje poprawnych wyników w większości przypadków ponieważ orbita okresowa może przecinać jedną płaszczyznę wielokrotnie. Ponadto dokładność aproksymacji liniowej może nie być wystarczająca w dużych otoczeniach. Wartość $d_{\max}$ nie może być zbyt mała ponieważ szum występujący w układach rzeczywistych mógłby spowodować opuszczenie przez trajektorię zbyt małego otoczenia punktu stałego. Ponadto zmniejszanie d_{max} powoduje zwiększanie czasu trwania przejściowego przebiegu chaotycznego zanim trajektoria po raz pierwszy trafi w otoczenie orbity okresowej i będziemy mogli rozpocząć sterowanie. Podczas eksperymentów z obwodem Chuy używana była wartość $d_{max} = 0.01$ przy czym odległości były obliczane po znormalizowaniu zmiennych do przedziału $[0, 1]$.

Innym ważnym parametrem jest liczba punktów na orbicie okresowej, w których modyfikujemy sygnał sterujący, oraz położenie płaszczyzn transwersalnych. Wybór płaszczyzn transwersalnych zmienia współczynniki aproksymacji liniowej $\mathbf{A}_i$ i $\mathbf{w}_i$ uogólnionych odwzorowań Poincarégo. Z poprzednich rozważań wynika, że najbardziej efektywne sterowanie osiągniemy, jeśli niestabilne wartości własne macierzy $\mathbf{A}_i$ będą możliwie małe i w przybliżeniu równe sobie co do wartości bezwzględnej. Wektor $\mathbf{w}$ w przypadku metody jednopunktowej powinien być równoległy do niestabilnego wektora własnego macierzy $\mathbf{A}$. Jako kryteria wyboru liczby i położenia płaszczyzn transwersalnych w przypadku metody wielopunktowej można stosować Twierdzenie 3.2.

Wpływ doboru płaszczyzn transwersalnych na działanie metody zostanie przedyskutowany na wielu przykładach w dalszej części rozdziału. Omówimy również wpływ błędów wyznaczenia punktów stałych oraz innych wielkości niezbędnych do obliczania sygnału sterującego na działanie metody.

3.3 Sterowanie dwupołożeniowe

Poprzednio zajmowaliśmy się przypadkiem, gdy parametr p mógł przyjmować wartości z przedziału $[p - \delta p_{\max}, p + \delta p_{\max}]$. Okazuje się, że efektywne sterowanie można osiągnąć również wtedy, gdy parametr sterujący może być ustawiony tylko na jedną z dwóch wartości, np. p_1 i p_2, $p_1 < p_2$. Motywacją do zajęcia się takim przypadkiem jest łatwiejsza implementacja sterowania dwupołożeniowego niż sterowania za pomocą sygnału, który może przyjmować wiele wartości. Zdefiniujmy $p_0 \stackrel{\text{df}}{=} (p_1 + p_2)/2$ oraz $\Delta_p \stackrel{\text{df}}{=} (p_2 - p_1)/2$. Załóżmy podobnie jak poprzednio, że $\mathbf{P}$ jest odwzorowaniem płaszczyzny zależnym od parametru p, oraz że ξ_F jest punktem stałym odwzorowania $\mathbf{P}$ dla $p = p_0$. Załóżmy, że Δ_p jest na tyle małe, że dla $p = p_1$ i $p = p_2$ układ pozostaje chaotyczny oraz punkt stały ξ_F nie znika (jego położenie może ulec niewielkiej zmianie). W celu ustabilizowania punktu stałego obliczamy wartość p według jednej z metod sterowania i jako parametr sterujący wybieramy

$$p' = p_0 + \Delta_p \mathrm{sgn}(p - p_0) = \begin{cases} p_2 & \text{jeśli} \quad p \geqslant p_0, \\ p_1 & \text{jeśli} \quad p < p_0. \end{cases}$$

Do obliczenia wartości p możemy wykorzystać dowolną opisaną uprzednio metodę sterowania, np. metodę OGY, modyfikację Dressler-Nitschego lub metodę minimum odległości.

Przez wybór jednej z wartości p_1 i p_2 zmuszamy trajektorię do ruchu w pożądanym kierunku. Jeśli wybierzemy odpowiednio wiele płaszczyzn transwersalnych do orbity okresowej, przy przecięciu z którymi obliczamy i przykładamy sygnał sterujący, to trajektoria nie zdąży uciec daleko od orbity okresowej i przy przecięciu z następną płaszczyzną będziemy mieli szansę skorygować błąd. Jest oczywiste, że przy takim rodzaju sterowania musimy zmieniać parametr sterujący częściej niż przy sterowaniu parametrem ciągłym.

3.3.1 Własności metody dwupołożeniowej

Opisana metoda pozwala na stabilizację dowolnej orbity okresowej zanurzonej w dziwnym atraktorze, za pomocą niewielkich zmian jednego z parametrów układu, w przypadku gdy parametr ten może przyjmować tylko dwie wartości. W przypadku idealnym (brak zakłóceń i szumów w układzie) dopuszczalna zmiana parametru Δ_p może być dowolnie mała. Do zastosowania metody nie jest potrzebna znajomość równań opisujących układ. Wszystkie parametry potrzebne do obliczenia sygnału sterującego (położenie orbit okresowych, ich macierze Jakobianowe) mogą być wyznaczone na podstawie znajomości szeregu czasowego pochodzącego z układu za pomocą metod opisanych w rozdziale 2. W celu zastosowania metody należy wyznaczyć cztery parametry, dla każdej z n płaszczyzn transwersalnych.

Parametry potrzebne do sterowania mogą być obliczone nawet wtedy, gdy możemy ustawić parametr p tylko na wartości p_1 i p_2. Oznaczmy punkty stałe dla parametru p równego p_1 i p_2 odpowiednio przez ξ_F^1 i ξ_F^2. Ponieważ położenie punktów przecięcia orbity okresowej z płaszczyznami Σ_i zmienia się liniowo wraz ze zmianą parametru sterującego (dla małych zmian parametru), to $\xi_F = (\xi_F^1 + \xi_F^2)/2$ jest aproksymacją położenia punktu stałego dla parametru p_0. Podobnie można obliczyć macierz Jakobianową w punkcie ξ_F dla $p = p_0$ oraz pochodną odwzorowania $\mathbf{P}$ po parametrze p w punkcie $p = p_0$.

Podobnie jak dla wcześniej opisanych metod w przypadku gdy tylko jedna zmienna systemu jest mierzalna można wykorzystać metodę opóźnień czasowych odtwarzania pełnej wielowymiarowej trajektorii z jednowymiarowego szeregu czasowego [70].

3.3.2 Efektywność sterowania

Obecnie przedyskutowany zostanie problem doboru parametru Δ_p oraz liczby i położenia n punktów na orbicie okresowej w przypadku sterowania dwupołożeniowego. Rozważmy przypadek $n = 1$. Podobnie jak poprzednio załóżmy, że $\mathbf{P}(\xi, p)$ jest różniczkowalnym odwzorowaniem płaszczyzny, zależnym od parametru p, ξ_F jest punktem stałym dla $p = p_0$ oraz f zdefiniowane przez (3.16) jest liniową aproksymacją odwzorowania $\mathbf{P}$.

W przypadku sterowania dwupołożeniowego nie jesteśmy w stanie zapewnić stałego zmniejszania odległości od orbity okresowej w kolejnych iteracjach, ani nawet zbieżności trajektorii do stabilizowanej orbity okresowej. Wynika to stąd, że trajektoria startująca z punktu okresowego ξ_F ucieka z niego $(\mathbf{P}(\xi_F) = \mathbf{P}(\xi_F, p(\xi_F)) = \mathbf{P}(\xi_F, p_0 + \Delta_p) \approx \xi_F + \mathbf{w}\Delta_p)$.

Podanie sygnału sterującego $p(\xi)$ odpowiada z matematycznego punktu widzenia przekształceniu funkcji $\mathbf{P}$ w funkcję jednej zmiennej:

$$\mathbf{P}(\xi) = \mathbf{P}(\xi, p(\xi)). \tag{3.45}$$

Zajmiemy się obecnie własnościami dynamicznymi tego zmodyfikowanego odwzorowania $\mathbf{P}$ w otoczeniu punktu stałego.

Użyjemy następującego kryterium zapewniającego efektywność metody: jeśli istnieje małe otoczenie U takie, że

$$\mathbf{P}(U) \subset U \tag{3.46}$$

to sterowanie w sensie Definicji 3.1 będzie efektywne, z poziomem błędu δ równym promieniowi najmniejszego koła o środku w punkcie ξ_F zawierającego zbiór U. W tym przypadku dowolna trajektoria startująca z otoczenia U punktu ξ_F pozostanie w nim na zawsze. Warunek (3.46) jest jedynie warunkiem wystarczającym i warunki na poprawne działanie metod sterowania podane w niniejszym podrozdziale nie są ściśle równoważne poprawnemu działaniu metody. Mimo to, stwierdzono, że dobrze nadają się jako kryteria przy poszukiwaniu optymalnej pozycji punktów na orbicie okresowej.

Wprowadźmy następujące oznaczenia. Niech C_δ, D_δ będą otwartymi pasami odpowiednio pionowym i poziomym zaś $B_{\delta_1\delta_2}$ prostokątnym otoczeniem zera w $\mathbf{R}^2$ zdefiniowanymi w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
C_\delta &= \{\xi = [\xi_1, \xi_2]^T : |\xi_1| < \delta\}, \\
D_\delta &= \{\xi = [\xi_1, \xi_2]^T : |\xi_2| < \delta\}, \\
B_{\delta_1\delta_2} &= C_{\delta_1} \cap D_{\delta_2}.
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

Metoda OGY

Najpierw zajmiemy się przypadkiem gdy wartość p jest obliczana przy użyciu metody OGY. W tym przypadku odwzorowanie $\mathbf{P}$ jest na skutek sterowania modyfikowane do postaci

$$
\mathbf{P}(\xi) = \mathbf{P}(\xi, p(\xi)) = \mathbf{P}\left(\xi, p_0 + \Delta_p \operatorname{sgn}\left(-\frac{\lambda_u \mathbf{f}_u^T}{\mathbf{f}_u^T \mathbf{w}} \cdot (\xi - \xi_F)\right)\right). \tag{3.48}
$$

Oznaczmy

$$
f(\xi) = \mathbf{A}\xi + \mathbf{w}p(\xi) = \mathbf{A}\xi + \mathbf{w} \cdot \Delta_p \cdot \operatorname{sgn}\left(-\frac{\lambda_u \mathbf{f}_u^T}{\mathbf{f}_u^T \mathbf{w}} \cdot \xi\right). \tag{3.49}
$$

Lemat 3.4 *Niech f będzie jak zdefiniowano powyżej. Załóżmy, że $\mathbf{A}$ jest macierzą diagonalną zdefiniowaną przez* (3.3) *oraz $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$ spełnia warunki $w_1, w_2 \neq 0$. Niech δ będzie dodatnią liczbą rzeczywistą. Niech C_δ, D_δ będą pasami zdefiniowanymi w* (3.47). *Wówczas:*

$$
\left(\frac{\delta(|\lambda_u| - 1)}{|w_1|} < \Delta_p < \frac{\delta}{|w_1|}\right) \Leftrightarrow (f(C_\delta) \subset C_\delta), \tag{3.50}
$$

$$
\left(\Delta_p < \frac{\delta(1 - |\lambda_s|)}{|w_2|}\right) \Leftrightarrow (f(D_\delta) \subset D_\delta). \tag{3.51}
$$

Dowód: Ponieważ macierz $\mathbf{A}$ jest diagonalna to wektory własne oraz kontrawariantne wektory własne są równe: $\mathbf{e}_s = \mathbf{f}_s = [0, 1]^T$, $\mathbf{e}_u = \mathbf{f}_u = [1, 0]^T$. Zatem $\operatorname{sgn}\left(-\frac{\lambda_u \mathbf{f}_u^T}{\mathbf{f}_u^T \mathbf{w}} \cdot \xi\right) = \operatorname{sgn}\left(-\frac{\lambda_u \xi_1}{w_1}\right)$.

$$
f(\xi) = \begin{bmatrix} \lambda_u \xi_1 \\ \lambda_s \xi_2 \end{bmatrix} + \Delta_p \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \cdot \operatorname{sgn}\left(-\frac{\lambda_u \xi_1}{w_1}\right).
$$

Pierwsza współrzędna f jest równa:

$$
f_1(\xi) = \lambda_u \xi_1 + w_1 \Delta_p \operatorname{sgn}\left(-\frac{\lambda_u \xi_1}{w_1}\right).
$$

Przekształcając warunek $f(C_\delta) \subset C_\delta$ otrzymujemy ciąg warunków równoważnych:

$$
\xi \in C_\delta \Rightarrow f(\xi) \in C_\delta,
$$

$$
\forall \xi \in C_\delta \quad f(\xi) \in C_\delta,
$$

$$\forall \xi : |x_1| < \delta \quad |f_1(\xi)| < \delta,$$
$$\forall |\xi_1| < \delta \quad \left| \lambda_u \xi_1 + w_1 \Delta_p \mathrm{sgn}\left(-\frac{\lambda_u \xi_1}{w_1}\right)\right| < \delta,$$
$$\forall |\xi_1| < \delta \quad \left| \frac{\lambda_u \xi_1}{w_1} + \Delta_p \mathrm{sgn}\left(-\frac{\lambda_u \xi_1}{w_1}\right)\right| < \frac{\delta}{|w_1|},$$
$$\forall |\xi_1| < \delta \quad \left| \left|\frac{\lambda_u \xi_1}{w_1}\right| \mathrm{sgn}\left(\frac{\lambda_u \xi_1}{w_1}\right) + \Delta_p \mathrm{sgn}\left(-\frac{\lambda_u \xi_1}{w_1}\right)\right| < \frac{\delta}{|w_1|},$$
$$\forall |\xi_1| < \delta \quad \left| \left|\frac{\lambda_u \xi_1}{w_1}\right| - \Delta_p \right| < \frac{\delta}{|w_1|},$$
$$\forall |\xi_1| < \delta \quad -\frac{\delta}{|w_1|} < \Delta_p - \left|\frac{\lambda_u \xi_1}{w_1}\right| < \frac{\delta}{|w_1|},$$
$$\forall |\xi_1| < \delta \quad -\frac{\delta}{|w_1|} + \left|\frac{\lambda_u \xi_1}{w_1}\right| < \Delta_p < \frac{\delta}{|w_1|} + \left|\frac{\lambda_u \xi_1}{w_1}\right|,$$
$$-\frac{\delta}{|w_1|} + \left|\frac{\delta \lambda_u}{w_1}\right| < \Delta_p < \frac{\delta}{|w_1|},$$
$$-\frac{\delta(1-|\lambda_u|)}{|w_1|} < \Delta_p < \frac{\delta}{|w_1|}.$$

W ten sposób udowodniliśmy pierwszą równoważność. Druga współrzędna f jest równa:

$$f_2(\xi) = \lambda_s \xi_2 + w_2 \Delta_p \mathrm{sgn}\left(-\frac{\lambda_u \xi_1}{w_1}\right).$$

Postępując podobnie jak poprzednio otrzymujemy ciąg warunków równoważnych:

$$\xi \in D_\delta \Rightarrow f(\xi) \in D_\delta,$$
$$\forall \xi \in D_\delta \quad f(\xi) \in D_\delta,$$
$$\forall \xi : |\xi_2| < \delta \quad |f_2(\xi)| < \delta,$$
$$\forall \xi_1 \forall |\xi_2| < \delta \quad \left| \lambda_s \xi_2 + w_2 \Delta_p \mathrm{sgn}\left(-\frac{\lambda_u \xi_1}{w_1}\right)\right| < \delta,$$
$$\forall |\xi_2| < \delta \quad |\lambda_s \xi_2| + |w_2 \Delta_p| < \delta,$$
$$|\lambda_s \delta| + |w_2 \Delta_p| < \delta,$$
$$\Delta_p < \frac{\delta(1-|\lambda_s|)}{|w_2|},$$

co dowodzi drugiej części lematu. □

Kolejny lemat jest wnioskiem z poprzedniego lematu i dotyczy przypadku ogólnego, gdy macierz Jakobianowa $\mathbf{A}$ niekoniecznie jest macierzą diagonalną.

Lemat 3.5 *Niech f będzie odwzorowaniem zdefiniowanym przez* (3.49)*, Załóżmy, że macierz $\mathbf{A}$ posiada stabilną i niestabilną wartość własną. Załóżmy ponadto, że niestabilna wartość własna λ_u macierzy $\mathbf{A}$ spełnia warunek $|\lambda_u| < 2$ oraz $\mathbf{f}_u^T \mathbf{w} \neq 0$. Niech ε będzie dowolną liczbą większą od zera. Wówczas istnieje otoczenie U punktu $\mathbf{0} = (0,0)^T$ zawarte wewnątrz kuli $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ oraz Δ_p takie, że*

$$f(U) \subset U. \tag{3.52}$$

Dowód: Przeprowadźmy liniową zamianę zmiennych w taki sposób, aby w nowych współrzędnych macierz $\mathbf{A}$ była macierzą diagonalną zdefiniowaną równaniem (3.3). Jest to możliwe ponieważ macierz $\mathbf{A}$ posiada dwie różne rzeczywiste wartości własne. Ponieważ z założenia wektor $\mathbf{w}$ nie był równoległy do wektora własnego $\mathbf{e}_u$ to po transformacji będzie to nadal prawda czyli $w_1 \neq 0$. Rozważmy najpierw przypadek $w_2 \neq 0$. Ustalmy $\varepsilon > 0$.

Dobierzmy $\delta_1, \delta_2 < \varepsilon/2$ tak, aby

$$\frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{|w_1|(1-|\lambda_s|)}{|w_2|}.$$

Ponieważ λ_s jest stabilną wartością własną ($|\lambda_s| < 1$) to powyższy stosunek jest dodatni. Δ_p wybieramy równe:

$$\Delta_p = \frac{\delta_1|\lambda_u|}{2|w_1|}.$$

Łatwo można sprawdzić, że dla tak dobranych δ_1, δ_2, Δ_p przy założeniu $|\lambda_s| < 1 < |\lambda_u| < 2$ spełnione są następujące nierówności:

$$\frac{\delta_1(|\lambda_u|-1)}{|w_1|} < \Delta_p < \frac{\delta_1}{|w_1|}, \quad \Delta_p < \frac{\delta_2(1-|\lambda_s|)}{|w_2|}. \tag{3.53}$$

Wybierzmy otoczenie U punktu $\mathbf{0}$ w sposób następujący:

$$U \stackrel{\mathrm{df}}{=} B_{\delta_1\delta_2} = C_{\delta_1} \cap D_{\delta_2}.$$

Dzięki warunkowi $\delta_1, \delta_2 < \varepsilon/2$ mamy $U \subset B(\mathbf{0}, \varepsilon)$. Udowodnimy, że spełniony jest warunek (3.52). Niech $\xi \in U$. Na podstawie pierwszego z warunków (3.53) i pierwszej części Lematu 3.4 mamy $f(\xi) \in C_{\delta_1}$. Na podstawie drugiego z warunków (3.53) i drugiej części Lematu 3.4 mamy $f(\xi) \in C_{\delta_2}$. Zatem $f(\xi) \in C_{\delta_1} \cap D_{\delta_2} = U$.

Jeśli $w_2 = 0$ to $f_2(\xi) = \lambda_s \xi_2$, a ponieważ $|\lambda_s| < 1$ to warunek $f(D_\delta) \subset D_\delta$ jest spełniony dla dowolnych δ i Δ_p. Mamy w tym wypadku dowolność wyboru δ_2. Niech przykładowo $\delta_2 = \delta_1 < \varepsilon/2$. Δ_p wybieramy jak poprzednio. Dalej dowód przebiega analogicznie, poza tym, że nie korzystamy z drugiej części Lematu 3.4. □

Poprzednie lematy dotyczyły odwzorowań liniowych f, z siodłowym punktem stałym $(0,0)^T$. Poniższe twierdzenie uogólnia te wyniki dla dowolnych odwzorowań.

Twierdzenie 3.3 *Niech* $\mathbf{P}$ *będzie odwzorowaniem zdefiniowanym przez* (3.1), ξ_F *punktem stałym odwzorowania* $\mathbf{P}$. *Załóżmy, że macierz Jakobianowa odwzorowania* $\mathbf{P}$ *w punkcie* ξ_F *ma dwie wartości własne (stabilną i niestabilną), oraz że niestabilna wartość własna* λ_u *spełnia warunek* $|\lambda_u| < 2$. *Załóżmy ponadto, że* $\mathbf{f}_u^T\mathbf{w} \neq 0$. *Wówczas dla każdego* $\varepsilon > 0$ *istnieje otwarte otoczenie* U *punktu stałego* ξ_F *zawarte wewnątrz kuli* $B(\xi_F, \varepsilon)$ *oraz* Δ_p *takie, że*

$$\forall \xi \in U \qquad \mathbf{P}\left(\xi, p_0 + \Delta_p \mathrm{sgn}\left(-\frac{\lambda_u \mathbf{f}_u^T}{\mathbf{f}_u^T\mathbf{w}} \cdot (\xi - \xi_F)\right)\right) \in U. \tag{3.54}$$

Dowód: Stosujemy lemat 3.5 do aproksymacji liniowej odwzorowania $\mathbf{P}$. □

Aby wyjaśnić znaczenie powyższego twierdzenia wybierzmy $\varepsilon > 0$ i załóżmy, że wartość bezwzględna niestabilnej wartości własnej macierzy Jakobianowej punktu stałego jest mniejsza od 2. Wówczas możemy znaleźć dowolnie małe otoczenie U takie, że każda trajektoria, która trafia w otoczenie U pozostanie w nim na zawsze. Ponieważ układ jest chaotyczny i punkt stały należy do atraktora to trajektoria po skończonym czasie trafi w otoczenie U i już nigdy z niego nie ucieknie. Zatem cel sterowania zostanie osiągnięty. Z Lematu 3.4 wynika, że dla mniejszego Δ_p ustabilizowana trajektoria pozostaje bliżej punktu stałego. Poprzez wybór małego Δ_p możliwe jest utrzymywanie trajektorii dowolnie blisko punktu stałego, czyli można uzyskać efektywność sterowania w sensie Definicji 3.1 z dowolnie małym poziomem błędu.

Kolejny wniosek z Lematu 3.4 dotyczy przypadku, gdy nie można ustabilizować punktu stałego przy pomocy metody dwupołożeniowej.

Wniosek 3.1 *Jeśli $|\lambda_u| > 2$ to dla dowolnego ε i dla dowolnego Δ_p istnieje otoczenie U zawarte w kuli $B(\xi_F, \varepsilon)$ takie, że istnieje $\xi \in U$, dla którego*

$$\mathbf{P}\left(\xi, p_0 + \Delta_p \mathrm{sgn}\left(-\frac{\lambda_u \mathbf{f}_u^T}{\mathbf{f}_u^T \mathbf{w}} \cdot (\xi - \xi_F)\right)\right) \notin U.$$

Należy podkreślić, że Twierdzenie 3.3 jest prawdziwe tylko dla układów idealnych. W przypadku układów rzeczywistych, w których istnieje szum, nie można zagwarantować warunku (3.54) dla dowolnie małych otoczeń. Ponieważ sygnał sterujący $\pm\Delta_p$ musi przekraczać poziom szumów w układzie to wielkość otoczenia U, która jest wprost proporcjonalna do Δ_p, nie może być dowolnie mała.

Dość prosto można uogólnić ten rezultat na przypadek ciągłych układów dynamicznych. Jeśli rozważymy hiperpłaszczyznę transwersalną do orbity okresowej to możemy użyć Twierdzenie 3.3 do odwzorowania Poincarégo związanego z ciągłym układem dynamicznym.

Analiza efektywności sterowania w przypadku metody wielopunktowej, kiedy sygnał sterujący jest podawany kilka razy w ciągu okresu orbity okresowej, jest trudna ze względu na nieliniowość sygnału sterującego (we wzorze na $p(\xi)$ występuje funkcja sgn). Nie jest możliwe uogólnienie Twierdzenia 3.3 na przypadek metody wielopunktowej. Można skonstruować przykład, w którym dla wszystkich uogólnionych odwzorowań Poincarégo są spełnione warunki z Twierdzenia 3.3 i nie można dobrać Δ_p tak, aby sterowanie było skuteczne. Wynika to stąd, że wszystkie rozważania w tym podrozdziale prowadzimy po diagonalizacji macierzy Jakobianowej. Po pierwsze może nie być możliwe zdiagonalizowanie macierzy $\mathbf{P}_i$. Nawet jednak gdy jest to możliwe to najczęściej obraz kierunku niestabilnego macierzy $\mathbf{A}_i$ przez odwzorowanie $\mathbf{P}_i$ nie będzie się pokrywał z kierunkiem niestabilnym macierzy $\mathbf{A}_{i+1}$. Orientacyjnie można stosować Twierdzenie 3.3, ale ścisłych wniosków na tej podstawie sformułować nie można.

Metoda minimum odległości

Obecnie zajmiemy się przypadkiem gdy zmiana parametru jest obliczana przy użyciu metody minimum odległości. Parametr sterujący obliczany jest według wzoru

$$p(\xi) = p_0 + \Delta_p \mathrm{sgn}\left(-\frac{\mathbf{w}^T \mathbf{A}}{||\mathbf{w}||^2}(\xi - \xi_F)\right).$$

Zmiana parametru p odpowiada przekształceniu funkcji $\mathbf{P}$ w funkcję jednej zmiennej

$$\mathbf{P}(\xi) = \mathbf{P}(\xi, p(\xi)) = \mathbf{P}\left(\xi, p_0 + \Delta_p \mathrm{sgn}\left(-\frac{\mathbf{w}^T \mathbf{A}}{||\mathbf{w}||^2}(\xi - \xi_F)\right)\right) \tag{3.55}$$

Najpierw zajmiemy się doborem wartości Δ_p tak, aby istniało małe otoczenie U spełniające warunek $\mathbf{P}(U) \subset U$.

Lemat 3.6 *Niech*

$$f(\xi) = \mathbf{A}\xi + \mathbf{w}p(\xi) = \mathbf{A}\xi + \mathbf{w} \cdot \Delta_p \cdot \mathrm{sgn}\left(-\frac{\mathbf{w}^T \mathbf{A}}{||\mathbf{w}||^2} \cdot \xi\right),$$

gdzie $\mathbf{A}$ *jest macierzą diagonalną zdefiniowaną przez* (3.3) *oraz* $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$*. Niech* δ_1*,* δ_2 *będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi. Wówczas*

$$f\left(\overline{B_{\delta_1\delta_2}}\right) \subset \overline{B_{\delta_1\delta_2}} \tag{3.56}$$

wtedy i tylko wtedy gdy

$$|\delta_2\lambda_s w_2| \leqslant |\delta_1\lambda_u w_1|, \tag{3.57a}$$

$$\Delta_p \geqslant \delta_1 \cdot \frac{|\lambda_u| - 1}{|w_1|}, \tag{3.57b}$$

$$\Delta_p \leqslant \delta_1 \frac{1}{|w_1|} - \delta_2 \frac{|w_2\lambda_s|}{|w_1^2\lambda_u|}, \tag{3.57c}$$

$$\Delta_p \leqslant \delta_2 \cdot \frac{1 - |\lambda_s|}{|w_2|}. \tag{3.57d}$$

Dowód: Udowodnimy tylko implikację (3.57) $\Rightarrow$ (3.56). Implikacja przeciwna nie będzie nam potrzebna i dlatego pozostawimy ją bez dowodu. Rozważmy przypadek w_1, w_2, λ_u, $\lambda_s > 0$. Dla pozostałych przypadków dowód przebiega analogicznie. Załóżmy, że spełnione są warunki (3.57) i wybierzmy $\xi \in \overline{B_{\delta_1\delta_2}}$ (tzn. $|\xi_1| \leqslant \delta_1$ i $|\xi_2| \leqslant \delta_2$). Należy udowodnić, że $|f_1(\xi)| \leqslant \delta_1$ oraz $|f_2(\xi)| \leqslant \delta_2$. Z definicji odwzorowania f wynika, że

$$f_1(\xi) = \lambda_u\xi_1 + w_1\Delta_p \mathrm{sgn}(-w_1\lambda_u\xi_1 - w_2\lambda_s\xi_2),$$

$$f_2(\xi) = \lambda_s\xi_2 + w_2\Delta_p \mathrm{sgn}(-w_1\lambda_u\xi_1 - w_2\lambda_s\xi_2).$$

Udowodnimy, że przy założeniach (3.57) maksimum z $|f_1(\xi)|$ po ξ należących do $\overline{B_{\delta_1\delta_2}}$ jest mniejsze od δ_1 oraz maksimum z $|f_2(\xi)|$ jest mniejsze od δ_2.

$$\begin{aligned}
m_1 &= \max\{|f_1(\xi)| : \xi \in \overline{B_{\delta_1\delta_2}}\} \\
&= \max\{|\lambda_u\xi_1 + w_1\Delta_p \mathrm{sgn}(-w_1\lambda_u\xi_1 - w_2\lambda_s\xi_2)| : \xi \in \overline{B_{\delta_1\delta_2}}\} \\
&= \max\{\max\{|\lambda_u\xi_1 + w_1\Delta_p| : \xi \in \overline{B_{\delta_1\delta_2}}, -w_1\lambda_u\xi_1 - w_2\lambda_s\xi_2 \geqslant 0\}, \\
&\qquad \max\{|\lambda_u\xi_1 - w_1\Delta_p| : \xi \in \overline{B_{\delta_1\delta_2}}, -w_1\lambda_u\xi_1 - w_2\lambda_s\xi_2 < 0\}\} \\
&= \max\{|\lambda_u\xi_1 + w_1\Delta_p| : |\xi_1| \leqslant \delta_1, |\xi_2| \leqslant \delta_2, -w_1\lambda_u\xi_1 - w_2\lambda_s\xi_2 \geqslant 0\} \\
&= \max\left\{|\lambda_u\xi_1 + w_1\Delta_p| : |\xi_1| \leqslant \delta_1, \xi_1 \leqslant \delta_2\frac{w_2\lambda_s}{w_1\lambda_u}\right\}.
\end{aligned}$$

Na podstawie założenia (3.57a) mamy $\delta_1 \geqslant \delta_2\frac{w_2\lambda_s}{w_1\lambda_u}$. Wobec tego warunek $\xi_1 \leqslant \delta_1$ jest silniejszy niż $\xi_1 \leqslant \delta_2\frac{w_2\lambda_s}{w_1\lambda_u}$. Zatem

$$m_1 = \max\left\{|-\lambda_u\delta_1 + w_1\Delta_p|, \left|\delta_2\frac{w_2\lambda_s}{w_1\lambda_u} + w_1\Delta_p\right|\right\}.$$

Z warunków (3.57b,3.57c) wynika, że $|m_1| \leqslant \delta_1$. Podobnie można udowodnić, że

$$\begin{aligned}
m_2 &= \max\{|f_2(\xi)| : \xi \in \overline{B_{\delta_1\delta_2}}\} \\
&= \max\left\{|\lambda_s\xi_2 + w_2\Delta_p| : |\xi_2| \leqslant \delta_2, \xi_2 \leqslant \delta_1\frac{w_1\lambda_u}{w_2\lambda_s}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Tym razem z uwagi na założenie (3.57a) drugi warunek na ξ_2 jest słabszy niż pierwszy, zatem:

$$m_2 = |\delta_2\lambda_s + w_2\Delta_p|.$$

Z warunku (3.57d) wynika, że $|m_2| \leqslant \delta_2$. □

Z warunków (3.57) wynika, że Δ_p zależy liniowo od δ_1, δ_2. Jeśli warunki (3.57) są spełnione dla pewnych wartości δ_1, δ_2, Δ_p to są także spełnione dla $\alpha\delta_1$, $\alpha\delta_2$, $\alpha\Delta_p$ gdzie α jest dowolną dodatnią liczbą rzeczywistą. Zatem jeśli chcemy, aby trajektoria pozostała bliżej stabilizowanej orbity okresowej to musimy wybrać mniejsze Δ_p.

Lemat 3.7 *Załóżmy, że f, $\mathbf{A}$ i $\mathbf{w}$ są takie, jak w Lemacie 3.6. Niech $\varepsilon > 0$. Jeśli*

$$w_1 \neq 0, \tag{3.59a}$$

$$|\lambda_u| < 2, \tag{3.59b}$$

$$|w_1|^2|\lambda_u|(2-|\lambda_u|)(1-|\lambda_s|) > |w_2|^2|\lambda_s|(|\lambda_u|-1), \tag{3.59c}$$

to istnieje Δ_p oraz otoczenie U zawarte wewnątrz kuli $B(\mathbf{0},\varepsilon)$ takie, że

$$f(U) \subset U. \tag{3.60}$$

Dowód: Warunki (3.59a,3.59b) wynikają z warunku (3.59c). Zostały jednak dodane dla przejrzystości stwierdzenia. Lemat udowodnimy dla przypadku $w_2 \neq 0$. Gdy $w_2 = 0$, dowód przebiega podobnie przy czym nie wykorzystujemy nierówności (3.57d) z Lematu 3.6. Z założenia (3.59c) wynika, że

$$\frac{|w_2||\lambda_s|}{|w_1||\lambda_u|(2-|\lambda_u|)} < \frac{(1-|\lambda_s|)|w_1|}{(|\lambda_u|-1)|w_2|}.$$

Zatem można wybrać δ_1, δ_2 tak, aby $\delta_1, \delta_2 < \varepsilon/2$ oraz

$$\frac{|w_2||\lambda_s|}{|w_1||\lambda_u|(2-|\lambda_u|)} < \frac{\delta_1}{\delta_2} < \frac{(1-|\lambda_s|)|w_1|}{(|\lambda_u|-1)|w_2|}. \tag{3.61}$$

Ponieważ $|\lambda_u| > 1$ to $2-|\lambda_u| < 1$. Zatem z pierwszej z powyższych nierówności wynika

$$\frac{|w_2||\lambda_s|}{|w_1||\lambda_u|} < \frac{\delta_1}{\delta_2},$$

co jest równoważne warunkowi (3.57a). Z nierówności (3.61) wynika, że

$$\delta_1 \cdot \frac{|\lambda_u|-1}{|w_1|} < \delta_1 \frac{1}{|w_1|} - \delta_2 \frac{|w_2\lambda_s|}{|w_1^2\lambda_u|},$$

$$\delta_1 \cdot \frac{|\lambda_u|-1}{|w_1|} < \delta_2 \cdot \frac{1-|\lambda_s|}{|w_2|}.$$

Zatem można dobrać Δ_p spełniające warunki (3.57b...3.57d). Dla tak wybranego Δ_p warunki (3.57) z Lematu 3.6 są spełnione. Zatem $f(\overline{B_{\delta_1\delta_2}}) \subset \overline{B_{\delta_1\delta_2}}$. Wybierając $U = \overline{B_{\delta_1\delta_2}}$ otrzymujemy tezę lematu. □

Następne twierdzenie uogólnia poprzedni lemat na przypadek dowolnego (niekoniecznie liniowego) odwzorowania.

Twierdzenie 3.4 *Niech $\mathbf{P}$ będzie różniczkowalnym odwzorowaniem płaszczyzny w siebie zdefiniowanym przez (3.1), posiadającym punkt stały ξ_F. Załóżmy, że macierz Jakobianowa odwzorowania $\mathbf{P}$ w punkcie ξ_F posiada stabilną i niestabilną wartość własną. Przeprowadźmy liniową zamianę zmiennych tak, aby w nowych współrzędnych macierz Jakobianowa była postaci diagonanej (3.3). Załóżmy, że w nowych współrzędnych pochodna odwzorowania $\mathbf{P}$ po parametrze p jest równa $\mathbf{w} = (w_1, w_2)^T$. Jeśli*

$$w_1 \neq 0, \tag{3.62a}$$

$$|\lambda_u| < 2, \tag{3.62b}$$

$$|w_1|^2|\lambda_u|(2 - |\lambda_u|)(1 - |\lambda_s|) > |w_2|^2|\lambda_s|(|\lambda_u| - 1), \tag{3.62c}$$

to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje otoczenie U punktu stałego ξ_F zawarte wewnątrz kuli $B(\xi_F, \varepsilon)$ oraz Δ_p takie, że

$$\forall\xi \in U \qquad \mathbf{P}\left(\xi, p_0 + \Delta_p \mathrm{sgn}\left(-\frac{\mathbf{w}^T\mathbf{A}}{||\mathbf{w}||^2}(\xi - \xi_F)\right)\right) \in U. \tag{3.63}$$

Dowód: Należy zastosować Lemat 3.7 do linearyzacji odwzorowania **P**. □

3.3.3 Optymalny dobór parametrów.

Jeśli idzie o wybór ilości i położenia punktów na orbicie okresowej to wiemy jedynie, że sterowanie przy użyciu metody dwupołożeniowej w wersji jednopunktowej jest możliwe o ile wartość bezwzględna niestabilnej wartości własnej jest mniejsza od 2 (Lemat 3.5). Jeśli jest ona większa to musimy zastosować metodę w wersji wielopunktowej, dla której nie dysponujemy żadnymi ścisłymi wskazówkami dotyczącymi położenia punktów na orbicie okresowej. Podczas eksperymentów były stosowane z powodzeniem kryteria takie, jak dla sterowania ciągłego (podział odwzorowania **P** tak, aby wartości własne były możliwie małe i aby wektory $\mathbf{w}_j$ były równoległe do kierunków niestabilnych wektorów własnych odpowiednich macierzy Jakobianowych).

Bardzo istotnym parametrem w przypadku sterowania dwupołożeniowego, który nie występuje przy sterowaniu ciągłym, jest wielkość sygnału sterującego Δ_p. Zmniejszenie Δ_p powoduje, że po ustabilizowaniu trajektoria pozostaje bliżej stabilizowanej orbity okresowej (porównaj Lemat 3.4 i Lemat3.6). Zmniejszenie Δ_p powoduje jednak równocześnie zwiększenie czasu trwania chaotycznego przebiegu przejściowego. Wartość Δ_p powinna spełniać warunki (3.57) z Lematu 3.6, ale niestety nie znamy wartości δ, dla której linearyzacja jest poprawna. Δ_p nie może być zbyt duże ze względu na efekty nieliniowe, ani zbyt małe ponieważ zmiana w układzie spowodowana przyłożeniem sygnału sterującego $\pm\Delta_p$ musi przekroczyć poziom szumów. Wpływ liczby n na dopuszczalne wartości Δ_p jest opisany w podrozdziale 3.5. Generalnie dla większej liczby punktów n mamy większą swobodę w wyborze parametru Δ_p.

3.4 Sterowanie układu Hénona

Przedstawione zostaną obecnie wyniki sterowania chaotycznego układu dyskretnego, na przykładzie odwzorowania Hénona opisanego równaniem (1.15) z parametrami równymi $a = 1.4$, $b = 0.3$. Jako parametr sterujący wybraliśmy parametr a z wartością nominalną (początkową) $a_0 = 1.4$. Maksymalną dopuszczalną zmianę parametru a ustalono na $\delta a_{\max} = 0.02$.

Linearyzacja odwzorowania Hénona w otoczeniu $(x_F, y_F)^T$, a_0 ma postać:

$$\mathbf{h}\left((x, y)^T\right) \approx (x_F, y_F)^T + \mathbf{A}(x - x_F, y - y_F)^T + \mathbf{w}(a - a_0), \tag{3.64}$$

gdzie punkt stały $(x_F, y_F)^T$, macierz Jakobianowa $\mathbf{A}$ oraz wektor $\mathbf{w}$ są określone wzorem (2.17). Wektor $\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T$ potrzebny do obliczenia sygnału sterującego w przypadku metody OGY można obliczyć ze wzoru

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2)^T = -\frac{\lambda_u}{\mathbf{f}_u^T \mathbf{w}} \mathbf{f}_u \approx (1.92374, -0.3)^T.$$

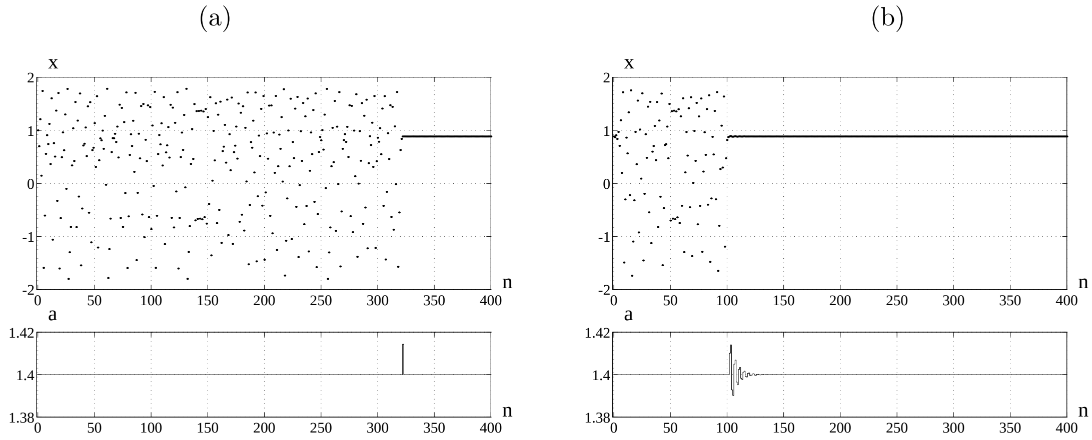
Stabilizacja punktu stałego $(x_F, y_F)^T$ polega na zmianie w każdej iteracji parametru a według wzoru

$$a = a_0 + (x - x_F, y - y_F)\mathbf{c}, \tag{3.65}$$

o ile obliczona wartość a różni się niewiele od wartości nominalnej a_0, tzn. $|a - a_0| < \delta a_{\max}$. W przypadku gdy wymagana zmiana parametru jest większa od wartości dopuszczalnej to parametr a jest ustawiany na wartość nominalną. Przy stosowaniu metody minimum odległości wektor $\mathbf{c}$ obliczamy w sposób następujący:

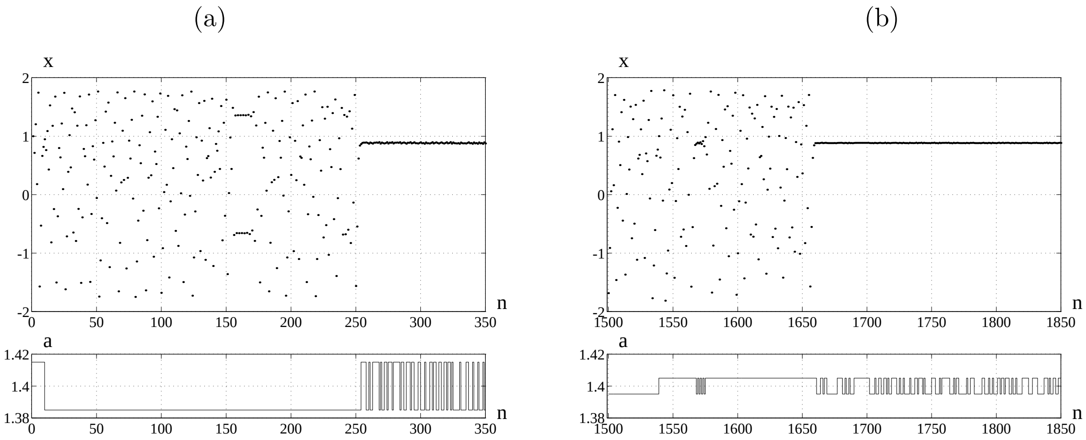
$$\mathbf{c} := -\frac{\mathbf{w}^T \mathbf{A}}{||\mathbf{w}||_2^2} \approx (1.76779, -1)^T.$$

Parametr sterujący a podobnie jak poprzednio obliczamy ze wzoru (3.65).



Rysunek 3.4: Stabilizacja punktu stałego odwzorowania Hénona przy użyciu: (a) metody OGY, (b) metody minimum odległości

Rezultaty sterowania zostały przedstawione na Rys. 3.4. W pierwszym przypadku, gdy używana była metoda OGY widzimy, że do ustabilizowania punktu stałego wystarcza bardzo mała liczba iteracji (Rys. 3.4a). Ideą metody OGY jest wpychanie trajektorii na podrozmaitość stabilną orbity okresowej. Jeśli uda się to zrobić, to odległość trajektorii od orbity okresowej (w tym przypadku punktu stałego) powinna w każdym kolejnym kroku maleć $|\lambda_s|^{-1}$ razy, gdzie λ_s jest stabilną wartością własną orbity okresowej. Teoretycznie trajektoria nie powinna już nigdy opuścić orbity okresowej, nawet bez przykładania sterowania. W rzeczywistości jednak niezbędne są niewielkie sygnały sterujące (niewidoczne na rysunku), które korygują niedokładnosci wyznaczenia orbity okresowej i jej parametrów, nieuwzględnione w aproksymacji liniowej człony nieliniowe odwzorowania oraz błędy obliczeniowe komputera. W przypadku metody minimum odległości po rozpoczęciu sterowania odległość trajektorii maleje w każdej iteracji (porównaj rys.3.4b), zgodnie z zasadą działania metody. Widzimy jednak, że odległość ta maleje wolniej niż w przypadku metody OGY. Łatwo sprawdzić, że nierówność (3.27) jest spełniona ($|l_2(\mathbf{A}, \mathbf{w})| = 0 < 1$), co na podstawie Twierdzenia 3.1 pociąga za sobą zbieżność trajektorii do punktu stałego.



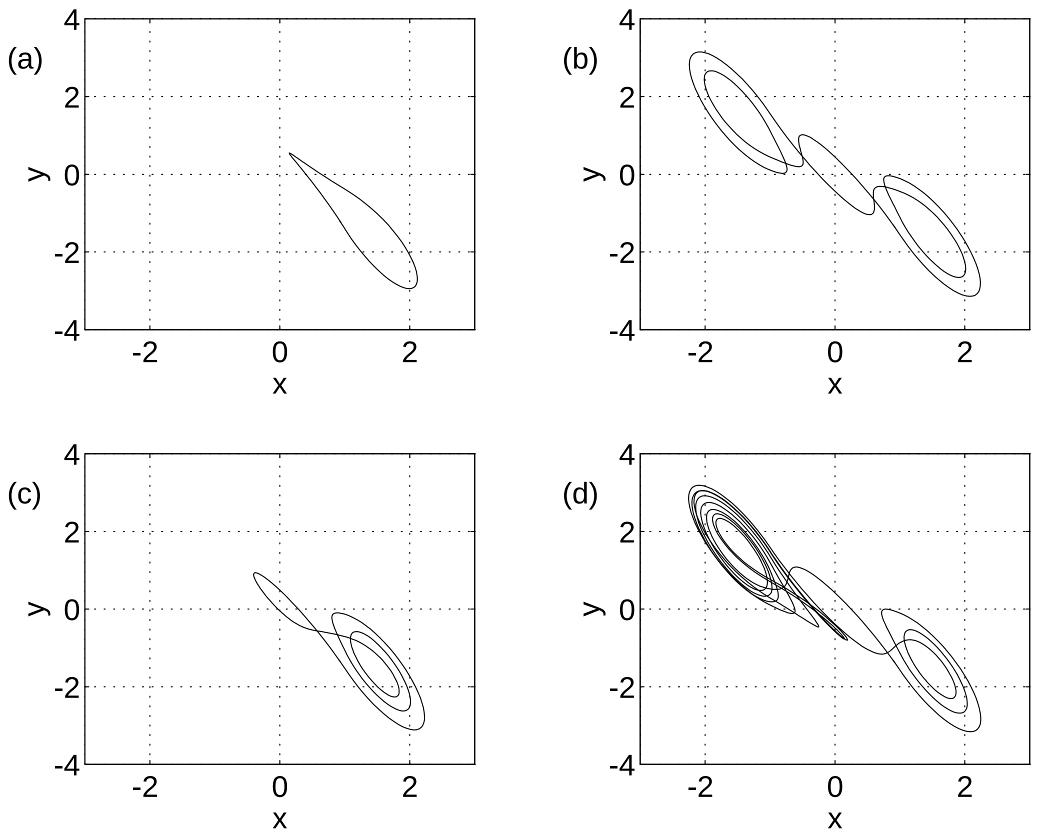
Rysunek 3.5: Stabilizacja punktu stałego odwzorowania Hénona przy użyciu metody dwupołożeniowej, (a) $\Delta_p = 0.015$, (b) $\Delta_p = 0.005$

Na rys. 3.5 przedstawione zostały efekty stabilizacji punktu stałego odwzorowania Hénona przy wykorzystaniu metody dwupołożeniowej. Przy takim rodzaju sterowania nie możemy osiągnąć zbieżności trajektorii do stabilizowanej orbity okresowej, lecz tylko pozostawanie trajektorii w pobliżu orbity okresowej. W pierwszym z eksperymentów wybraliśmy wielkość sygnału sterującego jako $\Delta_p = 0.015$, natomiast w drugim $\Delta_p = 0.005$. Można zauważyć, że w drugim przypadku gdy sygnał sterujący jest trzykrotnie mniejszy trajektoria po ustabilizowaniu pozostaje bliżej stabilizowanego punktu stałego. Jednakże przy mniejszym Δ_p czas trwania przejściowego przebiegu chaotycznego jest zwykle dłuższy. W przypadku tych eksperymentów trajektoria startująca z tego samego punktu stałego została w pierwszym przypadku ustabilizowana po ok. 250, natomiast w drugim przypadku po ok. 1650 iteracjach.

3.5 Stabilizacja orbit okresowych w obwodzie Chuy

W podrozdziale tym zostanie przedstawione zastosowanie opisanych poprzednio metod sterowania do stabilizacji orbit okresowych w obwodzie Chuy, o dynamice opisanej równaniami (1.16,1.17) z parametrami (1.18).

Cztery niestabilne orbity okresowe zanurzone w atraktorze są przedstawione na Rys. 3.6. W opisie rysunku zostały użyte następujące oznaczenia dla orbit okresowych: $\gamma_{m,n}$ oznacza orbitę okresową która m razy okrąża punkt $\mathbf{p}_+$ i n razy punkt $\mathbf{p}_-$, gdzie $\mathbf{p}_+$ i $\mathbf{p}_-$ są punktami stałymi układu odpowiednio w obszarach $x > 1$ i $x < -1$.



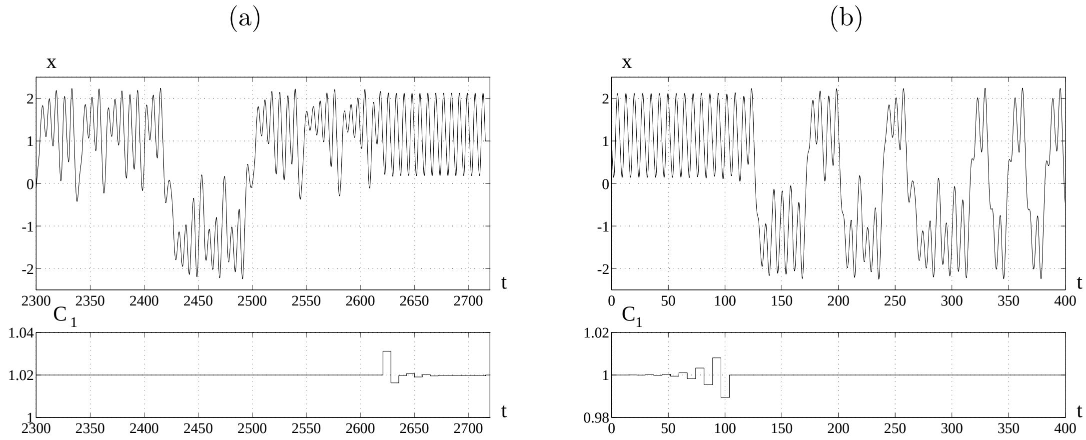
Rysunek 3.6: Przykłady niestabilnych orbit okresowych istniejących w dziwnym atraktorze typu double-scroll (a) $\gamma_{1,0}$, (b) $\gamma_{2,2}$, (c) $\gamma_{3,0}$, (d) $\gamma_{3,9}$. Cyfry oznaczają liczbę nawinięć orbity wokół punktów stałych $\mathbf{p}_+$ and $\mathbf{p}_-$

Podczas eksperymentów równanie stanu było całkowane numerycznie przy użyciu metody Rungego-Kutty czwartego rzędu z krokiem czasowym $\tau = 0.1$. Otrzymana trajektoria została zapamiętana w postaci trójwymiarowego ciągu próbek. Wszystkie parametry potrzebne do sterowania były obliczane na podstawie danych pochodzących z symulacji bez znajomości równań układu. We wszystkich eksperymentach używaliśmy hiperpłaszczyzny transwersalne prostopadłe do osi x. Jako parametr sterujący został wybrany współczynnik C_1 równania stanu.

3.5.1 Stabilizacja krótkiej orbity

Eksperyment 1

W pierwszym eksperymencie stabilizowana była orbita $\gamma_{1,0}$, pokazana na Rys. 3.6a, przy użyciu metody minimum odległości w wersji jednopunktowej. Wartość nominalna parametru sterującego C_1 wynosiła 1.02. Jako płaszczyzna transwersalna wybrana została hiperpłaszczyzna $x = 0.95$, $\dot{x} < 0$. Warunek na pochodną dodany jest w celu wyeliminowania drugiego punktu przecięcia orbity okresowej z płaszczyzną. Stabilizowana orbita okresowa odpowiada punktowi stałemu $\xi_F \approx (0.95, -1.2551, -1.0212)^T$ na płaszczyźnie transwersalnej. Obliczona została macierz Jakobianowa



Rysunek 3.7: Zmienna stanu x oraz parametr sterujący C_1 podczas stabilizacji orbity $\gamma_{1,0}$ przy różnych wartościach nominalnych parametru sterującego (a) $C_1 = 1.02$, (b) $C_1 = 1.0$

$\mathbf{A}$ odwzorowania Poincarégo w punkcie stałym, oraz wektor $\mathbf{w}$ — pochodna po parametrze C_1

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1.7987 & -1.1866 \\ -1.3992 & -0.9328 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1.3442 \\ 0.0704 \end{pmatrix}.$$

Wartości własne macierzy Jakobianowej wynoszą $\lambda_u = -2.725$ i $\lambda_s = -0.00645$. Łatwo można sprawdzić, że warunek (3.27) jest spełniony ($l_2(\mathbf{A}, \mathbf{w}) = 0.80 < 1$), co na podstawie Twierdzenia 3.1 gwarantuje zbieżność trajektorii do orbity okresowej, o ile trajektoria trafi w odpowiednio małe otoczenie punktu stałego na płaszczyźnie transwersalnej. Przebieg czasowy zmiennej stanu x oraz sygnału sterującego są przedstawione na Rys. 3.7a.

Eksperyment 2

W eksperymencie tym został zbadany wpływ wartości nominalnej parametru sterującego na efekt działania metody. Orbita okresowa $\gamma_{1,0}$ była stabilizowana dla wartości nominalnej parametru sterującego $C_1 = 1.0$. Macierz Jakobianowa $\mathbf{A}$ oraz wektor $\mathbf{w}$ obliczone na podstawie ciągu próbek są równe

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -2.0621 & -1.4824 \\ -1.5644 & -1.1323 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0.9627 \\ -0.2255 \end{pmatrix}.$$

Wartości własne macierzy Jakobianowej są równe: $\lambda_u = -3.19$, $\lambda_s = -0.0057$. Działanie sterowania zostało przedstawione na Rys. 3.7. Punkt początkowy trajektorii został wybrany na stabilizowanej orbicie okresowej. Mimo to procedura sterowania nie była w stanie utrzymać trajektorii w małym otoczeniu orbity okresowej. Trajektoria tylko przez kilka okresów orbity w pozostawała jej pobliżu — nie udało sie zatem ustabilizować tej orbity okresowej. Warunki (3.21) i (3.27) nie są spełnione ($l_1(\mathbf{A}, \mathbf{w}) = 2.46$, $l_2(\mathbf{A}, \mathbf{w}) = -1.85$). Ponieważ wartość l_2 jest na moduł znacznie większa niż 1, to można było oczekiwać, że metoda nie będzie działała poprawnie. Innym powodem, który utrudniał ustabilizowanie orbity okresowej była duża niestabilna wartość własna. Taka wartość własna powoduje silne odpychanie trajektorii od orbity okresowej oraz zwiększa proporcjonalnie do $|\lambda_u|$ błędy wyznaczonych parametrów oraz błąd wyznaczenia punktu przecięcia trajektorii z płaszczyzną transwersalną.

W eksperymencie tym podano przykład sytuacji gdy niewielka zmiana wartości nominalnej parametru sterującego powoduje, że stabilizacja orbity okresowej nie jest możliwa.

Zastosowanie metody OGY do stabilizacji tej orbity okresowej również nie dało pozytywnego efektu.

Eksperyment 3

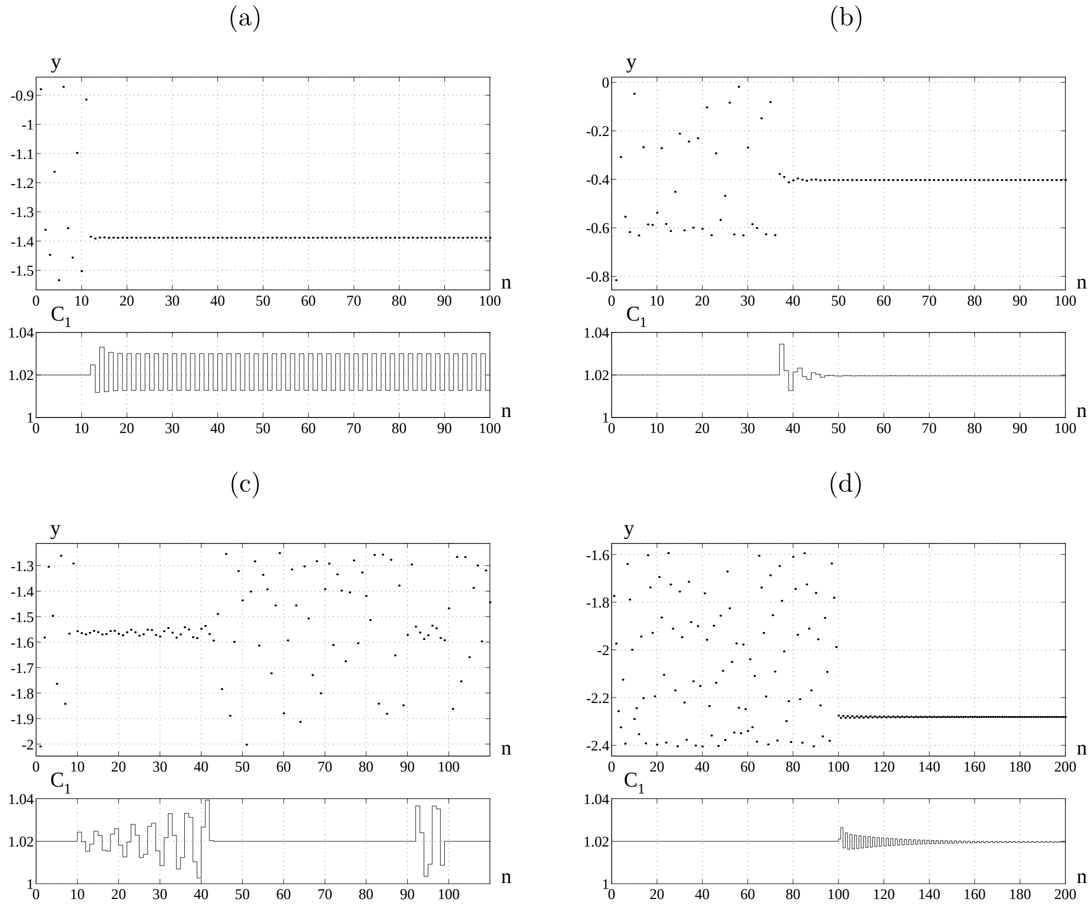
Przeprowadzona została analiza możliwości stabilizacji orbity okresowej $\gamma_{1,0}$ w zależności od wyboru płaszczyzny transwersalnej. Wyniki zostały zebrane w Tabeli 3.1. Przebiegi sygnału sterującego

lp.	x_0	$\dot{x}$	λ_u	l_1	l_2	działa	uwagi
1	1	$-$	-2.55	1.9	-1.34	TAK	oscylacje
2	0.99	$-$	-2.73	2.08	-1.50	TAK	oscylacje
3	0.95	$-$	-2.72	1.56	-0.80	TAK	
4	0.9	$-$	-2.41	1.13	-0.37	TAK	
5	0.6	$-$	-2.38	0.37	$+0.13$	TAK	
6	0.4	$-$	-2.35	0.32	$+0.22$	TAK	
7	0.2	$-$	-2.03	0.15	-0.15	TAK	
8	0.2	$+$	-1.56	0.50	-0.50	NIE	
9	0.4	$+$	-2.55	0.22	$+0.19$	TAK	
10	0.6	$+$	-2.57	0.23	$+0.16$	TAK	
11	0.95	$+$	-2.59	0.24	$+0.14$	TAK	
12	1.2	$+$	-2.55	0.25	$+0.15$	TAK	
13	1.4	$+$	-2.56	0.30	$+0.17$	TAK	
14	1.8	$+$	-2.53	0.47	$+0.31$	NIE	długie okresy stabilizacji
15	2	$+$	-2.45	0.54	$+0.45$	NIE	krótsze okresy stabilizacji
16	2	$-$	-2.63	0.08	$+0.06$	NIE	brak okresów stabilizacji
17	1.6	$-$	-2.77	0.52	-0.28	TAK	
18	1.4	$-$	-2.64	0.92	-0.49	TAK	
19	1.2	$-$	-2.45	1.99	-1.75	NIE	
20	1.1	$-$	-2.29	2.22	-2.12	NIE	
21	1.001	$-$	-2.53	1.88	-1.32	TAK	oscylacje

Tabela 3.1: Stabilizacja orbity $\gamma_{1,0}$ dla różnych płaszczyzn transwersalnych, x_0 definiuje płaszczyznę transwersalną $x = x_0$, w następnych kolumnach podane są kierunek przechodzenia trajektorii przez płaszczyznę transwersalną, obliczona niestabilna wartość własna macierzy Jakobianowej, wielkości liczbowe z nierówności (3.21) i (3.27) oraz efekt działania metody

i zmiennej stanu y dla czterech najbardziej reprezentatywnych przypadków zostały przedstawione na Rys. 3.8. Tym razem pokazane są wartości zmiennej tylko w momentach przecięcia trajektorii z płaszczyzną transwersalną, ponieważ w ten sposób lepiej można pokazać wpływ metody sterowania na trajektorię odwzorowania Poincarégo.

Analizując wyniki z Tabeli 3.1 można zauważyć dość dobrą zgodność teorii z praktyką. Twierdzenie 3.1 mówi, że jeśli pozycja l_2 z tabeli jest mniejsza od 1 co do wartości bezwzględnej to stablizacja powinna byż możliwa. Odstępstwa występują na pozycjach 1, 2, 8, 14..16, 21. Działanie metody w przypadkach 1, 2 i 21 przy niespełnieniu warunku (3.27) można wytłumaczyć tym, że warunek ten jest warunkiem wystarczającym działania metody. Jeśli jest on spełniony to powinniśmy obserwować zbieżność trajektorii do orbity okresowej. Sygnał sterujący również powinien maleć do zera. W przypadkach 1, 2 i 21 sygnał sterujący oscyluje wokół wartości nominalnej. Są to oscylacje okresowe o okresie 2 (porównaj Rys. 3.8a). Zmienna stanu y przy przecięciu z płaszczyzną Poincarégo przedstawiona na Rys. 3.8a również wykazuje oscylacje o okresie 2. Mają one amplitudę ok. 0.0005 i z tego powodu nie są widoczne na rysunku. Zatem teza Lematu 3.3 nie jest spełniona. Jest to przykład działania metody, gdy sygnał sterujący nie maleje do zera i gdy tra-



Rysunek 3.8: Stabilizacja orbity $\gamma_{1,0}$ przy różnym wyborze płaszczyzny transwersalnej, (a) poz. 1 w Tabeli 3.1, $x = 1.0$, $\dot{x} < 0$, (b) poz. 5, $x = 0.9$, $\dot{x} < 0$, (c) poz. 14, $x = 1.8$ $\dot{x} > 0$, (d) poz. 18, $x = 1.4$, $\dot{x} < 0$.

jektoria nie jest zbieżna do orbity okresowej, lecz tylko pozostaje w małym jej otoczeniu. Sytuacja taka jest możliwa tylko przy obecności składników nieliniowych w odwzorowaniu Poincarégo lub gdy obliczone parametry orbity okresowej użyte do sterowania są obarczone błędami.

W przykładach 3..7 i 9..13 warunek wystarczający $|l_2| < 1$ jest spełniony i metoda działa poprawnie. Przykład został przedstawiony na Rys. 3.8b.

W przykładach 8 oraz 14..16 warunek wystarczający jest spełniony jednak metoda nie działa. Płaszczyzny transwersalne w tych przykładach są wybrane blisko ostrego zakrętu orbity okresowej i są przecinane przez orbitę okresową pod małym kątem. W optymalnym przypadku trajektoria powinna przecinać płaszczyznę transwersalną pod kątem prostym. Jeśli kąt ten jest mały to efekty nieliniowe mają silniejszy wpływ i w efekcie parametry orbity nie mogą być wyznaczone dokładnie. W takim przypadku nie można stosować Twierdzenia 3.1, ponieważ prawdziwa aproksymacja liniowa odwzorowania Poincarégo nie jest znana. Jeden z przykładów został przedstawiony na Rys. 3.8c. Można zauważyć, że metoda sterowania jest w stanie utrzymać trajektorię w pobliżu orbity okresowej przez pewien czas. Jednak w tym celu sygnał sterujący musi być zwiększany, aż wreszcie opuści dopuszczalny zakres zmian parametru sterującego i trajektoria ucieka z otoczenia orbity okresowej.

W przykładach 17 i 18 warunki wystarczające są spełnione i metoda działa poprawnie. Wartość l_2 jest mniejsza od zera i stosunkowo duża, co prowadzi do powolnego oscylacyjnego zmniejszania sygnału sterującego. Przykład 18 został przedstawiony na Rys. 3.8d.

W przykładach 19 i 20 warunki wystarczające nie są spełnione i metoda nie działa.

3.5.2 Sterowanie dłuższych orbit okresowych

Jak wspomnieliśmy poprzednio zmiana parametru układu raz w czasie okresu orbity może być niewystarczająca z powodu silnego działania odpychającego wzdłuż niestabilnej podrozmaitości. Dla dłuższych orbit okresowych zwykle niestabilna wartość własna jest duża i musimy częściej niż raz na okres zmieniać parametr w celu osiągnięcia pożądanego zachowania układu.

Eksperyment 4

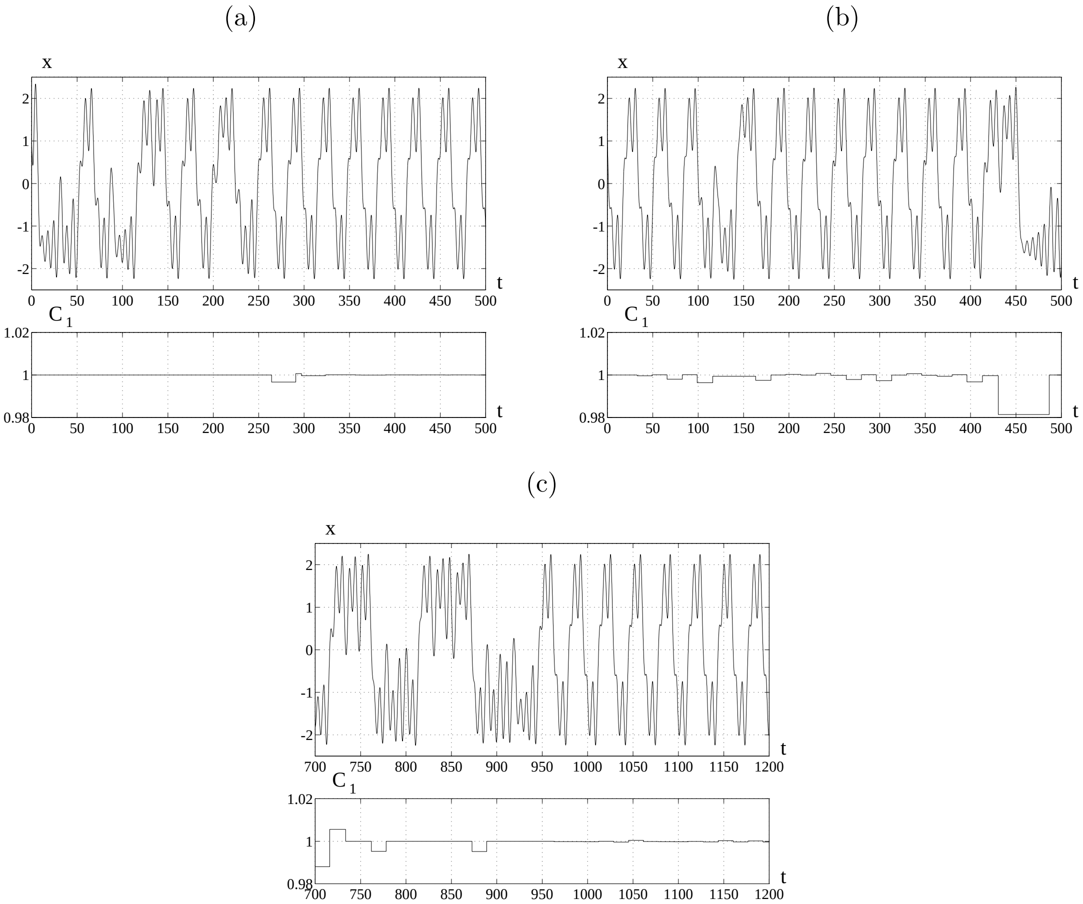
Na Rys. 3.9a przedstawiony jest przykład stabilizacji orbity okresowej $\gamma_{2,2}$. Do stabilizacji orbity używaliśmy metody minimum odległości w wersji dwupunktowej. Punkty ξ_{F_1}, ξ_{F_2} zostały wybrane na przecięciu orbity okresowej z hiperpłaszczyzną $x = 1$, $\dot{x} < 0$: $\xi_{F_1} = (1, -1.5586, -1.1343)^T$, $\xi_{F_2} = (1, -1.1166, -0.7968)^T$. Punkty te nie dzielą orbity okresowej na równe części, ale to nie jest konieczne, aby metoda działała poprawnie. Macierze Jakobianowe uogólnionych odwzorowań Poincarégo w punktach ξ_{F_1}, ξ_{F_2} oraz pochodne po parametrze C_1 są równe odpowiednio

$$\mathbf{A}_1 = \begin{pmatrix} 5.5923 & 3.4009 \\ 4.1394 & 2.5100 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} -2.6235 \\ -2.6782 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{pmatrix} -0.0919 & 0.8605 \\ -0.0741 & 0.6499 \end{pmatrix}, \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 2.7223 \\ 0.9775 \end{pmatrix}.$$

W tym przykładzie macierz Jakobianowa $\mathbf{A}_1$ ma wartości własne: $\lambda_u = 8.1$, $\lambda_s = -0.0051$, natomiast macierz Jakobianowa $\mathbf{A}_2$ nie posiada kierunku niestabilnego. Jej wartości własne są równe: $\lambda_1 = 0.55$, $\lambda_2 = 0.0074$. Zatem zastosowanie oryginalnej metody OGY nie jest możliwe.

Widać, że płaszczyzny transwersalne nie są dobrane optymalnie. Pierwsze odwzorowanie Poincarégo silnie odpycha trajektorie od orbity $\gamma_{2,2}$ ($\lambda_u = 8.1$) zaś drugie odwzorowanie przyciąga trajektorie we wszystkich kierunkach. Mimo to metoda minimum odległości działa poprawnie. Założenia z części pierwszej i drugiej Twierdzenia 3.2 są spełnione: $l_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{w}_2) = 0.27 < 1$, $|l_2(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{w}_2)| = 0.066 < 1$. Obliczone zostały również wartości l_1 i l_2 przy innym wyborze kolejności uogólnionych odwzorowań Poincarégo: $l_1(\mathbf{A}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1) = 0.32 < 1$, $|l_2(\mathbf{A}_2, \mathbf{w}_2, \mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1)| = 0.066 < 1$. Zgodnie ze spostrzeżeniami zawartymi w Uwadze 3.1 wartość l_2 nie zależy od wyboru kolejności natomiast wartości l_1 są różne. Założenia trzeciej części Twierdzenia 3.2 nie są spełnione: $l_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1) = 1.66 > 1$, $l_1(\mathbf{A}_2, \mathbf{w}_2) = 0.10 < 1$, czyli zmniejszanie odległości trajektorii od orbity okresowej przy kolejnych przecięciach z płaszczyznami transwersalnymi nie jest zagwarantowane. Na podstawie części pierwszej Twierdzenia 3.2 metoda spowoduje zmniejszanie odległości trajektorii pełnego odwzorowania Poincarégo od punktu stałego w postępie geometrycznym. W praktyce jednak metoda całkowania wnosi pewne błędy. Dodatkowe błędy metody wynikają z niedokładnie obliczonych parametrów orbity okresowej (są one wyznaczane bez znajomości równań układu, na podstawie zapamiętanego ciągu próbek). Z tego powodu w rzeczywistości nie obserwujemy zbieżności trajektorii do orbity okresowej, lecz tylko pozostawanie trajektorii w pewnym jej otoczeniu.



Rysunek 3.9: Stabilizacja orbity okresowej $\gamma_{2,2}$ przy użyciu metody minimum odległości, $n = 2$, płaszczyzny transwersalne: (a) dwukrotna: $x = 1$ $\dot{x} < 0$, (b) jednokrotne: $x = 1$ $\dot{x} < 0$, $x = -1$ $\dot{x} > 0$, (c) jednokrotne: $x = 0$ $\dot{x} < 0$, $x = 0$ $\dot{x} > 0$

Eksperyment 5

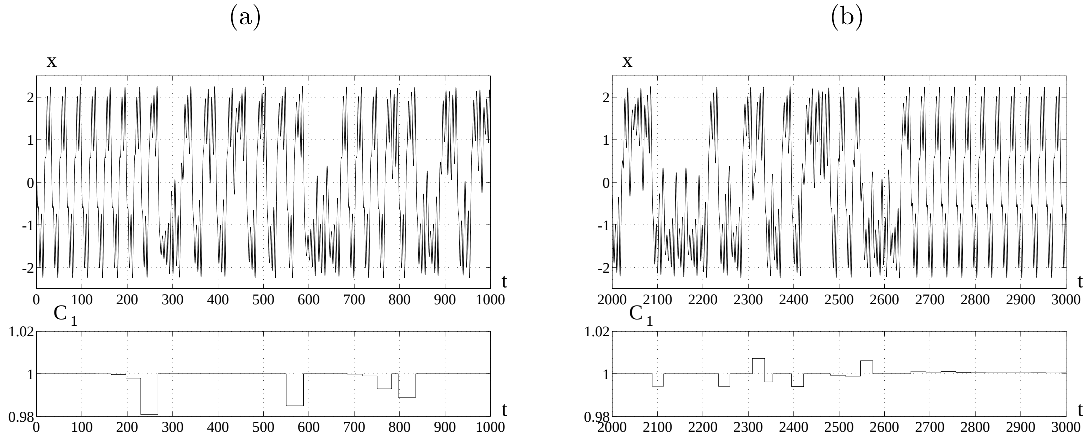
W eksperymencie tym testowany był wpływ doboru punktów na orbicie okresowej, w których przykładany jest sygnał sterujący, na efektywność sterowania. Ponieważ $\gamma_{2,2}$ jest orbitą symetryczną to wybór dwóch punktów położonych symetrycznie względem początku układu powoduje, że macierze Jakobianowe mają równe wartości własne. Wydaje się, że powinno to zatem prowadzić do bardziej równomiernego rozkładu odwzorowania Poincarégo i lepszego działania metody sterowania. W przypadku wyboru jednego punktu na płaszczyźnie $x = 1$, drugiego zaś na płaszczyźnie $x = -1$, symetrycznie względem początku układu macierze Jakobianowe miały niestabilne wartości własne $\lambda_u = 2.23$. Zatem podział na uogólnione odwzorowania Poincarégo ze względu na wartości własne jest niewątpliwie korzystniejszy niż w pierwszym przykładzie. Jednakże w tym przypadku nie udało się ustabilizować orbity okresowej $\gamma_{2,2}$. Powodem tego jest niekorzystne usytuowanie wektorów $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ powodujące, że warunki z Twierdzenia 3.2 nie są spełnione ($l_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{w}_2) = 3.83 > 1$, $l_2(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{w}_2) = 3.81 > 1$). Działanie metody zastosowanej do trajektorii startującej z orbity okresowej zostało przedstawione na Rys. 3.9b. Trajektoria po krótkim czasie opuszcza małe jej otoczenie.

W kolejnym przypadku, gdy punkty ξ_{F_1}, ξ_{F_2} leżą na płaszczyźnie $x = 0$, symetrycznie względem początku układu, założenia z części pierwszej i drugiej Twierdzenia 3.2 są spełnione ($l_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{w}_2) = 0.059 < 1$, $l_2(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{w}_2) = 0.033 < 1$). Przebieg procesu stabilizacji został przedstawiony na Rys. 3.9c. Taki dobór punktów na orbicie okresowej jest lepszy niż w przykładzie pierwszym (punkty na płaszczyźnie $x = 1$). Błędy w wyznaczeniu parametrów sterowania oraz obecność szumów mają mniejszy wpływ na działanie metody oraz średni czas trwania przebiegu chaotycznego przed ustabilizowaniem orbity okresowej jest krótszy. W tym przypadku w przeciwieństwie do przykładu (a) założenia części trzeciej Twierdzenia 3.2 są spełnione: $l_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1) = 0.35 < 1$, $l_1(\mathbf{A}_2, \mathbf{w}_2) = 0.26 < 1$ i trajektoria przy kolejnych przecięciach z płaszczyznami transwersalnymi powinna zbliżać się do orbity okresowej.

Na podstawie tego eksperymentu można wywnioskować, że podział odwzorowania Poincarégo w ten sposób aby zminimalizować wartości własne macierzy Jakobianowej nie jest najistotniejszy. Ważniejsze jest, aby tak dobrać punkty na orbicie okresowej, aby założenia Twierdzenia 3.2 były spełnione. Jeśli spełnienie tych warunków jest zagwarantowane, to korzystniejszy jest taki dobór punktów, aby macierze Jakobianowe miały możliwie małe wartości własne. Spełnianie silniejszego założenia (3.41) sprawia, że szanse na poprawne działanie metody w obecności szumów w układzie jest większe. Lepiej jest również, aby warunki konieczne były spełnione z pewnym zapasem, tzn. aby wielkości l_1 i l_2 były silnie mniejsze od 1.

Eksperyment 6

Kolejny eksperyment dotyczył sprawdzenia możliwości stabilizacji dłuższej orbity okresowej metodą jednopunktową. Do stabilizacji została wybrana orbita $\gamma_{2,2}$. Najpierw wybrany został punkt na



Rysunek 3.10: Stabilizacja orbity okresowej $\gamma_{2,2}$ przy użyciu metody minimum odległości, $n = 1$

orbicie okresowej $\xi'_F = (1, -1.5586, -1.1343)^T$, należący do płaszczyzny $x = 1$. Macierz Jakobianowa oraz wektor $\mathbf{w}$ obliczone z ciągu próbek wynoszą

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3.0075 & 1.8291 \\ 2.2445 & 1.3582 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} 0.5870 \\ -0.6224 \end{pmatrix}.$$

Dla tych wartości $\mathbf{A}$, $\mathbf{w}$ warunki (3.21) i (3.27) nie są spełnione ($l_1(\mathbf{A}, \mathbf{w}) = 4.36 > 1$, $l_2(\mathbf{A}, \mathbf{w}) = 4.26 > 1$). Dla tak wybranego punktu ξ_F nie udało się ustabilizować orbity okresowej. Sterowanie trajektorii startującej z orbity okresowej zostało przedstawione na Rys. 3.10a.

Następnie wybrany został punkt $\xi''_F = (0, 0.4385, -0.7111)^T$ leżący na przecięciu orbity okresowej z płaszczyzną $x = 0$. Tym razem obliczona macierz Jakobianowa i wektor $\mathbf{w}$ są równe

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.6104 & 0.6245 \\ 2.7455 & 1.0023 \end{pmatrix}, \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -12.925 \\ -25.282 \end{pmatrix}.$$

Warunki (3.20) i (3.26) są spełnione ($l_1(\mathbf{A}, \mathbf{w}) = 0.21 < 1$, $l_2(\mathbf{A}, \mathbf{w}) = 0.12 < 1$). Efekt sterowania jest przedstawiony na Rys. 3.10b. Widać, że trajektoria po przejściowym okresie zachowania chaotycznego pozostaje w otoczeniu stabilizowanej orbity okresowej.

Interesujące jest porównanie niestabilnych wartości własnych macierzy Jakobianowych dla powyższych dwóch przypadków. W pierwszym przypadku jest ona równa $\lambda_u = 4.3$, w drugim $\lambda_u = 2.65$. Różnica bierze się z błędów wprowadzonych przez całkowanie numeryczne z dość dużym krokiem czasowym ($\tau = 0.1$). Trajektorie startujące z otoczenia punktu ξ'_F są najpierw odpychane od trajektorii a następnie przyciągane do niej. Powoduje to, że punkty z małego otoczenia punktu ξ'_F pod działaniem pola wektorowego oddalają się dość daleko od orbity okresowej. W większej odległości od orbity okresowej istotne są czynniki nieliniowe, które powodują, że macierz Jakobianowa nie jest obliczona dokładnie (w szczególności obliczona niestabilna wartość własna jest znacznie większa od wartości rzeczywistej). Odwrotna sytuacja ma miejsce w drugim przypadku. Punkty startujące z małego otoczenia punktu ξ''_F nie opuszczają małego otoczenia orbity okresowej (najpierw trajektorie są przyciągane do orbity okresowej a później odpychane) i zaburzenie macierzy Jakobianowej przez czynniki nieliniowe ma dużo mniejsze znaczenie.

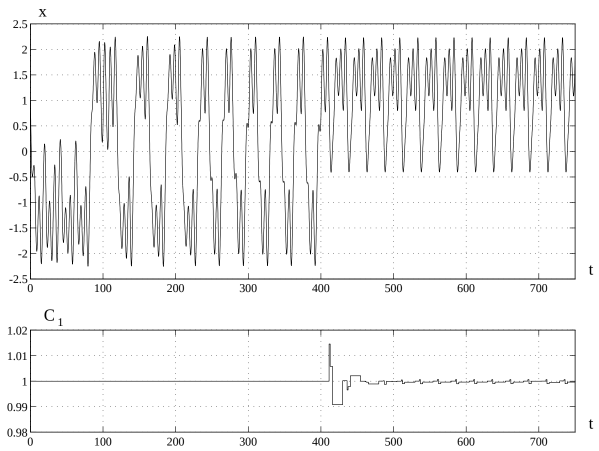
Podobna argumentacja może zostać zastosowana do wyjaśnienia dlaczego skuteczna stabilizacja orbity okresowej w pierwszym przypadku jest trudniejsza niż w drugim. Przypuśćmy, że w obu przypadkach sterowanie jest przykładane w momencie, gdy odległość punktu przecięcia trajektorii z płaszczyzną transwersalną i punktu stałego odwzorowania Poincarégo jest mniejsza niż δ. W przypadku, gdy trajektorie są najpierw odpychane od orbity okresowej a potem przyciągane do niej (lub gdy najpierw odpychanie jest silniejsze a potem słabsze) trajektorie mogą oddalić się na większą odległość od orbity okresowej niż w przypadku przeciwnym (gdy najpierw jest przyciąganie a potem odpychanie lub gdy najpierw odpychanie jest słabsze a potem silniejsze). Zatem w pierwszym przypadku trajektorie po przyłożeniu sterowania odwiedzają dalsze rejony, gdzie nabierają większego znaczenia człony nieliniowe. Ponieważ warunek na wielkość sygnału sterującego jest wyprowadzony przy założeniu obowiązywania liniowej aproksymacji odwzorowania Poincarégo, to przyłożenie sygnału sterującego przy obecności niepomijalnych składników nieliniowych nie prowadzi do osiągnięcia żądanego efektu (w przypadku metody minimum odległości zminimalizowania odległości od orbity okresowej). Drugim powodem utrudnionej stabilizacji w pierwszym przypadku są opisane powyżej większe błędy wyznaczenia parametrów orbity okresowej.

Konkluzją z tych rozważań może być stwierdzenie, że w przypadku nierównomiernego działania pola wektorowego na trajektorie w otoczeniu orbity okresowej korzystniejszy jast taki wybór płaszczyzny transwersalnej, aby trajektorie były najpierw przyciągane do orbity okresowej a następnie odpychane od niej (lub najpierw odpychane słabiej a następnie mocniej), a nie odwrotnie.

Eksperyment 7

Przeprowadzono również próbę stabilizacji orbity $\gamma_{3,0}$. Sterowanie było możliwe przy użyciu wersji czteropunktowej metody minimum odległości. Dwa punkty zostały wybrane na płaszczyźnie $x = 1$, i dwa na płaszczyźnie $x = 0$: $\xi_{F_1} = (1, -1.529, -1.11)^T$, $\xi_{F_2} = (0, 0.486, -0.621)^T$, $\xi_{F_3} = (0, -0.047, 0.327)^T$, $\xi_{F_4} = (1, -1.067, -0.761)^T$. Macierze Jakobianowe mają większe co do wartości bezwzględnej wartości własne równe odpowiednio: $\lambda_1 = 2.66$, $\lambda_2 = 7.09$, $\lambda_3 = 5.17$, $\lambda_4 = 0.65$.

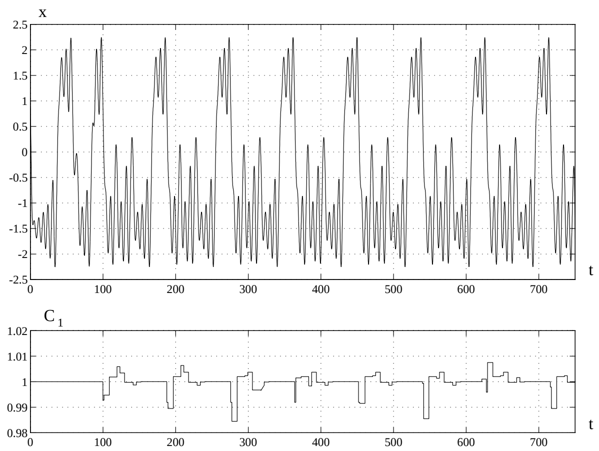
Założenia wszystkich części Twierdzenia 3.2 są spełnione: $l_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_4) = 0.0085 < 1$, $l_2(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_4) = 0.0065 < 1$, $l_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1) = 0.85 < 1$, $l_1(\mathbf{A}_2, \mathbf{w}_2) = 0.53 < 1$, $l_1(\mathbf{A}_3, \mathbf{w}_3) = 0.67 < 1$, $l_1(\mathbf{A}_4, \mathbf{w}_4) = 0.37 < 1$. Działanie metody sterowania zostało przedstawione na Rys. 3.11.



Rysunek 3.11: Stabilizacja orbity okresowej $\gamma_{3,0}$ przy użyciu metody minimum odległości, $n = 4$

Eksperyment 8

Na Rys. 3.12 przedstawiono zastosowanie metody do stabilizacji szczególnie długiej orbity okresowej. Do ustabilizowania orbity $\gamma_{3,9}$ z dwunastoma nawinięciami wokół punktów $\mathbf{p}_+$ i $\mathbf{p}_-$ zastosowana została metoda minimum odległości w wersji 10-punktowej.



Rysunek 3.12: Stabilizacja orbity okresowej $\gamma_{3,9}$ przy użyciu metody minimum odległości, $n = 10$

Punkty ξ_{F_i} zostały wybrane na przecięciu orbity okresowej kolejno z płaszczyznami: $x = 1$, $x = -0.2$, $x = -1.5$, $x = -0.2$, $x = -1.5$, $x = -1.5$, $x = -0.2$, $x = -1.5$, $x = -1.5$, $x = 1$. Większe co do wartości bezwzględnej wartości własne macierzy Jakobianowych są równe: $\lambda_1 = 2.64$, $\lambda_2 = 2.76$, $\lambda_3 = 5.36$, $\lambda_4 = -1.09$, $\lambda_5 = 1.44$, $\lambda_6 = -21.6$, $\lambda_7 = -0.87$, $\lambda_8 = 1.46$, $\lambda_9 = -6.48$, $\lambda_{10} = 0.57$.

Założenia części trzeciej Twierdzenia 3.2 są spełnione dla 8 uogólnionych odwzorowań Poincarégo, natomiast założenia części pierwszej i drugiej są spełnione z bardzo dużym zapasem:

$$l_1(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{A}_{10}\mathbf{w}_{10}) = 1.5 \cdot 10^{-12} \ll 1, \quad l_2(\mathbf{A}_1, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{A}_{10}\mathbf{w}_{10}) = 1 \cdot 10^{-12} \ll 1.$$

Oznacza to, że już praktycznie po pierwszej iteracji pełnego odwzorowania Poincarégo trajektoria trafi z bardzo dobrą dokładnością w orbitę okresową. Bliskie zera wartości l_1 i l_2 wynikają z idei metody. Macierze $(\mathbf{I} - \mathbf{u}_i\mathbf{u}_i^T)$ w równaniu (3.33) są rzutowaniami. Działanie metody na pełne odwzorowanie Poincarégo odpowiada złożeniu n rzutowań naprzemian z odwzorowaniami liniowymi $\mathbf{A}_i$. W przypadku dużego n efektem tego będzie najczęściej macierz o elementach bliskich zeru. Stabilizacja długiej orbity jest stosunkowo prosta jeszcze z tego powodu, że zwykle czas trwania przebiegu chaotycznego przed ustabilizowaniem orbity okresowej jest krótszy. Wynika to stąd, że długa orbita okresowa lepiej wypełnia atraktor i chaotyczna trajektoria ma większe szanse wpaść w małe otoczenie długiej orbity, co umożliwi rozpoczęcie stabilizacji.

3.5.3 Sterowanie dwupołożeniowe

W tym podrozdziale przedstawione są wyniki zastosowania metody dwupołożeniowej. Na Rys. 3.13a–c przedstawiono stabilizację orbity okresowej $\gamma_{1,0}$ dla $n = 10$, 6 i 4. Dla każdej wartości n próbowaliśmy wybrać n punktów na orbicie okresowej tak, aby maksymalna wartość własna macierzy $\mathbf{A}_j$ była możliwie najmniejsza. Testowany był również wpływ wartości sygnału sterującego na działanie metody. Zauważyliśmy, że przy mniejszej liczbie punktów n jest mniejsza dowolność w wyborze wartości Δ_p. Wartości Δ_p, dla których ustabilizowano orbitę $\gamma_{1,0}$ są zebrane w Tabeli 3.2.

n	Δ_p
10	0.0008..0.10
6	0.0008..0.08
4	0.0018..0.06
3	0.0020..0.03
2	–

Tabela 3.2: Zestawienie dla różnych n wartości Δ_p, przy których stabilizacja orbity $\gamma_{1,0}$ zakończyła się sukcesem

Dla $n = 2$ stabilizacji nie udało się osiągnąć (porównaj Rys. 3.13d). Najdłuższe fragmenty okresowe uzyskane zostały dla $\Delta_p = 0.0024$. Powstaje pytanie dlaczego sterowanie z dwoma punktami nie zostało zakończone sukcesem. Ta orbita okresowa posiada niestabilną wartość własną równą $\lambda_u = -2.55$. Zatem wydaje się, że dla $n = 2$ stabilizacja powinna być możliwa. Wybraliśmy dwa punkty na orbicie leżące na płaszczyźnie $x = 1$. Współczynniki aproksymacji liniowej odpowiednich odwzorowań Poincarégo są równe:

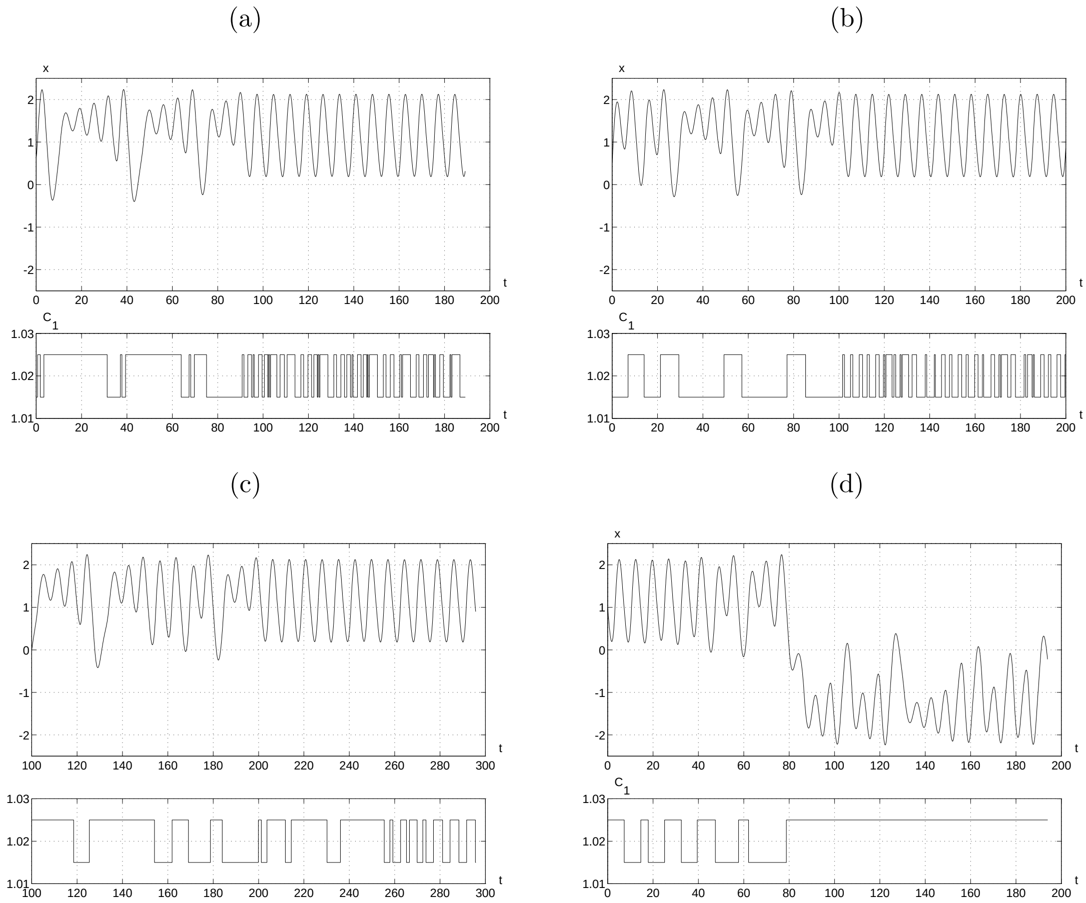
j	λ_u^j	λ_s^j	w_1^j	w_2^j
1	1.53	-0.44	-0.13	1.28
2	-1.54	0.02	0.76	2.58

Wektory $\mathbf{w}_j$ są wyznaczone we współrzędnych zadanych wektorami własnymi macierzy $\mathbf{A}_j$. Widać, że $\mathbf{w}_j$ są niekorzystnie położone (powinny być one równoległe do niestabilnego wektora własnego, czyli powinny mieć pierwszą współrzędną silnie wiekszą od drugiej).

Interesujące są niestabilne wartości własne macierzy $\mathbf{A}_j$ dla $n = 3$. W przypadku gdy punkty ξ_{F_i} na orbicie okresowej są położone na płaszczyznach transwersalnych ($x = 1$, $\dot{x} < 0$), ($x = 0.4$, $\dot{x} < 0$), ($x = 1.8$, $\dot{x} > 0$) to odpowiednie wartości własne są równe: $\lambda_u^1 = 2.76$, $\lambda_u^2 = 1.04$,

$\lambda_u^3 = -1.16$. Te wartości własne są dalekie od optymalnego przypadku, gdy wszystkie niestabilne wartości własne są równe i mniejsze od dwóch co do wartości bezwzględnej. Dla tak dobranych punktów udało się ustabilizować orbitę okresową. W kolejnym eksperymencie wybraliśmy 3 punkty tak, aby wszystkie wartości własne spełniały warunek $|\lambda_u^j| < 1.8$. Wtedy jednak stabilizacja była niemożliwa. Powodem było prawdopodobnie położenie wektorów $\mathbf{w}_j$, które w drugim przypadku było niekorzystne.

Generalnie, aby sprawdzić czy dla konkretnego n stabilizacja jest możliwa należy przetestować wiele położeń puntów ξ_{F_i} i wartości Δ_p.

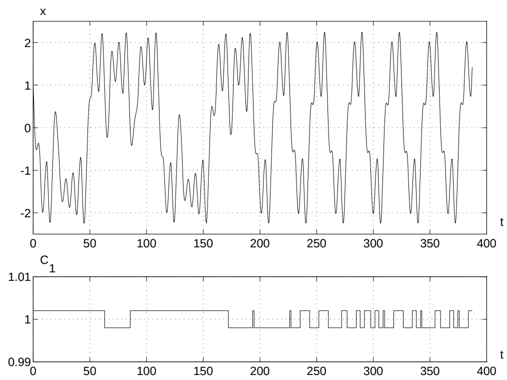


Rysunek 3.13: Stabilizacja orbity $\gamma_{1,0}$, sterowanie dwupołożeniowe, (a) $n = 10$ (b) $n = 6$, (c) $n = 4$, (d) $n = 2$ - nieudana próba

W ostatnim eksperymencie sprawdzaliśmy możliwość zastosowania metody dwupołożeniowej do stabilizacji dłuższej orbity, na przykładzie orbity $\gamma_{2,2}$. Do sterowania użyliśmy algorytmu 10-punktowego. Na Rys. 3.14 widać, że metoda działa poprawnie. Możliwe jest zatem stabilizowanie dłuższych orbit okresowych ale należy dobrać większe n aby sterowanie było zakończone sukcesem.

3.6 Sterowanie sieci komórkowej

Obecnie sprawdzimy możliwość zastosowania opisanych metod sterowania do stabilizacji orbit okresowych w sieci komórkowej opisanej równaniem (1.24). Podczas symulacji stwierdziliśmy, że w tym



Rysunek 3.14: Stabilizacja orbity okresowej $\gamma_{2,2}$, sterowanie dwupołożeniowe, $n = 10$

przypadku ustabilizowanie orbity okresowej jest niezwykle trudne do osiągnięcia. Spróbujemy odpowiedzieć na pytanie o przyczyny tego zjawiska. Aby uniknąć możliwości stabilizacji nieistniejącej orbity sprawdziliśmy w sposób ścisły jej istnienie. Macierz Jakobianowa tej orbity została obliczona analitycznie. Znaleziony został rozmiar otoczenia orbity okresowej, w którym można stosować liniową aproksymację zachowania układu. Pokażemy, że wielkość tego otoczenia jest bardzo mała. Na koniec podamy przyczyny, dla których zastosowanie opisanych metod sterowania może być trudne.

Do sterowania wybraliśmy jednopunktową metodę OGY.

Podzielmy przestrzeń stanów na 27 obszarów Ω_{ijk} $(i, j, k \in \{-1, 0, +1\})$, zdefiniowanych przez:

$$\Omega_{ijk} \stackrel{\text{df}}{=} \{\mathbf{x} = (x, y, z)^T \colon x \in A_i, y \in A_j, z \in A_k\},$$

gdzie $A_{-1} \stackrel{\text{df}}{=} (-\infty, -1)$, $A_0 \stackrel{\text{df}}{=} [-1, +1]$, $A_{+1} \stackrel{\text{df}}{=} (+1, \infty)$. W każdym z tych obszarów układ (1.24) jest liniowy, zatem można wyznaczyć analitycznie rozwiązania układu w każdym z nich. Oznaczmy $\mathbf{e}_i \stackrel{\text{df}}{=} (0, \ldots, \overbrace{1}^{i}, \ldots, 0) \in \mathbf{R}^n$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Oznaczmy płaszczyzny będące brzegami obszarów Ω_{ijk} przez $H_i^{\pm} \stackrel{\text{df}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \colon \mathbf{e}_i^T \mathbf{x} = \pm 1\}$. W obszarze Ω_{ijk} równanie stanu może być zapisane jako

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{ijk}\mathbf{x} + \mathbf{v}_{ijk}.$$

Jeśli macierz $\mathbf{A}_{ijk}$ jest odwracalna to powyższe równanie można przekształcić do postaci: $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{ijk}(\mathbf{x} - \mathbf{p}_{ijk})$, gdzie $\mathbf{p}_{ijk} = \mathbf{A}_{ijk}^{-1}\mathbf{v}_{ijk}$. W tym przypadku rozwiązanie układu ma postać

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_{ijk}t}(\mathbf{x}(0) - \mathbf{p}_{ijk}) + \mathbf{p}_{ijk}.$$

Nie wszystkie macierze $\mathbf{A}_{ijk}$ są odwracalne. Przykładowo w obszarze Ω_{110} część liniowa równania stanu jest macierzą nieodwracalną równą

$$\mathbf{A}_{110} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -s \\ 0 & -1 & -r \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Podobna sytuacja ma miejsce dla wszystkich trójek (i, j, k) takich, że $i, j \neq 0$ oraz $k = 0$. W tym przypadku również można znaleźć rozwiązanie układu. Jeśli

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{v} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & a_{13} \\ 0 & -1 & a_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \tag{3.66}$$

jest równaniem stanu, to rozwiązania układu mają postać

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b}_0 + \mathbf{B}_1\mathbf{x}(0) + \mathbf{b}_2 t + \mathbf{b}_3 e^{-t} + \mathbf{B}_4\mathbf{x}(0)e^{-t}, \tag{3.67}$$

gdzie $\mathbf{b}_0 = (v_1 - a_{13}v_3, v_2 - a_{23}v_3, 0)^T$, $\mathbf{B}_1 = \mathbf{A} + \mathbf{I}$, $\mathbf{b}_2 = (a_{13}v_3, a_{23}v_3, v_3)^T$, $\mathbf{b}_3 = -\mathbf{b}_0$, $\mathbf{B}_4 = -\mathbf{A}$.

3.6.1 Orbita o okresie 1

Podczas symulacji komputerowych znaleziona została orbita okresowa przecinająca granice obszarów Ω_{ijk} sześć razy. Oznaczmy przez $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,..., $\mathbf{x}_6$ kolejne punkty przecięcia tej orbity z płaszczyznami $H_i^{\pm}$. Ponieważ znane są rozwiązania układu w poszczególnych obszarach to możemy zapisać analityczne warunki na punkt stały odwzorowania Poincarégo.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i+1} &= f_i(\mathbf{x}_i, t_i) \stackrel{\mathrm{df}}{=} e^{\mathbf{A}_i t_i}(\mathbf{x}_i - \mathbf{p}_i) + \mathbf{p}_i \quad \text{dla} \quad i = 1, \ldots, 4, \\ \mathbf{x}_6 &= f_5(\mathbf{x}_5, t_5) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathbf{b}_0 + \mathbf{B}_1\mathbf{x}_5 + \mathbf{b}_2 t_5 + \mathbf{b}_3 e^{-t_5} + \mathbf{B}_4\mathbf{x}_5 e^{-t_5}, \\ \mathbf{x}_1 &= f_6(\mathbf{x}_6, t_6) \stackrel{\mathrm{df}}{=} e^{\mathbf{A}_6 t_6}(\mathbf{x}_6 - \mathbf{p}_6) + \mathbf{p}_6, \end{aligned} \tag{3.68a}$$

$$\mathbf{x}_1 \in H_1^+, \mathbf{x}_2 \in H_1^+, \mathbf{x}_3 \in H_3^-, \mathbf{x}_4 \in H_2^+, \mathbf{x}_5 \in H_3^-, \mathbf{x}_6 \in H_2^-, \tag{3.68b}$$

$$f_p(x_p, t)^j \in \bigcup_{i,j,k} \operatorname{int} \Omega_{ijk} \quad \forall\, t \in (0, t_p), p \in \{1, \ldots, 6\}. \tag{3.68c}$$

Warunki (3.68b) i (3.68c) są nazywane odpowiednio warunkami brzegowymi i otwartymi. Warunki brzegowe stwierdzają, że punkty $\mathbf{x}_i$ należą do brzegów obszarów liniowych, natomiast warunki otwarte stwierdzają, że żaden inny punkt orbity nie należy do nich.

Rozważmy odwzorowanie Poincarégo $\mathbf{P} = \mathbf{P}_\Sigma$, z płaszczyzną transwersalną $\Sigma = H_1^+$. Na podstawie układu (3.68) zostało znalezione w sposób numeryczny położenie punktu stałego odwzorowania Poincarégo:

$$\mathbf{x}_1 = (1, 0.973426, -0.381316)^T. \tag{3.69}$$

Istnienie tego punktu stałego zostało również udowodnione w sposób ścisły za pomocą metody opisanej w rozdziale 2.

3.6.2 Obliczenie macierzy Jakobianowej punktu stałego

Następnym krokiem w procedurze sterowania jest obliczenie macierzy Jakobianowej stabilizowanej orbity okresowej. Rozważana orbita okresowa przecina płaszczyzny $H_i^{\pm}$ sześć razy. Jest zatem naturalnym rozłożenie odwzorowania Poincarégo $\mathbf{P}_\Sigma$ na sześć uogólnionych odwzorowań Poincarégo, obliczenie ich macierzy Jakobianowych, a następnie pomnożenie ich w celu uzyskania macierzy Jakobianowej pełnego odwzorowania Poincarégo. Wyprowadźmy najpierw wzór na macierz Jakobianową odwzorowania składowego w przypadku, gdy macierz $\mathbf{A}_{ijk}$ jest odwracalna.

Lemat 3.8 *Jeśli trajektoria wychodząca z punktu $\mathbf{x}_0$ osiąga punkt $\mathbf{y}_0$ po czasie t_0, $\Sigma_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{e}_j^T\mathbf{x} = \mathbf{e}_j^T\mathbf{x}_0\}$, $\Sigma_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{e}_i^T\mathbf{x} = \mathbf{e}_i^T\mathbf{y}_0\}$ są hiperpłaszczyznami transwersalnymi do trajektorii oraz rozwiązanie układu jest dane przez $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}(\mathbf{x}(0) - \mathbf{p}) + \mathbf{p}$ to macierz Jakobianowa uogólnionego odwzorowania Poincarégo $\mathbf{P}_{\Sigma_1\Sigma_2}$ w punkcie $\mathbf{x}_0$ jest ij-tym minorem macierzy*

$$\left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}(\mathbf{y}_0 - \mathbf{p})\mathbf{e}_i^T}{\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}(\mathbf{y}_0 - \mathbf{p})}\right] e^{\mathbf{A}t_0}. \tag{3.70}$$

Dowód: Idea dowodu została zaczerpnięta z pracy [44]. Zdefiniujmy $\mathbf{F}(\mathbf{x},t) = \mathbf{e}_i^T(e^{\mathbf{A}t}(\mathbf{x}-\mathbf{p})+\mathbf{p}) - \mathbf{e}_i^T\mathbf{y}_0$. Jest oczywiste, że

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}_0,t_0) = \mathbf{e}_i^T(e^{\mathbf{A}t_0}(\mathbf{x}_0-\mathbf{p})+\mathbf{p}) - \mathbf{e}_i^T\mathbf{y}_0 = \mathbf{e}_i^T\mathbf{y}_0 - \mathbf{e}_i^T\mathbf{y}_0 = 0, \tag{3.71}$$

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}_0,t_0) = \mathbf{e}_i^T\mathbf{A}e^{\mathbf{A}t_0}(\mathbf{x}_0-\mathbf{P}) = \mathbf{e}_i^T\mathbf{A}(\mathbf{y}_0-\mathbf{P}) \neq 0. \tag{3.72}$$

Na podstawie twierdzenia o funkcjach uwikłanych istnieje otoczenie U punktu $\mathbf{x}_0$ i funkcja $t : U \ni \mathbf{x} \longrightarrow t(\mathbf{x}) \in \mathbf{R}$ taka, że dla każdego $\mathbf{x} \in U$ zachodzi $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t(\mathbf{x})) = 0$ oraz $t(\mathbf{x}_0) = t_0$.

$$\mathbf{D}t(\mathbf{x}_0) = -\left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}(\mathbf{x}_0,t_0)\right]^{-1}\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0,t_0) = -[\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}(\mathbf{y}_0-\mathbf{p})]^{-1}\mathbf{e}_i^Te^{\mathbf{A}t_0}. \tag{3.73}$$

Zdefiniujmy $f(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{A}t(\mathbf{x})}(\mathbf{x}-\mathbf{p})+\mathbf{p}$. Oznaczmy przez $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ pochodną odwzorowania f w punkcie $\mathbf{x}_0$. W celu jej obliczenia rozłóżmy odwzorowanie f w następujący sposób: $f(\mathbf{x}) = (h \circ g)(\mathbf{x})$, gdzie $g(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, t(\mathbf{x}))$, $h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = e^{A\mathbf{y}}(\mathbf{x}-\mathbf{p})+\mathbf{p}$. Pochodne odwzorowań g i h są równe: $\mathbf{D}g(\mathbf{x}) = (\mathbf{I}, \mathbf{D}t(\mathbf{x}))^T$ i $\mathbf{D}h(\mathbf{x},\mathbf{y}) = (e^{\mathbf{A}\mathbf{y}}, \mathbf{A}e^{\mathbf{A}\mathbf{y}}(\mathbf{x}-\mathbf{p}))$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{D}h(\mathbf{x}_0, t(\mathbf{x}_0)) \cdot \mathbf{D}g(\mathbf{x}_0) = (e^{\mathbf{A}t(\mathbf{x}_0)}, \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t(\mathbf{x}_0)}(\mathbf{x}_0-\mathbf{p})) \cdot (\mathbf{I}, \mathbf{D}t(\mathbf{x}_0))^T \\
&= e^{\mathbf{A}t(\mathbf{x}_0)}\mathbf{I} + \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t(\mathbf{x}_0)}(\mathbf{x}_0-\mathbf{p})\mathbf{D}t(\mathbf{x}_0) \\
&= e^{\mathbf{A}t_0} - \mathbf{A}(\mathbf{y}_0-\mathbf{p})[\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}(\mathbf{y}_0-\mathbf{p})]^{-1}\mathbf{e}_i^Te^{\mathbf{A}t_0} \\
&= \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{A}(\mathbf{y}_0-\mathbf{p})\mathbf{e}_i^T}{\mathbf{e}_i^T\mathbf{A}(\mathbf{y}_0-\mathbf{p})}\right]e^{\mathbf{A}t_0}.
\end{aligned}$$

$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ jest macierzą Jakobianową trójwymiarowej funkcji $f = (f^1, f^2, f^3)$ trzech zmiennych x, y, z. Z konstrukcji f wynika, że $f^i \equiv 0$, co odpowiada zerowemu i-temu wierszowi macierzy $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$. Ponieważ odwzorowanie f jest zdefiniowane na płaszczyźnie $\{\mathbf{x} : \mathbf{e}_j^T\mathbf{x} = \text{const}\}$ to jest oczywiste, że musimy usunąć i-ty wiersz i j-tą kolumnę z macierzy $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$ aby otrzymać macierz Jakobianową uogólnionego odwzorowania Poincarégo. □

W przypadku gdy macierz $\mathbf{A}$ nie jest odwracalna i rozwiązanie układu jest postaci (3.67) macierz Jakobianowa uogólnionego odwzorowania Poincarégo jest ij-tym minorem macierzy

$$\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \left[\mathbf{I} - \frac{(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3e^{-t_0} - \mathbf{B}_4\mathbf{x}_0e^{-t_0})\mathbf{e}_i^T}{\mathbf{e}_i^T(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_3e^{-t_0} - \mathbf{B}_4\mathbf{x}_0e^{-t_0})}\right]\left(\mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_4e^{-t_0}\right). \tag{3.74}$$

Dowód przebiega podobnie jak w przypadku macierzy odwracalnej.

Możemy teraz obliczyć macierz Jakobianową pełnego odwzorowania Poincarégo

$$\mathbf{J} = \mathbf{D}f_6(\mathbf{x}_6)_{12} \cdot \mathbf{D}f_5(\mathbf{x}_5)_{23} \cdot \mathbf{D}f_4(\mathbf{x}_4)_{32} \cdot \mathbf{D}f_3(\mathbf{x}_3)_{23} \cdot \mathbf{D}f_2(\mathbf{x}_2)_{31} \cdot \mathbf{D}f_1(\mathbf{x}_1)_{11},$$

gdzie $\mathbf{D}f(\mathbf{x})_{ij}$ oznacza ij-ty minor macierzy $\mathbf{D}f(\mathbf{x})$.

Ten sam wynik można otrzymać najpierw mnożąc macierze $\mathbf{D}f_j$ w tej samej kolejności a potem usuwając pierwszą kolumnę i pierwszy wiersz.

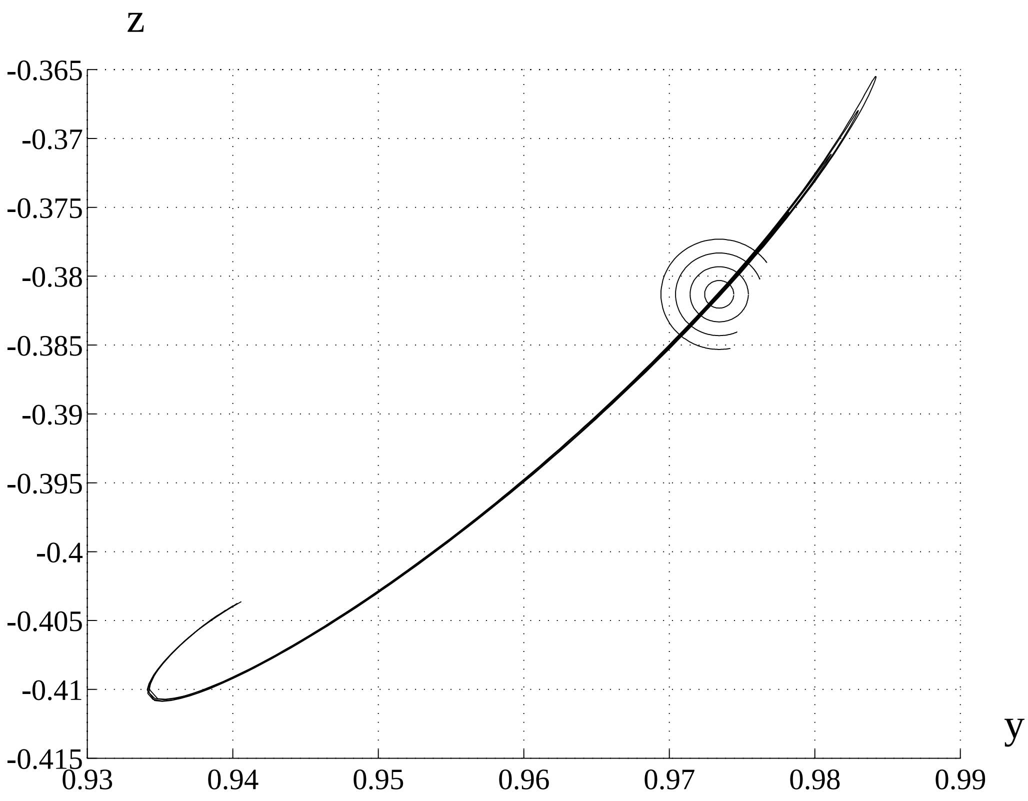
Używając aproksymacji punktu stałego (3.69) obliczyliśmy macierz Jakobianową punktu stałego odwzorowania Poincarégo

$$\mathbf{J} \approx \begin{pmatrix} -5.7767 & 2.3839 \\ -6.7152 & 2.7238 \end{pmatrix}. \tag{3.75}$$

Jej wartości własne są równe: $\lambda_s \approx -0.0924$, $\lambda_u \approx -2.9604$.

3.6.3 Ciągłość odwzorowania Poincarégo

W poprzednim podrozdziale obliczone zostało położenie orbity okresowej i jej macierz Jakobianowa. Obliczenia wykonano bez całkowania numerycznego i uzyskano bardzo dokładne wyniki. Obliczone wartości zgadzają się dość dobrze z wartościami wyznaczonymi na podstawie ciągu próbek, otrzymanych przy użyciu całkowania numerycznego.



Rysunek 3.15: Obrazy okręgów o środku w punkcie stałym przez odwzorowanie Poincarégo

Aby przeanalizować wpływ istnienia szumów na efektywność działania metody sterowania dodaliśmy $\varepsilon\delta_n$ do ciągu próbek, gdzie ε jest małą liczbą określającą poziom szumów zaś δ_n jest trójwymiarową zmienną losową $\delta_n \in [-1, 1]^3$ o rozkładzie jednostajnym.

Dla $\varepsilon = 0.0005$ metoda sterowania działała poprawnie, ale już dla $\varepsilon = 0.001$ nie byliśmy w stanie ustabilizować orbity okresowej. Podobny efekt uzyskaliśmy przy zmianie kroku całkowania, gdy używaliśmy metody Rungego-Kutty zamiast dokładnych rozwiązań. Dla kroku całkowania $\tau = 0.005$ metoda sterowania działała bez zarzutu, natomiast dla $\tau = 0.01$ sterowanie było nieudane. Większy krok całkowania odpowiada większym błędom przy obliczaniu odwzorowania Poincarégo. Na Rys. 3.15 przedstawione zostały okręgi o środku w punkcie stałym i ich obrazy przez odwzorowanie Poincarégo. Tylko te punkty z okręgów są zaczernione, które wracają w małe otoczenie punktu stałego przy pierwszej iteracji odwzorowania Poincarégo. Istnienie ciągłego odwzorowania Poincarégo jest zapewnione tylko lokalnie. Przerwane okręgi (Fig. 3.15) oznaczają nieciągłość tego odwzorowania w małym otoczeniu punktu stałego.

Zaobserwowaliśmy, że niektóre trajektorie startujące z punktów bliskich punktowi stałemu przecinają hiperpłaszczyznę H_1^- i wchodzą w drugą część atraktora. W celu znalezienia takich punktów należy rozwiązać równanie:

$$\mathbf{e}_1^T e^{\mathbf{A}t_0}\mathbf{x} = -1, \tag{3.76a}$$

równocześnie z warunkiem:

$$\mathbf{e}_1^T e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} \in \Omega_{000} \ \ \forall t \in [0, t_0], \tag{3.76b}$$

gdzie $\mathbf{x} = (1, y_0, z_0)^T$. Używając arytmetyki interwałowej znaleziony został punkt $\mathbf{x} = (1, 0.976024, -0.382350)$ spełniający (3.76). Punkt ten jest położony bardzo blisko punktu stałego, jego odległość od punktu stałego wynosi $d \approx 0.0028$. Istnienie punktu spełniającego warunki (3.76) jest wytłumaczeniem przerwanych okręgów z Rys. 3.15.

Można zauważyć dwa główne powody, dla których liniowa aproksymacja jest niedokładna. Pierwszą przyczyną jest to, że ciągłe odwzorowanie Poincarégo jest określone tylko w małym otoczeniu punktu stałego. Takie otoczenie może być zbyt małe do zapewnienia skutecznego sterowania. Jeśli nie jesteśmy w stanie utrzymać trajektorii w tym małym otoczeniu przez cały czas sterowania to może ona uciec w inną część atraktora. W rozważanym przypadku koło o promieniu 0.003 i środku w punkcie stałym nie jest całkowicie zawarte w dziedzinie ciągłego odwzorowania Poincarégo. Drugim powodem może być istnienie niepomijalnych składników nieliniowych (widoczne zagięcie obrazu okręgu o promieniu 0.004 na Rys. 3.15),

3.7 Wnioski

Opisane metody sterowania chaosem polegające na stabilizacji orbit okresowych działają poprawnie w teorii i dokładnych symulacjach komputerowych. Wydaje się jednak, że zastosowanie ich w rzeczywistych układach eksperymentalnych może być bardzo trudne. Szczególnie ważne dla poprawnego działania metody jest dokładne wyznaczenie punktów przecięcia orbity okresowej z płaszczyznami transwersalnymi. Nawet niewielkie błędy mogą powodować złe działanie metody. Dokładność współrzędnych wektora **c** jest mniej istotna. Stabilizację układu można uzyskać przy różnych wartościach wektora **c**. Wektor **c** musi być tak dobrany, aby macierz Jakobianowa układu ze sprzężeniem zwrotnym była stabilna.

Jeśli linearyzacja nie jest dostatecznie dokładna lub gdy ciągłe odwzorowanie Poincarégo jest określone tylko w małym otoczeniu punktu stałego to w teorii możemy zmniejszyć wielkość otoczenia. Jedną z własności metody jest to, że stabilizacja może zostać osiągnięta przy dowolnie małych zmianach parametrów. W praktyce jednak nie można zmniejszać tego otoczenia poniżej pewnej wielkości zależnej od poziomu szumów i błędów w układzie. Ponadto musimy rozważać wystarczająco duże otoczenia przy wyznaczaniu parametrów układu tak, aby obliczone parametry stabilizowanej orbity okresowej nie zależały głównie od poziomu szumów.

Opisane metody stabilizacji orbit okresowych można zmodyfikować tak, aby aproksymacja, na podstawie której obliczana jest wartość parametru sterującego zawierała składniki wyższych rzędów. Powoduje to jednak znaczną komplikację algorytmu. W rzeczywistych eksperymentach taka modyfikacja może nie przynieść poprawy także na skutek niemożności wyznaczenia dokładnych wartości współczynników składników nieliniowych. Wobec istnienia szumów w układzie trudne jest nawet znalezienie składników liniowych.

Ciekawą wersją metody stabilizacji orbit okresowych jest metoda Hunta [40]. Jest to wersja metody OGY, w której do obliczenia parametru sterującego używana jest tylko jedna zmienna układu, a współczynnik sprzężenia zwrotnego jest dobierany eksperymentalnie. Przy tym podejściu nie ma możliwości wyboru orbity okresowej, ani pewności, że uda się ustabilizować jakąkolwiek z nich. Jednak w pewnych zastosowaniach brak możliwości wyboru stabilizowanej orbity okresowej nie jest ograniczeniem i metoda ta znalazła aplikacje praktyczne [41, 64].

Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawione zostały wybrane aspekty analizy i sterowania układów chaotycznych. W części pierwszej przedstawiono wiele pojęć istotnych podczas analizy drgań chaotycznych, oraz opisano rozważane w niniejszej pracy układy generujące drgania chaotyczne.

W pierwszej części rozdziału drugiego opisano metody poszukiwania orbit okresowych na podstawie znajomości ciągu próbek pochodzących z układu. Metody te zilustrowano na przykładzie układu Hénona oraz obwodu Chuy. Stwierdzono, że lepsze rezultaty można uzyskać poszukując punktów okresowych odwzorowania Poincarégo, zamiast orbit okresowych układu ciągłego. W drugiej części rozdziału zaprezentowano nową technikę analizy układów chaotycznych. W przeciwieństwie do metod opartych na twierdzeniu Szylnikowa pozwala ona na stwierdzenie istnienia nieskończenie wielu orbit okresowych dla zadanych z góry wartości parametrów układu. Może być ona zastosowana dla układów ciągłych, których odwzorowanie Poincarégo posiada zanurzoną zdeformowaną podkowę Smale'a. Używając tej metody można udowodnić, że entropia topologiczna ciągłego układu dynamicznego jest dodatnia. Zastosowanie tej techniki zostało przedstawione na przykładzie obwodu Chuy. Udowodniono istnienie nieskończenie wielu punktów okresowych odwzorowania Poincarégo generowanego przez układ Chuy oraz wykazano, że entropia topologiczna tego odwzorowania jest dodatnia. W celu przeprowadzenia wspomaganego komputerem dowodu opracowano zestaw procedur do artymetyki interwałowej. Metoda ta może znaleźć zastosowanie przy analizie bardzo szerokiej klasy obwodów. Można ją zastosować dla dowolnych typów nieliniowości. W takim przypadku należy wziąć pod uwagę błędy popełniane podczas całkowania numerycznego. Możliwe są również uogólnienia na wyższe wymiary, choć wiąże się to ze zwiększeniem liczby obliczeń.

W rozdziale trzecim poruszono problem sterowania układów chaotycznych. Opisano kilka istniejących metod stabilizacji orbit okresowych w układach chaotycznych za pomocą niewielkich zmian jednego z parametrów układu. Omówiono przypadki kiedy metody te nie dają się zastosować. Zaproponowano nową metodę sterowania nazwaną metodą minimum odległości, która omija niedogodności metod istniejących. Opisano również metodę sterowania dwupołożeniowego, która może być zastosowana w przypadku gdy parametr sterujący może przyjąć tylko jedną z dwóch wartości. Dla każdej z opisanych metod udowodniono szereg rezultatów rozstrzygających możliwości ich zastosowania w konkretnych przypadkach.

W drugiej części rozdziału potwierdzone zostało poprawne działanie metod w wielu eksperymentach symulacyjnych. Działanie metod testowano na przykładzie układu Hénona, obwodu Chuy oraz trójkomórkowej sieci neuronowej. Przeprowadzono analizę wpływu szumów w układzie na działanie metod sterowania. Wyjaśniono również jakie mogą być przyczyny niepoprawnego działania metod w eksperymentach rzeczywistych. Stwierdzono, że szczególnie ważne jest dokładne wyznaczenie położenia stabilizowanej orbity okresowej. Nawet małe odchylenia od wartości rzeczywistych mogą spowodować niepoprawne działanie metod stabilizacji. Wartości pozostałych parametrów są natomiast mniej istotne dla działania metody. Stabilizację orbity okresowej można osiągnąć dla wielu wartości tych parametrów. Podano wiele wskazówek na temat wyboru liczby i położenia płaszczyzn transwersalnych zapewniających optymalne działanie metod sterowania.

Spis literatury

[1] E. Adams, W.F. Ames, W. Kühn, W. Rufeger, H. Spreuer, "*Computational chaos may be due to a single local error*", J. Comp. Phys., vol. 104, str. 241–249, 1993.

[2] G. Alefeld, J. Herzberger, "*Introduction to interval computations*", Academic Press, New York 1983.

[3] P.J. Aston, C.M. Bird, "*Analysis of the control of chaos — rate of convergence*", report of Dept. of Mathematical and Computing Sciences, University of Surrey.

[4] D. Auerbach, P. Cvitanović, J.P. Eckmann, G. Gunaratne, I. Procaccia, "*Exploring chaotic motion through periodic orbits*", Phys. Rev. Lett., vol. 58, no. 23, str. 2387–2389, 1987.

[5] N.P. Bhatia, G.P. Szegö, "*Stability theory of dynamical systems*", Springer Verlag, 1970.

[6] A. Białynicki-Birula, "*Algebra liniowa z geometrią*", PWN, Warszawa, 1979.

[7] R. Bowen, "*Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms*", Trans. Amer. Math. Soc., vol. 154, str. 377–397, 1971.

[8] Y. Breiman, I. Goldhirsch, "*Taming chaotic dynamics with weak periodic perturbation*", Phys. Rev. Lett., vol. 66, str. 2545–1548, 1991.

[9] G. Chen, X. Dong, "*From chaos to order — perspectives and methodologies in controlling nonlinear dynamical systems*", Int. J. Bifurcation Chaos, vol. 3, str. 1363–1409, 1993.

[10] G. Chen, X. Dong, "*Controlling Chua's circuit*", J. Circuits Syst. Comp., vol. 3, str. 139–148, 1993.

[11] L.O. Chua, G.N. Lin, "*Canonical realisation of Chua's circuit family*", IEEE Trans. Circuits and Systems, vol. CAS–37, no. 7, str. 885–902, 1990.

[12] P. Cvitanović, "*Invariant measurement of strange sets in terms of cycles*", Phys. Rev. Lett., vol. 61, no. 24, str. 2729–2732, 1988.

[13] A. Dąbrowski, Z. Galias, M.J. Ogorzałek, "*A study of identification and control in a real implementation of Chua's circuit*", Proc. 2nd IFAC Workshop on System Structure and Control, str. 278–281, Praga 1992.

[14] A. Dąbrowski, Z. Galias, M.J. Ogorzałek, "*Investigations of stabilisation procedures for a chaotic electronic circuit*", XVI Krajowa Konferencja, Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne, vol. 1, str. 19-24, Kołobrzeg 1993.

[15] A. Dąbrowski, Z. Galias, M.J. Ogorzałek, "*On-line identification and control of chaos in a real Chua's circuit*", Kybernetika, Czech Academy of Sciences, vol. 30, no. 4, str. 425–432, 1994.

[16] A. Dąbrowski, Z. Galias, M.J. Ogorzałek, "*Strategies for controlling chaos in Chua's circuit*", w "Systems and Networks: Mathematical Theory and Applications - vol. II", U. Helmke, R. Mennicken, J. Saurer Eds., str. 391–394, Academie Verlag 1994.

[17] A. Dąbrowski, Z. Galias, M.J. Ogorzałek, L.O. Chua, "*Laboratory environment for controlling chaotic electronic systems*", Proc. European Conference on Circuit Theory and Design, Elsevier, vol. 1, str. 867–872, Davos 1993.

[18] H. Dedieu, M.J. Ogorzałek, "*Identification and control of nonlinear dynamics for signal coding and compression*", Proc. European Conference on Circuit Theory and Design, Elsevier, vol. 2, str. 1137–1140, Istambuł 1995.

[19] A. Dold, "*Lectures on algebraic topology*", Springer Verlag, 1972.

[20] R. Duda, "*Wprowadzenie do topologii. Topologia ogólna*", PWN, Warszawa 1986.

[21] R .Duda, "*Wprowadzenie do topologii. Topologia algebraiczna*", PWN, Warszawa 1986.

[22] J.P. Eckmann, D. Ruelle, "*Ergodic theory of chaos and strange attractors*", Rev. Mod. Phys., vol. 57, no. 3, Part I, str. 617–656, 1985.

[23] U. Dressler, G. Nitsche, "*Controlling chaos using time delay coordinates*", Phys. Rev. Lett., vol. 68, no. 1, str. 1–4, 1992.

[24] S. W. Fomin, I. P. Kornfeld, J. G. Sinaj, "*Teoria ergodyczna*", PWN, Warszawa 1987.

[25] Z. Galias, J.A. Nossek, M.J. Ogorzałek, "*Negative results on control of chaotic circuits*", Proc. 2nd Int. Workshop, Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, NDES'94, str. 174–178, Kraków 1994.

[26] Z. Galias, "*Stabilization of periodic orbits based on distance minimization*", XVI Krajowa Konferencja, Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne, vol. 1, str. 19–24, Wrocław – Polanica Zdrój 1994.

[27] Z. Galias, J.A. Nossek, "*Control of a real chaotic cellular neural network*", Proc. 3rd IEEE Int. Workshop on Cellular Neural Networks and their Applications, CNNA'94, str. 345, Rzym 1994.

[28] Z. Galias, "*New method for stabilization of unstable periodic orbits in chaotic systems*", Int. J. Bifurcation Chaos, vol. 5, no. 1, str. 281–295, 1995.

[29] Z. Galias, M.J. Ogorzałek, "*Infinitely many periodic orbits in Chua's circuit: a computer assisted proof*", Proc. European Conference on Circuit Theory and Design, vol. 1, str. 107–110, Istambuł 1995.

[30] Z. Galias, M.J. Ogorzałek, "*Bang-bang control of chaotic systems*", Proc. 3rd Int. Workshop, Nonlinear Dynamics of Electronic Systems, NDES'95, str. 229–232, Dublin 1995.

[31] G.H. Golub, C.F. Van Loan, "*Matrix computations*", Johns Hopkins University Press, Baltimore and London.

[32] A. Granas, "*The Leray–Schauder index and the fixed point theory for arbitrary ANR's*", Bull. Soc. Math., France, vol. 100, str. 209–228, 1972.

[33] C. Grebogi, E. Ott, S. Pelikan, J.A. Yorke, "*Strange atractors that are not chaotic*", Physica 13D, str. 261–268, 1984.

[34] C. Grebogi, E. Ott, J.A. Yorke, "*Unstable periodic orbits and the dimension of multifractal chaotic attractors*", Phys. Rev. A, vol. 37, no. 5, str. 1711–1724, 1988.

[35] H. Haken "*At least one Lyapunov exponent vanishes if the trajectory of an attractor does not contain a fixed point*", Phys. Lett., vol. 94A, no. 2, str. 71–72, 1983.

[36] M. Hasler "*Synchronization principles and applications*", rozdział 6.2 w Circuits and Systems — Tutorials, editor Chris Toumazou, IEEE 1994.

[37] H. Herzel, "*Stabilization of chaotic orbits by random noise*", ZAMM, vol. 68, str. 1–3, 1988.

[38] M. Hénon, "*A two dimensional map with a strange attractor*", Commun. Math. Phys., vol. 50, str. 463, 1976.

[39] A. Hübler, "*Adaptive control of chaotic systems*", Helvetica Physica Acta, vol. 62, str. 343–346, 1989.

[40] E. R. Hunt, "*Stabilizing high-period orbits in a chaotic system: the diode resonator*", Phys. Rev. Lett., vol. 67, no. 15, str. 1953–1955, 1991.

[41] A. Garfinkel, M.L. Spano, W.L. Ditto, J.N. Weiss, "*Controlling cardiac chaos*", Science, vol. 257, str. 1230–1235, 1992.

[42] J. Guckenheimer, P. Holmes, "*Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*", Springer Verlag, New York 1983.

[43] T. Kapitaniak, L. Kocarev, L.O. Chua, "*Controlling chaos without feedback and control signal*", Int. J. Bifurcation Chaos, vol. 3, str. 459–468, 1993.

[44] M. Komuro, R. Tokunaga, T. Matsumoto, L.O. Chua, A. Hotta, "*Global bifurcation analysis of the double scroll circuit*", Int. J. Bifurcation Chaos, vol. 1, no. 1, str. 139–182, 1991.

[45] M.A. Krasnosielskij, "*Wektornyje pola na płoskosti*", Wydawnictwo FM, Moskwa 1963.

[46] J. Kudrewicz, "*Fraktale i chaos*", Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1993.

[47] D.P. Lathrop, E.J. Kostelich, "*Characterisation of an experimental strange attractor by periodic orbits*", Phys. Rev. A, vol. 40, no. 7, str. 4028–4031, 1989.

[48] W. Lipski, W. Marek, "*Analiza kombinatoryczna*", PWN, Warszawa 1986.

[49] M. Marek, I. Schreiber, '*Chaotic behaviour of deterministic dissipative systems*", Academia, Praha 1991.

[50] T. Matsumoto, L.O Chua, K. Ayaki, "*Reality of chaos in the double scroll circuit: a computer-assisted proof*", Trans. Circuits Systems, vol. CAS–35, no. 7, str. 909–925, July 1988.

[51] K. Mischaikow, M. Mrozek, "*Chaos in the Lorenz equation: a computer assisted proof*", to appear in Bull. Amer. Math. Soc.

[52] W. Mitkowski, "*Stabilizacja systemów dynamicznych*", Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1991.

[53] A. Mostowski, M. Stark, "*Algebra liniowa*", PWN, Warszawa 1977.

[54] M.J. Ogorzałek, Z. Galias, "*Unstable periodic orbits in analysis of chaotic circuits*", XV Krajowa Konferencja, Teoria Obwodów i Układy Elektroniczne, vol. 1, str. 1–6, Szczyrk 1992.

[55] M. J. Ogorzałek, Z. Galias, "*Characterisation of chaos in Chua's oscillator in terms of unstable periodic orbits*", J. Circuits, Systems and Computers, vol. 3, no. 2, str. 411–429, 1993.

[56] M.J. Ogorzałek, "*Drgania chaotyczne w autonomicznych obwodach elektrycznych*", Zeszyty Naukowe AGH, Elektrotechnika 20, Kraków 1991.

[57] M.J. Ogorzałek, Z. Galias, L.O. Chua, "*Exploring chaos in Chua's circuit via unstable periodic orbits*", Proc. Int. Symposium on Circuits and Systems, Chicago, vol. 4, str. 2608–2611, 1993.

[58] M.J. Ogorzałek, "*Taming chaos — part II: control*", Trans. Circuits Systems, vol. CAS-40, no. 10, str. 700–706 ,1993.

[59] M.J. Ogorzałek, "*Chaos control: how to avoid chaos or take advantage of it*", J. Franklin Institute, vol. 331B, no. 6, str. 681–704 ,1994.

[60] E. Ott, C. Grebogi, J.A. Yorke, "*Controlling chaotic dynamical systems*", Published in: Chaos — Soviet-American Perspectives on Nonlinear Science, D.K. Campbell ed., American Institute of Physics, New York, str. 153–172, 1990.

[61] T.S. Parker, L.O. Chua, "*Practical numerical algorithms for chaotic systems*", Springer Verlag, New York 1989.

[62] K. Pyragas, "*Continuous control of chaos by self-controlling feedback*"„ Phys. Lett. A, vol. A170, str. 421–428, 1992.

[63] C. Robinson, "*Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*", CRC Press, USA, 1995.

[64] R. Roy, T.W. Murphy, Jr., T.D. Maier, Z. Gills, E.R. Hunt, "*Dynamical control of a chaotic laser: Experimental stabilization of a globally coupled system*", Phys. Rev. Lett., vol. 68, no. 9, str. 1259–1262, 1990.

[65] H.G. Schuster, "*Chaos deterministyczny*", PWN, Warszawa 1993.

[66] W. Schwarz, A. Davies, "*Circuits and systems for ganaration of random and pseudorandom signals*", Tutorial Book, ISCAS'95, Seatle, USA.

[67] J. Stoer, R. Burlisch, "*Wstęp do analizy numerycznej*", PWN, Warszawa 1987.

[68] W. Szlenk, "*Wstęp do teorii gładkich układów dynamicznych*", PWN, Warszawa 1982.

[69] L.P. Szylnikow, "*O suszczestwowanii sczotnogo mnożestwa pieriodiczeskich dwiżenii w okriestnosti gomokliniczeskoj kriwoj*", Dokłady AN SSSR, vol. 172, no. 2, str. 298–301, 1967.

[70] F. Takens, "*Dynamical systems and turbulence*", Springer Verlag, Berlin 1981.

[71] C. Tresser, "*About some theorems by L. P. Šil'nikov*", Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 40, no. 4, str. 441–461, 1984.

[72] J.N. Weiss, A. Garfinkel, M.L. Spano, W.L.Ditto, "*Chaos and chaos control in biology*", J. Clin. Invest., vol. 93, str. 1355-1360, April 1994.

[73] P. Zgliczyński, "*Fixed point index for iterations of maps, topological horseshoe and chaos*", to appear in J. Differential Equations.

[74] F. Zou, J.A. Nossek, "*Bifurcation and chaos in cellular neural network*", IEEE Trans. Circuits Systems, vol. CAS–40, no. 3, str. 166–172, March 1993.

Summary:

Analysis and processing of chaotic signals

This work is devoted to the analysis and control of chaotic systems. We consider continuous dynamical systems generated by third-order autonomous ordinary differential equations and two-dimensional discrete systems. The first problem considered is the possibility of determination if the system is chaotic using system's equations or time series taken in measurements. The second problem we address is control of chaotic systems in the sense of suppression of chaotic oscillations.

In the first chapter some preliminary definitions and several properties of chaotic systems are presented. We also introduce chaotic systems considered in this work.

In the second chapter we discuss the problem of searching for and proving the existence of periodic orbits in chaotic systems. The chapter consists of two parts. In the first part we address the problem of identification of periodic orbits using experimental data. An heuristic search algorithm for periodic orbits and its modifications are described.

In the second part of this chapter an original method for proving the existence of infinitely many periodic orbits for systems with deformed horseshoe embedded is presented. This techique combines abstract existence results based on topological invariants (fixed point index) with finite, computer assisted computations necessary to verify the assumptions of the theorems in the considered example. This method is used to prove analytically the existence of an infinite number of periodic orbits for Chua's system. In order to take into account computational errors we utilize interval arithmetics during computer calculations. We also present the set of interval arithmetic procedures necessary in the proof.

The existence of infinitely many periodic orbits is then used to prove that the topological entropy of the Poincaré map associated with the Chua's system is positive. In the last part of this chapter we prove that the continuous-time dynamical system defined by the equations of Chua's circuit is chaotic in the sense of having positive topological entropy.

The third chapter is devoted to control of chaotic systems in the sense of stabilization of one of the unstable periodic orbits embedded within the chaotic attractor. First, several control methods are described and their properties and discussed. In particular we show an example when these methods cannot be used. We present a new control method based on minimization of the distance between trajectory and the stabilized periodic orbit. We also present a two-level version of these methods. We discuss the problem of effectiveness of control for all the methods considered. Finally we show the results of computer simulations for the control methods and present some conclusions about possibilities of using these methods for control of real systems.