

METODY PRZEDZIAŁOWE DOWODU ISTNIENIA ORBIT OKRESOWYCH W UKŁADACH NIELINIOWYCH

Zbigniew Galias

Zakład Elektrotechniki EAIiE, Akademia Górniczo-Hutnicza,
al. Mickiewicza 30, 30-059 Kraków, e-mail: galias@zet.agh.edu.pl

STRESZCZENIE

W niniejszej pracy przedstawione są metody ścisłego badania istnienia orbit okresowych w nieliniowych układach dynamicznych. Opisane metody opierają się na arytmetyce przedziałowej i przedziałowej wersji operatora Newtona. Podane są przykłady analizy układu dyskretnego oraz ciągłego układu dynamicznego odpowiadającego obwodowi elektronicznemu trzeciego rzędu.

1 WSTĘP

Podstawowymi metodami badania układów nieliniowych są symulacje komputerowe i eksperymenty laboratoryjne. W symulacjach skomplikowane trajektorie są obserwowane podczas iterowania odwzorowania lub całkowania numerycznego układu równań różniczkowych. Wiele z uzyskanych wyników jest pozostawionych bez ścisłego dowodu. Nie ma jednak gwarancji, że zawsze istnieje rzeczywista trajektoria układu pozostająca w pobliżu trajektorii wygenerowanej przez komputer. W przypadku układów chaotycznych, których cechą jest wrażliwość na warunki początkowe ten problem nabiera szczególnego znaczenia. Kiedy odwzorowanie jest iterowane za pomocą komputera lub gdy obliczamy trajektorię układu ciągłego za pomocą wybranej metody numerycznej nieuniknione błędy zaokrągleń powodują, że rzeczywista trajektoria i trajektoria generowana przez komputer oddalają się od siebie i po pewnym czasie stają się nieskończone. Powstaje pytanie, czy obliczenia numeryczne dają wiarygodne wyniki.

Podobne pytania dotyczą problemu istnienia orbit okresowych, które w symulacjach komputerowych są znajdowane za pomocą jakiejś wersji metody Newtona. W niniejszej pracy pokażemy jak

można wykorzystać komputer do uzyskania ścisłych wyników dotyczących istnienia orbit okresowych. Przedstawione zostaną metody wykorzystujące arytmetykę przedziałową, które można efektywnie zastosować do dowodu istnienia i jednoznaczności orbit okresowych. Opisany zostanie algorytm do znajdowania wszystkich orbit okresowych o niskich okresach.

Jako przykład rozważymy odwzorowanie płaszczyzny w siebie, dla którego zostaną znalezione wszystkie orbity okresowe o niskim okresie ($n \leq 30$) oraz ciągły układ dynamiczny, stanowiący model układu elektronicznego trzeciego rzędu, dla którego zostanie wykazane istnienie wielu orbit okresowych.

2 METODY ARYTMETYKI PRZEDZIAŁOWEJ BADANIA ISTNIENIA ORBIT OKRESOWYCH

Opiszemy kilka metod, które mogą służyć do ścisłego badania istnienia orbit okresowych. Ich cechą charakterystyczną jest to, że mogą być zaimplementowane w komputerowej arytmetyce przedziałowej, która pozwala na otrzymanie ścisłych wyników za pomocą komputera. Wstęp do metod arytmetyki przedziałowej można znaleźć w pracach [7] lub [2].

Arytmetyka przedziałowa jest silnie rozwijającą się gałęzią matematyki stosowanej, która powstała, w celu zaspokojenia wymagań stawianych obliczeniom numerycznym, aby dawały ścisłe wyniki. Obliczenia prowadzone w arytmetyce przedziałowej z odpowiednim rodzajem zaokrągleń dają rezultaty, które zawierają zarówno wyniki obliczeń w arytmetyce komputera jak i wyniki dokładne (obliczone w arytmetyce nieskończonej precyzji).

W pracy tej będziemy używać liter pogrubionych do oznaczenia przedziałów, wektorów przedziałowych i macierzy przedziałowych i zwykłych liter do oznaczania wielkości “rzeczywistych”. Przez *przedział* będziemy rozumieć domknięty ograniczony zbiór liczb rzeczywistych postaci:

$$\mathbf{x} = [a, b] = \{x: a \leq x \leq b\}.$$

Przedział można również rozważać jako uporządkowaną parę dwóch liczb rzeczywistych a a b , będących jego końcami. n -wymiarowy wektor przedziałowy jest to uporządkowany ciąg n przedziałów $\mathbf{v} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Wektor przedziałowy o wymiarze n odpowiada kostce n -wymiarowej w przestrzeni $\mathbb{R}^n: \{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in \mathbf{x}_i \text{ dla } i = 1, \dots, n\}$.

Na zbiorze przedziałów definiujemy podstawowe operacje arytmetyczne

$$\mathbf{x}_1 \diamond \mathbf{x}_2 = \{x = x_1 \diamond x_2: x_1 \in \mathbf{x}_1, x_2 \in \mathbf{x}_2\}. \quad (1)$$

gdzie \diamond jest jednym z następujących operatorów: $+$, $-$, \cdot lub $/$. Wszystkie operatory poza dzielenie są zdefiniowane dla dowolnych przedziałów. W przypadku dzielenia zakładamy, że przedział \mathbf{x}_2 nie zawiera liczby 0. Ponieważ liczba rzeczywista a może być potraktowana jako zdegenerowany przedział $a = [a, a]$, to arytmetyka przedziałowa zawiera w sobie zwykłą arytmetykę “rzeczywistą”.

Dla wszystkich operacji arytmetycznych istnieją wzory pozwalające obliczyć przedział, który jest wynikiem na podstawie końców wektorów poddanych działaniu danego operatora. Przykładowo dla dodawania przedziałów reguła jest następująca:

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d].$$

W praktyce nie jest możliwe wykonanie operacji arytmetycznych (rzeczywistych czy też przedziałowych) z nieskończoną dokładnością. Jesteśmy zatem ograniczeni przez reprezentacje o skończonej precyzji. Okazuje się, że jest możliwa implementacja arytmetyki przedziałowej na komputerze w taki sposób, aby operacje na przedziałach były wykonywane z odpowiednimi zaokrągleniami, wtedy kiedy to konieczne prawego i lewego końca obliczonego przedziału, tak aby obliczony przedział zawsze zawierał ścisły wynik. W “najlepszej” implementacji arytmetyki przedziałowej obliczony przez komputer prawy koniec przedziału jest najmniejszą liczbą reprezentowalną maszynowo, która jest nie mniejsza niż prawdziwy prawy koniec, zaś obliczony lewy koniec jest największą liczbą reprezentowalną maszynowo nie większą niż prawdziwy lewy koniec.

Istnieje wiele pakietów oprogramowania, które mogą być używane do przeprowadzania obliczeń

w arytmetyce przedziałowej. Są one dostępne jako biblioteki w C, C++, Fortranie, oraz jako zestaw procedur w Matlabie.

Niektóre algorytmy przedziałowe są rozszerzeniem odpowiednich algorytmów dla liczb rzeczywistych. Niektóre jednak są istotnie inne. Różnice wynikają z dualnego charakteru przedziału. Ponieważ przedział nie jest tylko liczbą reprezentowaną przez swoje końce, ale również jest zbiorem liczb rzeczywistych, to można obliczyć przecięcie dwóch lub więcej przedziałów lub sprawdzić zawieranie jednego przedziału w drugim. “Samosprawdzające się” metody przedstawione poniżej należą do tej właśnie klasy.

2.1 Istnienie i jednoznaczność orbit okresowych

Wprowadźmy definicję przedziałowego operatora Newtona [1], [8], który pozwala w prosty sposób stwierdzić istnienie zera danej funkcji wewnątrz zadanego wektora przedziałowego.

Załóżmy, że odwzorowanie $\mathbb{R}^m \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^m$ jest ciągle i różniczkowalne. Niech $\mathbf{x} \subset \mathbb{R}^m$ będzie wektorem przedziałowym i wybierzmy $x_0 \in \mathbf{x}$. $f'(\mathbf{x})$ jest macierzą przedziałową zawierającą macierz Jakobianową odwzorowania f na wektorze przedziałowym \mathbf{x} . Zakładamy, że macierz $f'(\mathbf{x})^{-1}$ istnieje. Niech $\mathbf{N}(\mathbf{x}) = x_0 - f'(\mathbf{x})^{-1}f(x_0)$. W celu zbadania istnienia zer funkcji f wewnątrz wektora przedziałowego \mathbf{x} wyznacza się *przedziałowy operator Newtona*

$$\mathbf{N}(\mathbf{x}) = x_0 - (f'(\mathbf{x}))^{-1}f(x_0), \quad (2)$$

Zwykle wybiera się x_0 jako środek wektora \mathbf{x} .

Należy zauważyć, że nie jest konieczne obliczanie macierzy odwrotnej do macierzy przedziałowej $f'(\mathbf{x})$ w celu wyznaczenia $\mathbf{N}(\mathbf{x})$. W celu obliczenia wyrażenia $(f'(\mathbf{x}))^{-1}f(x_0)$ można przykładowo użyć algorytmu Gaussa rozwiązywania układu równań liniowych.

Następujące twierdzenie [8], [1] może być użyte do dowodu istnienia i jedności zera funkcji f .

Twierdzenie 1. *Jeśli $\mathbf{N}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{x}$ to równanie $f(x) = 0$ posiada dokładnie jedno rozwiązanie w \mathbf{x} . Jeśli $\mathbf{N}(\mathbf{x}) \cap \mathbf{x} = \emptyset$ to nie ma zer funkcji f w \mathbf{x} .*

Przedziałowy operator Newtona może być użyty do badania istnienia zer w przypadku, gdy macierz przedziałowa $f'(\mathbf{x})$ jest regularna, tzn. jest złożona z macierzy niesingularnych. Operator Krawczyka i operator Hansena–Sengupty [8] można użyć dla szerszej klasy układów. Dla tych operatorów twierdzenia dotyczące istnienia i jednoznaczności zer są analogiczne jak dla operatora Newtona.

2.2 Orbity okresowe

Twierdzenie 1 można wykorzystać do dowodu istnienia orbity okresowej o okresie n poprzez zasto-

sowanie go do odwzorowania $g = \text{id} - f^n$. Tę metodę będziemy nazywać *standardową*. Inna możliwość to zastosowanie operatora przedziałowego do odwzorowania $G : (\mathbb{R}^m)^n \mapsto (\mathbb{R}^m)^n$ zdefiniowanego w następujący sposób:

$$[G(z)]_k = x_{(k+1) \bmod n} - f(x_k), \quad (3)$$

dla $k = 0, \dots, n-1$, gdzie $z = (x_0, \dots, x_{n-1})$. Jest oczywiste, że $G(z) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy x_0 jest punktem stałym odwzorowania f^n . W tej wersji, nazywanej *globalną* problem istnienia orbit okresowych jest przetłumaczony na problem istnienia zer odwzorowania o wymiarze n razy większym. Okazuje się, że wersja globalna nadaje się znacznie lepiej do dowodu istnienia dłuższych orbit okresowych.

W przypadku układów ciągłych w celu zastosowania operatorów przedziałowych do dowodu istnienia orbit okresowych dokonuje się standardowej redukcji problemu ciągłego do analizy układu z czasem dyskretnym poprzez zastosowanie metody odwzorowania Poincarégo.

2.3 Wszystkie orbity o okresie n

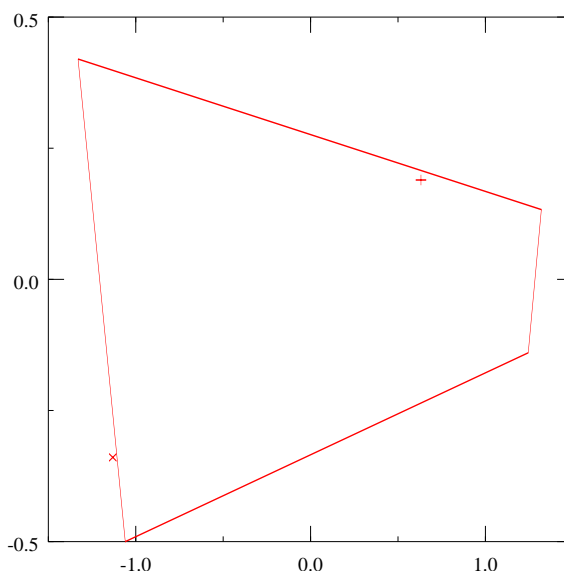
W celu znalezienia wszystkich orbit okresowych o okresie n zawartych wewnątrz danego obszaru używa się kombinacji uogólnionej metody bisekcji oraz Twierdzenia 1, w wersji standardowej lub globalnej. Rozważany obszar pokrywa się kostkami wymiaru m (w języku arytmetyki przedziałowej są to wektory przedziałowe wymiaru m). Dla każdego wektora przedziałowego \mathbf{x} wyznacza się operator przedziałowy $\mathbf{N}(\mathbf{x})$.

Jeśli $\mathbf{N}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{x}$, to udowodniliśmy, że wewnątrz \mathbf{x} znajduje się dokładnie jeden punkt stały odwzorowania f^n . Jeśli wektory przedziałowe \mathbf{x} i $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ są rozłączne to wiemy, że wewnątrz \mathbf{x} nie ma żadnych orbit o okresie n odwzorowania f . Jeśli żaden z tych dwóch warunków nie jest spełniony, to dokonujemy podziału kostki \mathbf{x} na mniejsze kostki i powtarzamy obliczenia.

W ten sposób można znaleźć liczbę oraz położenie orbit okresowych zawartych w danym obszarze. Iterując wielokrotnie operator przedziałowy na kostce zawierającej orbitę okresową możemy określić bardzo dokładnie położenie orbity okresowej. Poprawę dokładności można kontynuować dopóki warunek $\mathbf{N}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{x}$ jest spełniony.

Znając położenie orbity okresowej można obliczyć macierz jacobianową odwzorowania w punkcie położenia orbity okresowej i rozstrzygnąć problem stabilności orbity okresowej.

W przypadku układów ciągłych znalezienie wszystkich orbit okresowych o krótkich okresach może być trudne jeśli nie niemożliwe. Wynika to z faktu, że odwzorowanie Poincarégo zwykle nie jest



Rys. 1. Przykładowa trajektoria odwzorowania Hénona oraz zbiór pułapka Ω .

odwzorowaniem ciągłym. Punkty nieciągłości pojawiają się na skutek nietranswersalnych przecięć trajektorii z płaszczyzną definiującą odwzorowanie Poincarégo. W miejscach nieciągłości zastosowanie twierdzenia o istnieniu orbit okresowych jest niemożliwe, zaś w pobliżu punktu nieciągłości metody ścisłego obliczania obrazu punktu pod działaniem odwzorowania Poincarégo stają się bardzo nieefektywne. Zwykle więc przy analizie układów z czasem ciągłym musimy ograniczyć się do dowodu istnienia wybranych orbit okresowych, bez pewności, czy nie istnieją inne krótkie orbity okresowe.

W celu udowodnienia istnienia wielu orbit okresowych można zastosować połączenie metody bliskich powrotów poszukiwania orbit okresowych [5] oraz przedziałowej metody Newtona. Najpierw w symulacjach komputerowych znajduje się fragmenty trajektorii powracające w pobliżu punktu startowego. Używając klasycznej metody Newtona znajduje się dobre oszacowanie położenia orbity okresowej, a następnie tworzy się wektor przedziałowy o środku w znalezionym punkcie i ustalonej średnicy. Dla tak zdefiniowanego wektora przedziałowego \mathbf{x} wyznacza się $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ i sprawdza założenie $\mathbf{N}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{x}$. Jeśli założenie jest spełnione to istnienie orbity okresowej zostało udowodnione. W przeciwnym wypadku można ponownie obliczenia dla innej średnicy wektora \mathbf{x} .

3 Orbity okresowe dla odwzorowania Hénona

Jako pierwszy przykład rozważmy odwzorowanie Hénona, zdefiniowane następującym równaniem

$$h(x, y) = (1 + y - ax^2, bx), \quad (4)$$

gdzie $a = 1.4$, $b = 0.3$ są klasycznymi wartościami parametrów.

Na Rys.1 przedstawiona została przykładowa trajektoria układu oraz czworokąt Ω , który jest zbiorem pułapką dla odwzorowania Hénona, tzn. $h(\Omega) \subset \Omega$. Zbiór Ω zawiera w sobie atraktor Hénona obserwowany numerycznie. W naszych rozważaniach ograniczymy się do badania dynamiki odwzorowania Hénona wewnątrz zbioru Ω .

Porównanie czasów działania algorytmów pokazuje, że dla małych n efektywniejsze jest użycie wersji standardowej, zaś dla $n > 13$ metoda globalna pozwala na znalezienie wszystkich orbit okresowych w krótszym czasie. Okazuje się, że za pomocą metody standardowej nie jest możliwe znalezienie wszystkich orbit o okresach większych niż 17. Dla większych n konieczne staje się użycie wersji globalnej metody. Testy pokazują, że najszybsza jest metoda Krawczyka, choć w przypadku odwzorowania Hénona różnice w czasie obliczeń są nieznaczące [4].

Dla odwzorowania Hénona znalezione zostały wszystkie orbity okresowe o okresie $n \leq 30$ zawarte w zbiorze Ω . Są one przedstawione na Rys. 2. Wyniki te zostały podsumowane w Tabeli 1, gdzie zestawione są następujące dane: liczba Q_n orbit okresowych o okresie n , liczba P_n punktów stałych odwzorowania h^n , oraz oszacowanie entropii topologicznej $H_n = n^{-1} \log(P_n)$ na podstawie liczby punktów stałych odwzorowania h^n . W szczególności udowodniliśmy w ten sposób, że wewnątrz obszaru pułapki nie ma żadnych orbit okresowych o okresie 3 i 5, oraz że istnieją dokładnie 109033 orbity okresowe o okresie $n \leq 30$ i że jest 3065317 punktów należących do tych orbit. Znalezione orbity okresowe dają bardzo dobrą aproksymację atraktora Hénona.

4 Orbity okresowe dla obwodu Chuy

Jako kolejny przykład rozważmy obwód Chuy [6], nieliniowy układ rzędu trzeciego. Obwód Chuy opisany jest następującym równaniem:

$$\begin{aligned} C_1 \dot{x} &= G(y - x) - g(x), \\ C_2 \dot{y} &= G(x - y) + z, \\ L \dot{z} &= -y - R_0 z, \end{aligned} \quad (5a)$$

gdzie $g(\cdot)$ jest trójsegmentową funkcją odcinkami liniową

$$g(x) = G_b x + 0.5(G_a - G_b)(|x + 1| - |x - 1|). \quad (5b)$$

n	Q_n	P_n	H_n
1	1	1	0.00000
2	1	3	0.54931
3	0	1	0.00000
4	1	7	0.48648
5	0	1	0.00000
6	2	15	0.45134
7	4	29	0.48104
8	7	63	0.51789
9	6	55	0.44526
10	10	103	0.46347
11	14	155	0.45849
12	19	247	0.45912
13	32	417	0.46408
14	44	647	0.46231
15	72	1081	0.46571
16	102	1695	0.46471
17	166	2823	0.46739
18	233	4263	0.46432
19	364	6917	0.46535
20	535	10807	0.46440
21	834	17543	0.46535
22	1225	27107	0.46398
23	1930	44391	0.46525
24	2902	69951	0.46481
25	4498	112451	0.46521
26	6806	177375	0.46485
27	10518	284041	0.46507
28	16031	449519	0.46485
29	24740	717461	0.46495
30	37936	1139275	0.46486

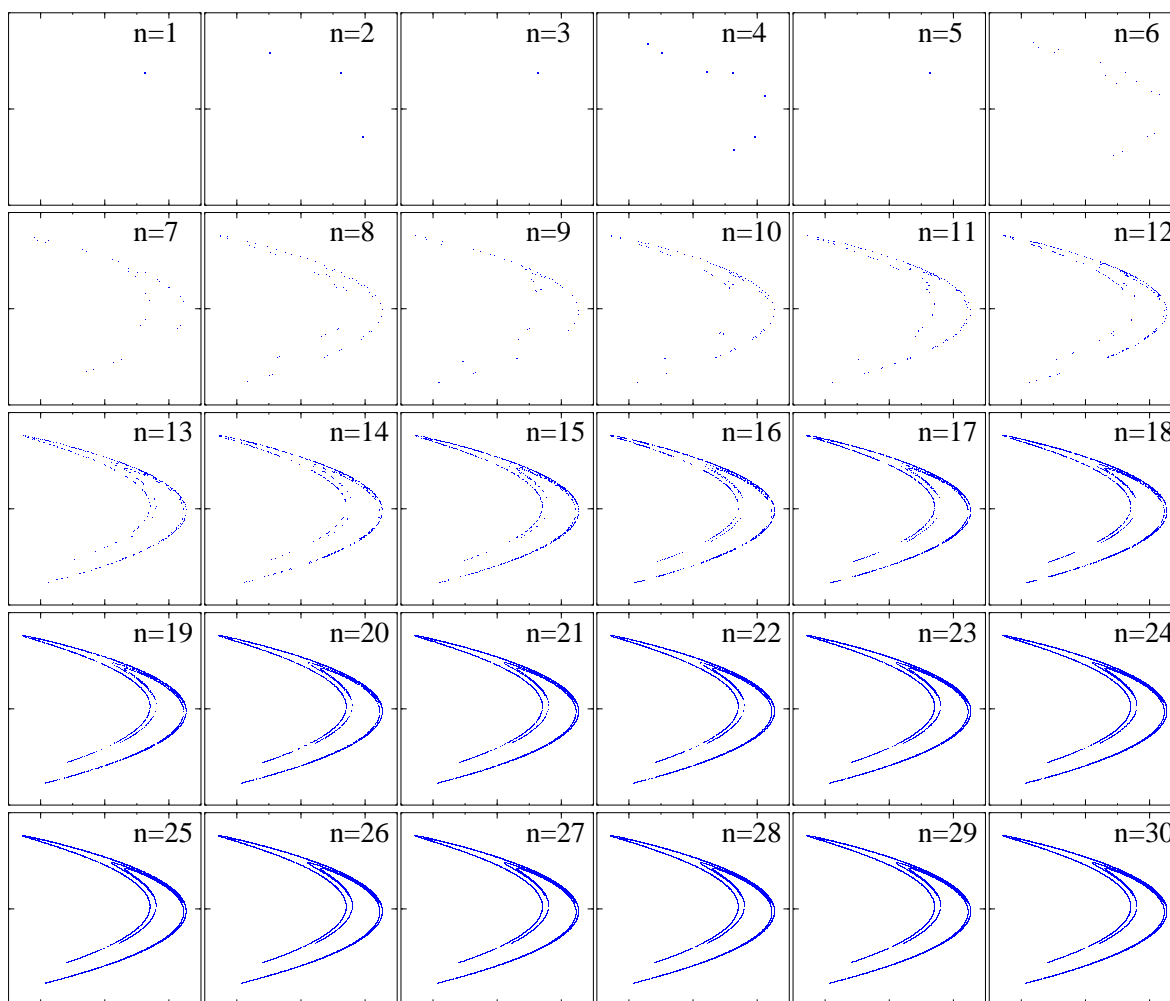
Tab. 1. Orbity okresowe dla odwzorowania Hénona. Q_n — liczba orbit okresowych o okresie n , P_n — liczba punktów stałych odwzorowania h^n , H_n — oszacowanie entropii topologicznej na podstawie liczby orbit okresowych.

W niniejszej pracy powyższy układ rozważany jest z następującymi wartościami parametrów: $C_1 = 1$, $C_2 = 9.3515$, $G_a = -3.4429$, $G_b = -2.1849$, $L = 0.06913$, $R = 0.33065$, $R_0 = 0.00036$. Dla tych wartości parametrów w symulacjach komputerowych obserwuje się atraktor chaotyczny o nazwie "double-scroll".

4.1 Metoda dowodu istnienia wielu orbit okresowych

W celu zastosowania metod opartych na operatorach przedziałowych wprowadzimy pojęcie uogólnionego odwzorowania Poincarégo.

Przestrzeń stanu \mathbb{R}^3 można podzielić na trzy obszary, w których układ równań różniczkowych opisujących obwód Chuy jest liniowy. Są one oddzielone płaszczyznami $\Sigma_{\pm} = \{ \mathbf{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 : x = \pm 1 \}$. Oznaczmy $\Sigma = \Sigma_+ \cup \Sigma_-$. Oznaczmy



Rys. 2. Orbitsy o okresie n odwzorowania Hénona wewnątrz obszaru pułapki Ω dla $n = 1, \dots, 30$.

przez $\varphi_t(x)$ trajektorię układu startującą z punktu x . Zdefiniujemy *uogólnione odwzorowanie Poincarégo* jako $H : \Sigma \ni x \mapsto H(x) = \varphi_{\tau(x)}(x) \in \Sigma$, gdzie $\tau(x) > 0$ jest czasem po którym trajektoria $\varphi_t(x)$ wraca do Σ .

Rozważmy orbitę $\{\varphi_t(\bar{x})\}_{t \in [0, T]}$. Niech n oznacza liczbę punktów, w których trajektoria ta przecina Σ . Trajektorja $\{\varphi_t(\bar{x})\}_{t \in [0, T]}$ jest okresowa wtedy i tylko wtedy, gdy $H^n(\bar{x}) = \bar{x}$. W celu udowodnienia istnienia orbity okresowej stosuje się przedziałową metodę Newtona do odwzorowania $\text{id} - H^n$ (wersja standardowa). Dla dłuższych orbit okresowych zwykle macierz jacobianowa $\mathbf{D}H^n(\bar{x})$ ma dużą średnicę i nie można sprawdzić założeń twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności zer [3]. W celu pokonania tych problemów używa się wersji globalnej (odwzorowania (3)).

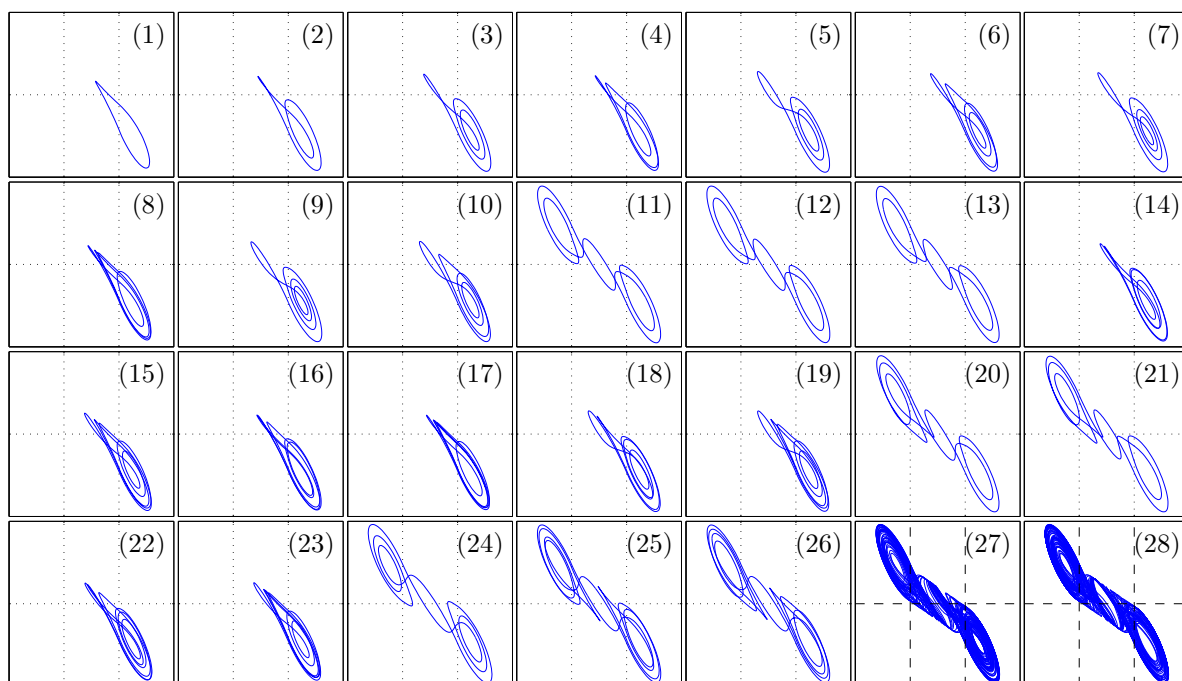
Obecnie podamy wyniki zastosowania techniki opisaną powyżej do dowodu istnienia wielu orbit okresowych dla obwodu Chuy. Najpierw została wygenerowana składająca się z 60000 punktów trajektorja odwzorowania Poincarégo. Poszukiwania

orbit okresowych zostały ograniczone do orbit o okresie mniejszym niż 150. Zostały znalezione orbity quasi-okresowe, powracające w otoczenie punktu początkowego na odległość poniżej 0.005 z czasem powrotu mniejszym niż 150. Dla większości orbit quasi-okresowych udowodniono istnienie prawdziwej orbity okresowej w ich bliskim otoczeniu.

Ogółem znaleziono 1354 różne orbity okresowe o okresie mniejszym niż 150, w tym osiem orbit symetrycznych względem początku układu. Położenie każdej z orbit okresowych na zbiorze Σ zostało obliczone z dokładnością większą niż 10^{-7} .

Niektóre ze znalezionych orbit okresowych zostały przedstawione na Rys. 3. Pokazane zostały wszystkie orbity okresowe o okresie mniejszym niż 44 i pięć znalezionych orbit symetrycznych. Ich parametry zostały zebrane w Tabeli 2. n jest okresem orbity w uogólnionym odwzorowaniu Poincarégo, litera "S" oznacza, że znaleziona orbita okresowa jest symetryczna. W ostatniej kolumnie podany jest przedział zawierający okres orbity.

Znaleziono również zostały orbity okresowe o



Rys. 3. Przykładowe orbity okresowe dla obwodu Chuy.

lp.	n	symetryczna	okres
1	2		7.38058439_7^9
2	4		14.38443804_1^{15}
3	4		21.330218_2^4
4	6		21.6768157_0^2
5	4		24.70392_7^9
6	6		28.6270866_2^6
7	4		28.68369_6^8
8	8		29.0841154_4^6
9	4		29.52941_2^4
10	6		31.062129_4^9
11	8	S	32.83175_0^2
12	8		32.99894_5^7
13	8	S	33.73813_1^3
14	8		35.72253_7^9
15	8		36.021545_1^3
16	10		36.0750610_2^4
17	10		36.4559967_7^9
18	8		38.731208_2^{93}
19	8		38.779715_3^{91}
20	10		41.00009_1^4
21	10		41.79856_5^7
22	10		42.9797918_5^9
23	10		43.3956623_2^6
24	8	S	43.9766674_4^{96}
25	16	S	60.168288_4^6
26	16	S	60.267690_0^2
27	160		790.0381_89^{97}
28	246		1076.9431_6^2

Tab. 2. Przykładowe orbity okresowe

dłuższych okresach. Dwie z nich zostały przedstawione na Rys. 3 (orbity (27), (28)). Najdłuższa znaleziona orbita okresowa ma okres $T \approx 1076.94$, który jest ponad 100 razy dłuższy niż okres najkrótszej znalezionej orbity (o okresie $T \approx 7.38$). Technika dowodu oparta na globalnej wersji operatora Newtona pozwala na udowodnienie istnienia również długich orbit okresowych.

PODZIĘKOWANIA

Praca sponsorowana przez Akademię Górniczo-Hutniczą, grant 11.11.120.182.

LITERATURA

- [1] G. Alefeld. Inclusion Methods for Systems of Nonlinear Equations – The Interval Newton Method and Modifications. In Jürgen Herzberger, editor, *Topics in Validated Computations*, pages 7–26. IMACS–GAMM, 1994.
- [2] G. Alefeld and J. Herzberger. *Introduction to interval computations*. Academic Press, New York, 1983.
- [3] Z. Galias. Investigations of periodic orbits in electronic circuits with interval Newton's method. In *Proc. IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems, ISCAS'98*, volume 3, pages 370–373, Monterey, 1998.
- [4] Z. Galias. Interval methods for rigorous investigations of periodic orbits. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, 11(9):2427–2450, 2001.
- [5] D.P. Lathrop and E.J. Kostelich. Characterisation of an experimental strange attractor by periodic orbits. *Phys. Rev. A*, 40(7):4028–4031, 1989.
- [6] G.N. Lin L.O. Chua. Canonical realisation of chua's circuit family. *IEEE Trans. Circ. Syst.*, CAS–37(7):885–902, 1990.
- [7] R.E. Moore. *Methods and applications of interval analysis*. SIAM, Philadelphia, 1979.
- [8] A. Neumaier. *Interval methods for systems of equations*. Cambridge University Press, 1990.