Katedra Elektrotechniki Akademia Górniczo–Hutnicza

METODY ARYTMETYKI PRZEDZIAŁOWEJ W BADANIACH UKŁADÓW NIELINIOWYCH

Zbigniew Galias

Kraków 2003

Department of Electrical Engineering AGH University of Science and Technology

INTERVAL ARITHMETIC FOR INVESTIGATIONS OF NONLINEAR SYSTEMS

Zbigniew Galias

Kraków, 2003

Uczelniane Wydawnictwa Naukowo–Dydaktyczne Akademii Górniczo–Hutniczej im. Stanisława Staszica w Krakowie

Redaktor Naczelny Uczelnianych Wydawnictw Naukowo–Dydaktycznych: Jan Sas

Z-ca Redaktora Naczelnego: Beata Barszczewska-Wojda

Komitet Naukowy UWND AGH: prof. dr hab. inż. Janusz Kowal (przewodniczący), prof. dr hab. inż. Tadeusz Banaszewski, prof. dr hab. Bogdan Choczewski, dr hab. Zdzisław Cięciwa, prof. AGH, prof. dr hab. inż. Edward Fraś, prof. dr hab. inż. Ryszard Uberman

Recenzent: Maciej Ogorzałek

Opracowanie edytorskie: Zespół redakcyjny UWND AGH

Druk wykonano ze składu dostarczonego przez Autora

©Wydawnictwa AGH, Kraków 2003 ISSN 0867–6631

Redakcja Uczelnianych Wydawnictw Naukowo–Dydaktycznych al. Mickiewicza 30, 30–059 Kraków tel. 617–32–28, tel./fax 636–40–38 e-mail: redakcja@wydawnictwoagh.pl www.WydawnictwoAGH.pl

Spis treści

	Streszczenie				
	Summary	10			
	Wykaz stosowanych oznaczeń	11			
	Wstęp	15			
1.	Układy nieliniowe	19			
	1.1. Układy dynamiczne	19			
	1.1.1. Ciągłe układy dynamiczne	19			
	1.1.2. Dyskretne układy dynamiczne	20			
	1.1.3. Podstawowe pojęcia	21			
	1.2. Wybrane metody analizy układów nieliniowych	23			
	1.2.1. Równanie wariacyjne	23			
	1.2.2. Odwzorowanie Poincarégo	24			
	1.2.3. Dynamika symboliczna	26			
	1.2.4. Entropia topologiczna	29			
	1.3. Układy chaotyczne	30			
	1.4. Przykładowe układy nieliniowe	31			
	1.4.1. Odwzorowanie logistyczne	31			
	1.4.2. Odwzorowanie Hénona	32			
	1.4.3. Odwzorowanie Ikedy	33			
	1.4.4. Obwód Chuy	34			
	1.4.5. Obwód Chuy z gładką nieliniowością	36			
	1.4.6. Układ Roesslera	38			
	1.4.7. Układ Lorenza	39			
	1.5. Analiza układów nieliniowych	39			
	1.6. Arytmetyka przedziałowa	40			
	1.6.1. Efekt pakowania	42			
	1.6.2. Oprogramowanie do obliczeń przedziałowych	43			
	1.6.3. Automatyczne różniczkowanie	43			
	1.6.4. Program komputerowy do ścisłej analizy układów	44			
2.	Wyznaczanie trajektorii	46			
	2.1. Metody obliczania $f^n(\mathbf{x}_0)$	47			
	2.1.1. Bezpośrednie zastosowanie arvtmetyki przedziałowej	 47			
	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	- •			

		2.1.2. Zastosowanie twierdzenia o wartości średniej	49	
		2.1.3. Zmiana reprezentacji zbioru \mathbf{x}_k	50	
		2.1.4. Metoda uogólnionej bisekcji	52	
	2.2.	Wyznaczanie trajektorii układu ciągłego	53	
		2.2.1. Oszacowanie zgrubne	55	
		2.2.2. Metoda Taylora	55	
		2.2.3. Normy logarytmiczne	56	
		2.2.4. Metoda Lohnera	57	
		2.2.5. Inne metody	59	
	2.3.	Całkowanie równania wariacyjnego	59	
		2.3.1. Oszacowanie zgrubne		
		2.3.2. Redukcja efektu pakowania	61	
	2.4.	2.4. Obliczanie pochodnych		
		2.4.1. Pochodne $\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d}t^k}$		
		2.4.2. Pochodne $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d} t^k} \right)$	64	
		2.4.3. Pochodne $\frac{\mathrm{d}^k D}{\mathrm{d}^k}$	65	
		2.4.4. Automatyczne różniczkowanie	66	
	2.5.	Obliczanie wartości odwzorowania powrotu	66	
	2.6.	Układy odcinkami liniowe	67	
		2.6.1. Obliczanie trajektorii	68	
	2.7.	Przykłady obliczania trajektorii układów dyskretnych	69	
		2.7.1. Odwzorowanie Hénona	69	
		2.7.2. Odwzorowanie Ikedy	71	
	2.8.	Przykłady obliczania trajektorii układów ciągłych	72	
		2.8.1. Zaburzony układ liniowy	73	
		2.8.2. Układ Lorenza	75	
		2.8.3. Układ elektroniczny z gładką nieliniowością	77	
	2.9.	Przykład obliczania trajektorii układu odcinkami liniowego	78	
3.	Ort	bity okresowe	82	
	3.1.	Metody przedziałowe dowodu istnienia orbit okresowych	86	
		3.1.1. Przedziałowy operator Newtona	86	
		3.1.2. Operator Krawczyka	88	
		3.1.3. Operator Hansena–Sengupty	88	
		3.1.4. Istnienie orbit okresowych	89	
		3.1.5. Wszystkie orbity okresowe o krótkim okresie	90	
		3.1.6. Długie orbity okresowe	93	
	3.2.	Basen przyciągania, część niezmiennicza i niewędrująca	97	
		3.2.1. Wyznaczanie basenu przyciągania	97	
		3.2.2. Wyznaczanie części niezmienniczej zbioru	99	
		3.2.3. Wyznaczanie części niewędrującej zbioru	101	
	3.3.	Odwzorowanie Hénona	102	
		3.3.1. Orbity okresowe o okresie $n \leq 30$	102	
		3.3.2. Część niezmiennicza i część niewędrująca	108	

	3.4.	Odwzorowanie Ikedy	.110	
		3.4.1. $\alpha = 3$, stabilny punkt stały	.110	
		3.4.2. $\alpha = 6$, zachowanie chaotyczne	.112	
		3.4.3. $\alpha = 7$, stabilna orbita o okresie 2	.118	
	3.5.	Odwzorowanie logistyczne	.121	
		3.5.1. Długie orbity okresowe	.122	
		3.5.2. Krótkie orbity okresowe	.124	
	3.6.	Układ Roesslera	.126	
		3.6.1. Orbita okresowa o okresie 1	.126	
		3.6.2. Orbita okresowa o okresie 2	.128	
		3.6.3. Inne orbity okresowe	.130	
	3.7. Obwód z gładką nieliniowością			
	3.8. Obwód Chuy		. 133	
		3.8.1. Analiza uogólnionego odwzorowania Poincarégo	. 133	
		3.8.2. Krótkie orbity okresowe	.135	
		3.8.3. Poszukiwanie orbit okresowych	.137	
4.	Dy	namika symboliczna, entropia topologiczna	.141	
	4.1.	Istnienie dynamiki symbolicznej	.142	
		4.1.1. Relacje nakrywające	.142	
		4.1.2. Znajdowanie zbiorów N_i	.144	
		4.1.3. Istnienie orbit homoklinicznych i heteroklinicznych	.144	
	4.2.	Entropia topologiczna	.146	
		4.2.1. Oszacowania na podstawie istnienia dynamiki symbolicznej	.146	
		4.2.2. Oszacowania na podstawie liczby orbit okresowych	.147	
	4.3. Odwzorowanie Hénona		.147	
	4.3.1. Dynamika symboliczna		.148	
		4.3.2. Oszacowanie entropii topologicznej na podstawie liczby orbit		
		okresowych	.154	
	4.4.	Odwzorowanie Ikedy	. 155	
		4.4.1. Dynamika symboliczna	. 155	
		4.4.2. Oszacowanie entropii topologicznej na podstawie liczby orbit		
		okresowych	. 159	
	4.5.	Obwód Chuy	. 160	
		4.5.1. Istnienie dynamiki symbolicznej	. 160	
		4.5.2. Oszacowanie entropii topologicznej odwzorowania Poincarégo	. 162	
	4.6.	Układ Lorenza	. 165	
		4.6.1. Istnienie dynamiki symbolicznej	. 165	
		4.6.2. Porównanie metod całkowania	. 167	
	Pod	sumowanie	.170	
	Lite	ratura	.171	

ZBIGNIEW GALIAS Metody arytmetyki przedziałowej w badaniach układów nieliniowych

Streszczenie

Głównym celem niniejszej pracy jest wykazanie, że za pomocą metod arytmetyki przedziałowej można rozwiązać wiele problemów związanych z analizą układów nieliniowych, dla których zastosowanie metod czysto analitycznych jest trudne lub niemożliwe.

W pierwszym rozdziale przedstawiono podstawowe definicje dotyczące układów nieliniowych, opisano szereg standardowych metod analizy oraz dokonano przeglądu układów dynamicznych rozważanych w niniejszej pracy.

W rozdziale drugim opisano metody wyznaczania trajektorii układów dyskretnych i ciągłych. Przedstawiono różne techniki obliczeń ograniczające wpływ "efektu pakowania". Opisano metodę całkowania równania wariacyjnego oraz procedurę obliczania odwzorowania Poincarégo. W końcowej części rozdziału porównano działanie metod obliczania trajektorii układów dyskretnych i ciągłych.

W rozdziale trzecim opisano metody arytmetyki przedziałowej dowodu istnienia orbit okresowych. Przedyskutowano działanie trzech operatorów przedziałowych w wersjach standardowej i globalnej. Przedstawiono algorytm znajdowania wszystkich orbit okresowych o ustalonym okresie. Opisano również metodę dowodu istnienia bardzo długich orbit okresowych dla odwzorowań jednowymiarowych. Dla ciągłych układów dynamicznych omówiono problemy związane ze znalezieniem wszystkich krótkich orbit okresowych. Podano także algorytmy znajdowania pokrycia kostkowego części niezmienniczej i niewędrującej danego zbioru. Dla odwzorowania Hénona i odwzorowania Ikedy wyznaczono wszystkie orbity okresowe o niskich okresach oraz znaleziono dokładne aproksymacje części niezmienniczej oraz niewędrującej zbioru zawierającego numerycznie obserwowany atraktor. Udowodniono istnienie szeregu orbit okresowych dla wybranych ciągłych układów dynamicznych.

Rozdział czwarty poświęcono metodom dowodu istnienia dynamiki symbolicznej oraz znajdowania ścisłego oszacowania entropii topologicznej układu. Opisano metody oparte na pojęciu relacji nakrywającej. Podano technikę wyboru zbiorów, na których jest zdefiniowana skomplikowana dynamika. Na przykładach odwzorowania Hénona oraz Ikedy pokazano jak można za pomocą tych metod znaleźć skomplikowaną dynamikę oraz uzyskać ścisłe oszacowania entropii topologicznej bliskie wartości rzeczywistej. Przedstawiono dowód istnienia dynamiki symbolicznej dla obwodu Chuy oraz równania Lorenza i na tych przykładach dokonano porównania metod wyznaczania trajektorii układów ciągłych.

ZBIGNIEW GALIAS Interval Arithmetic for Investigations of Nonlinear Systems

Summary

The main purpose of this work is to show that using interval methods it is possible to solve rigorously many problems which are very difficult to deal with using only analytical methods.

In the first chapter, basic definitions and several standard methods used in analysis of nonlinear systems are presented. We also introduce nonlinear systems considered in this work.

In the second chapter, we describe methods for finding trajectory of discrete and continuous dynamical systems. We present techniques reducing the influence of the "wrapping effect". We describe methods for integration of variational equation and computation of the Poincaré map. In the last part of this chapter, we compare the performance of methods for computation of trajectories of discrete and continuous systems.

In the third chapter we describe interval methods for proving the existence of periodic orbits. We study three interval operators in standard and global versions. We present the algorithm for finding all periodic orbits of a given length. We also describe the method for proving the existence of very long periodic orbits for one-dimensional maps. For continuous systems we discuss difficulties in finding all short cycles related to discontinuities of Poincaré map. We present the algorithms for finding box covering of invariant and nonwandering part of a given set. For the Hénon map and the Ikeda map, we find all low period cycles and obtain good approximations to invariant part and nonwandering part of the region containing the numerically observed attractor. We prove the existence of several periodic orbits for continuous dynamical systems.

The fourth chapter is devoted to methods for proving the existence of symbolic dynamics in nonlinear systems and finding rigorous approximations of its topological entropy. We describe methods based on the notion of a covering relation. We present the technique for choosing sets on which a complicated dynamics exists. Using these methods we prove the existence of symbolic dynamics for the Hénon map and the Ikeda map and find bounds for topological entropy close to the real entropy of the systems. We present the proof of existence of symbolic dynamics for the Chua's circuit and the Lorenz system. We also compare different methods for finding trajectories of continuous systems.

Wykaz stosowanych oznaczeń

\mathbb{R}	_	zbiór liczb rzeczywistych
\mathbb{Z}	_	zbiór liczb całkowitych
\mathbb{N}	_	zbiór liczb naturalnych
\mathbb{C}	_	zbiór liczb zespolonych
•	_	norma
$ \cdot _2$	_	norma euklidesowa
$\ \cdot\ _{\infty}$	_	norma maksimum, $ x _{\infty} = \max_{i=1}^{n} x_i$
$ \cdot _1$	_	norma $ x _1 = \sum_{i=1}^n x_i$
$\pi(x,t)$	_	układ dynamiczny
$\varphi(t,x)$	_	rozwiązanie problemu początkowego
$\gamma(x)$	_	trajektoria punktu \boldsymbol{x}
$\omega(x), \alpha(x)$	_	dodatni i ujemny zbiór graniczny punktu \boldsymbol{x}
P	_	odwzorowanie Poincarégo
\mathbf{Q}_n	_	liczba orbit okresowych o okresie \boldsymbol{n}
\mathbf{P}_n	_	liczba punktów stałych $n\!-\!\mathrm{krotnego}$ złożenia odw zorowania
$\mathrm{H}(f)$	_	entropia topologiczna odw zorowania \boldsymbol{f}
$\partial \Omega$	_	brzeg zbioru Ω
$\operatorname{Int} \Omega$	_	wnętrze zbioru Ω
$\operatorname{Inv} \Omega$	_	część niezmiennicza zbioru Ω
Ι	_	macierz jednostkowa
f'(x)	_	macierz Jacobiego odwzorowania f
$N(\mathbf{x})$	_	przedziałowy operator Newtona
$K(\mathbf{x})$	_	operator Krawczyka
$H(\mathbf{x})$	_	operator Hansena–Sengupty
$\mathbf{B}(x,r)$	_	kula o środku w punkcie x i promieniu r
\mathbf{x},\mathbf{y}	_	przedziały lub wektory przedziałowe
\mathbf{A},\mathbf{B}	—	macierze przedziałowe
$\operatorname{Diam}(\mathbf{x})$	_	szerokość przedziału ${\bf x}$
$\operatorname{Mid}(\mathbf{x})$	-	środek przedziału \mathbf{x}

Rodzicom

The scientist does not study nature because it is useful; he studies it because he delights in it, and he delights in it because it is beautiful. If nature were not beautiful, it would not be worth knowing, and if nature were not worth knowing, life would not be worth living.

Henri Poincaré

Wstęp

Teoria układów dynamicznych odgrywa istotną rolę w analizie zachowania układów rzeczywistych. Układy, których stan zmienia się w sposób ciągły, są często opisywane za pomocą układów równań różniczkowych (ciągłe układy dynamiczne), natomiast dynamika układów, których stan jest uaktualniany w dyskretnych chwilach jest opisywana za pomocą układów równań różnicowych lub odwzorowań (dyskretne układy dynamiczne). W niniejszej pracy będziemy rozważać układy deterministyczne, tzn. takie, dla których istnieje przepis na obliczanie przyszłych zachowań na podstawie zadanych warunków początkowych.

Zachowania deterministycznych układów nieliniowych są obszarem aktywnych badań. Pierwszym powodem zainteresowania jest wzgląd poznawczy. Wszystkie rzeczywiste układy są z natury rzeczy nieliniowe. Zawsze istnieje granica, powyżej której zwiększeniu sygnału wejściowego nie odpowiada liniowy wzrost sygnału wyjściowego. Często podczas analizy układów przyjmuje się ich liniowy model. Nie pozwala to jednak wyjaśnić wszystkich zjawisk zachodzących w tych układach. Jednym ze zjawisk możliwych do wyjaśnienia tylko przy uwzględnieniu efektów nieliniowych jest chaos. Interesujące jest zatem poznanie warunków generacji skomplikowanych oscylacji oraz skonstruowanie narzędzi do ich analizy.

Drugi powód zainteresowania ma podłoże praktyczne. Opisanych zostało wiele zastosowań układów nieliniowych, w tym układów chaotycznych. Zastosowania dotyczą problemów sterowania, synchronizacji, telekomunikacji [14, 20, 46, 104, 96, 117].

W przypadku gdy równania opisujące układ są nieliniowe (nieliniowy układ dynamiczny), najczęściej nie istnieje metoda umożliwiająca otrzymanie dokładnych rozwiązań, tzn. nie ma wzoru analitycznego opisującego trajektorię układu dla danych warunków początkowych. W takim przypadku w celu obliczania trajektorii stosuje się metody aproksymacji rozwiązania. W tych zastosowaniach komputer jest bardzo ważnym narzędziem umożliwiającym obliczenie przybliżonych rozwiązań układu [110, 101, 93, 94]. Wiele prac poświęconych jest konstrukcji efektywnych algorytmów pozwalających na szybkie i możliwie dokładne obliczenie trajektorii dla zadanych warunków początkowych. Wspólną własnością wielu z tych metod jest brak pewności, że rozwiązanie dokładne leży w pobliżu rozwiązania wygenerowanego przez metodę aproksymacji z zadaną z góry dokładnością [110, 50].

W przypadku niektórych układów fizycznych mała zmiana parametrów układu nie powoduje zasadniczej zmiany jego zachowania. Przykładowo niewielka zmiana wartości rezystancji jednego z elementów poprawnie zaprojektowanego układu elektronicznego zwykle nie powoduje dużej zmiany położenia jego punktu pracy. Podobnie niewielka zmiana warunków początkowych czy też sygnału wymuszającego nie powoduje znacznej zmiany trajektorii układu. Sytuacja ta dotyczy układów, dla których istnieje jedno stabilne rozwiązanie przyciągające wszystkie rozwiązania. Błędy popełniane przez metodę aproksymacji nie są wtedy szczególnie istotne i trajektoria wygenerowana przez komputer dobrze opisuje trajektorię rzeczywistą.

Większość układów nie spełnia jednak tych warunków. Jeśli rozważymy układ, w którym istnieją dwa lub więcej rozwiązania stabilne i będziemy badać trajektorie układu startujące z warunków początkowych położonych blisko granicy basenu przyciągania wybranego rozwiązania stabilnego, to stan ustalony będzie zależał w sposób istotny od małej zmiany warunków początkowych i/lub błędów popełnianych przez stosowaną przez nas metodę aproksymacji. Sytuacja, w której niewielka zmiana warunków początkowych powoduje duże zmiany trajektorii układu, jest nazywana *wrażliwością na warunki początkowe*. Istnieją również układy, w których wrażliwość na warunki początkowe jest własnością typową. Przykładem układów dynamicznych tego typu są *układy chaotyczne*. W ostatnich latach opisano wiele przykładów układów fizycznych w tym elektrycznych i elektronicznych, w których zaobserwowano skomplikowane zachowania dynamiczne zwane oscylacjami chaotycznymi [15, 95, 97, 106, 123].

Przez chaos będziemy rozumieć nieregularne zachowanie, które wydaje się przypadkowe. Przypadkowość ta jest wynikiem wrażliwości trajektorii na warunki początkowe polegająca na tym, że dwie trajektorie startujące z dowolnie bliskich punktów, zwykle oddalają się od siebie, pozostając równocześnie w ograniczonym obszarze przestrzeni stanu, i po pewnym czasie stają się nieskorelowane. W przypadku układów chaotycznych problemy, o których wspomnieliśmy powyżej, stają się szczególnie istotne. Z uwagi na wrażliwość na warunki początkowe obliczanie trajektorii jest trudne. W szczególności sprawdzenie, czy wygenerowane rozwiązania mają cokolwiek wspólnego z rzeczywistym modelem, staje się bardzo skomplikowane lub niemożliwe [50, 1].

Większość stwierdzeń o istnieniu chaosu jest oparta wyłącznie na obserwacjach wyników symulacji komputerowych lub przebiegów pochodzących z układów rzeczywistych. Jeśli obserwowany przebieg nie jest oscylacją okresową i charakteryzuje się dużą nieregularnością, to zwykle uznaje się, że jest to trajektoria chaotyczna. Nie ma jednak pewności, czy obserwowane trajektorie nie są przebiegami okresowymi o bardzo długich okresach lub też przebiegami przejściowymi z okresowym zbiorem granicznym. Nie wiadomo również, czy efekty chaotyczne obserwowane w symulacjach komputerowych nie są wynikiem błędów metod całkowania lub błędów zaokrągleń [1].

Kolejny problem dotyczy wpływu wartości parametrów na zmianę dynamiki układu. Najczęściej w przypadku układów rzeczywistych nie znamy wartości parametrów z nieskończoną precyzją, co więcej, parametry układu mogą wykazywać wahania związane np. ze zmianą temperatury, upływem czasu itp. W takich przypadkach istotne staje się badanie zachowania układu przy zmianie wartości parametrów. Jeśli mała zmiana parametrów powoduje zmiany jakościowe w zachowaniu układu, to mówimy, że nastąpiła *bifurkacja*.

Istnieje zatem potrzeba rozwoju metod uczynienia komputera narzędziem dającym ścisłe wyniki. Pierwszy krok w tym kierunku został wykonany w latach 60. XX w. wraz z pionierskimi pracami dotyczącymi arytmetyki przedziałowej [87]. W arytmetyce przedziałowej wszystkie operacje arytmetyczne są wykonywane na przedziałach. Wynik operacji na przedziałach jest najmniejszym przedziałem zawierającym wyniki operacji na liczbach rzeczywistych dla wszystkich kombinacji liczb rzeczywistych należących do tych przedziałów. W przypadku implementacji arytmetyki przedziałowej na komputerze zaokrąglanie wyniku operacji elementarnych odbywa się "na zewnątrz". W ten sposób jesteśmy pewni, że wynik zawiera rzeczywisty wynik operacji (wraz z błędami zaokrągleń).

Jest kilka powodów, dla których wykorzystanie metod arytmetyki przedziałowej do analizy układów dynamicznych wydaje się celowe. Pierwszy, najbardziej oczywisty, dotyczy przypadku, gdy parametry układu lub warunki początkowe, dla których poszukujemy rozwiązania, nie są znane z nieskończoną precyzją. Wtedy naturalne jest użycie przedziałów zamiast liczb rzeczywistych w procedurze numerycznej. Nawet jeśli założymy, że parametry i warunki początkowe są znane z nieskończoną dokładnością, to może się zdarzyć, że dana wartość nie jest liczbą reprezentowalną numerycznie. Aby to uwzglednić, należy znaleźć najmniejszy reprezentowalny numerycznie przedział, który zawiera daną wartość, i użyć tego przedziału jako warunku startowego dla programu komputerowego. Jeśli wystartujemy z przedziałów punktowych, to zwykle w trakcie obliczania trajektorii układu pojawiają się liczby niereprezentowalne numerycznie. Różnica między prawdziwym wynikiem a jego reprezentacją numeryczną propaguje się podczas dalszego obliczania trajektorii i może spowodować, że wyniki obliczeń po pewnym czasie nie będą miały nic wspólnego z rzeczywistą trajektorią. Aby tego uniknąć, prowadzi się wszystkie obliczenia w arytmetyce przedziałowej. W ten sposób uzyskujemy pewność, że rzeczywista trajektoria należy do wygenerowanego ciagu przedziałów.

Zastosowanie arytmetyki przedziałowej umożliwia konstruowanie ścisłych metod na podstawie metod numerycznych ze znanym wyrażeniem na błąd metody. Dotyczy to w szczególności rozwiązywania problemów początkowych dla układów równań różniczkowych. Jeśli mamy możliwość oszacowania błędów metody numerycznej, to możemy utworzyć przedział, który zawiera wynik wraz z błędem metody. Ten przedział staje się warunkiem początkowym dla następnego kroku procedury numerycznej.

Kolejny powód, który sprawia, że zastosowanie arytmetyki przedziałowej jest celowe, wynika z istnienia metod specyficznych dla analizy przedziałowej. Przedział jest z jednej strony traktowany jako liczba, z drugiej zaś jest zbiorem. Dwoistość pojęcia przedziału pozwala na konstrukcję metod, które sprawdzają prawdziwość obliczonych wyników. Metodom tego typu będzie poświęcona znaczna część niniejszej pracy.

Zastosowanie metod arytmetyki przedziałowej i ogólniej komputera do ścisłej analizy układów nieliniowych ma bogatą historię. Obszerną listę literatury na ten temat można znaleźć w pracy [91]. Wymieńmy kilka przykładów. W pracach [51, 105] opisano metodę dowodu istnienia prawdziwej trajektorii układu w pobliżu trajektorii wygenerowanej przez komputer. W pracach [109, 80] udowodniono istnienie orbit homoklinicznych i heteroklinicznych dla układu Lorenza oraz obwodu Chuy. W pracy [98] wykazano, że metody arytmetyki przedziałowej pozwalają, poza zapewnieniem ścisłych wyników, na znacznie szybsze niż przy użyciu standardowych metod znalezienie wszystkich punktów pracy układów elektronicznych. W pracach [90, 84, 85, 120] opisano różne metody dowodu istnienia dynamiki symbolicznej dla układów dynamicznych.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie wybranych metod analizy układów nieliniowych za pomocą arytmetyki przedziałowej. W rozdziale pierwszym podane zostaną podstawowe definicje i oznaczenia oraz przedstawione zostaną układy dynamiczne rozważane w niniejszej pracy. W rozdziale drugim opiszemy różne metody obliczania trajektorii układów dynamicznych. Dokonane zostanie również porównanie przedstawionych metod.

W rozdziale trzecim opiszemy metody analizy zbiorów granicznych. Szczególną uwagę poświęcimy orbitom okresowym. Przestawione zostaną metody dowodu istnienia orbit okresowych oraz znajdowania wszystkich orbit okresowych o ustalonym okresie. Opisane zostaną również metody znajdowania ścisłych oszacowań basenu przyciągania, części niezmienniczej oraz części niewędrującej. Wyniki opisane w tym rozdziale zostały opublikowane w kilku artykułach [34, 45, 33, 36, 37, 38, 40, 41, 42]. Część wyników nie była wcześniej publikowana.

W rozdziale czwartym przedstawione zostaną metody dowodu istnienia dynamiki symbolicznej oraz podany zostanie dowód istnienia dynamiki symbolicznej dla wybranych układów dynamicznych. Opiszemy związek dynamiki symbolicznej z entropią topologiczną oraz podamy dla wybranych układów ścisłe oszacowania na entropię topologiczna. Przedstawiona zostanie również dyskusja na temat związku entropii topologicznej z liczbą orbit okresowych. Wyniki zawarte w tym rozdziale były opublikowane w pracach [31, 44, 45, 41, 39].

Kilka osób w sposób szczególny przyczyniło się do napisania tej pracy. Przede wszystkim chciałbym wyrazić podziękowanie prof. dr. hab. inż. Maciejowi Ogorzałkowi za inicjatywę podjęcia tematyki układów chaotycznych. Prof. Maciej Ogorzałek był opiekunem mojej pracy magisterskiej i promotorem mojej pracy doktorskiej.

Chciałbym również podziękować dr. hab. Piotrowi Zgliczyńskiemu za wiele cennych uwag merytorycznych oraz za współpracę naukową, której owocem jest wiele publikacji w dziedzinie komputerowo wspieranych dowodów i zastosowania metod topologicznych do analizy układów nieliniowych.

Część wyników zawartych w tej pracy powstała podczas pobytu w Institute for Nonlinear Science w San Diego, w ramach stypendium Fulbrighta oraz dzięki zaproszeniu prof. Henry'ego Abarbanela, który stworzył mi idealne warunki do rozważań nad zagadnieniami poruszanymi w tej pracy. W trakcie pobytu w San Diego miałem przyjemność współpracować z dr. Gian Mario Maggio, co zaowocowało publikacjami z dziedziny zastosowań układów chaotycznych do celów przesyłania informacji i pozwoliło autorowi spojrzeć pod innym kątem na problemy związane z układami nieliniowymi. Uwagi i sugestie dr. Maggio były dla mnie niezwykle istotne.

Należy również wymienić osoby, które w sposób mniej lub bardziej świadomy przyczyniły się do opóźnienia ukazania się tej pracy, dając mi tym samym możność do przeprowadzenia bardziej dogłębnej analizy rozważanych tematów. Spośród tych osób chciałbym podziękować Krzysztofowi i Barbarze, których szczere zainteresowanie postępami w pracy wielokrotnie podtrzymywało mnie na duchu.

1. Układy nieliniowe

W rozdziale tym przypomniane zostaną podstawowe pojęcia i definicje przydatne przy opisie matematycznym układów nieliniowych [10, 53].

1.1. Układy dynamiczne

Deterministyczny układ dynamiczny jest to układ, którego stan można w pełni określić przez podanie warunków początkowych oraz równań ewolucji. Poniżej przedstawiona jest formalna definicja układu dynamicznego.

Definicja 1.1. Trójkę (X, T, π) , w której X jest przestrzenią metryczną, T jest grupą, zaś $\pi: X \times T \mapsto X$ jest odwzorowaniem ciągłym spełniającym dla każdego $x \in X$ i dla każdych $t_1, t_2 \in T$ warunki

$$\pi(x,0) = x,\tag{1.1a}$$

$$\pi(\pi(x, t_1), t_2) = \pi(x, t_1 + t_2), \tag{1.1b}$$

nazywamy układem dynamicznym.

Przestrzeń X nazywana jest przestrzenią fazową, zaś π odwzorowaniem fazowym. W praktyce najczęściej rozważa się przypadki, gdy T jest zbiorem liczb całkowitych $T = \mathbb{Z}$ (dyskretny układ dynamiczny) lub rzeczywistych $T = \mathbb{R}$ (ciągły układ dynamiczny). Dyskretny układ dynamiczny jest również niekiedy nazywany kaskadą, zaś ciągły potokiem.

Często rozważa się również układy semidynamiczne, w których zbiór T posiada strukturę półgrupy. Dla $T = \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ oraz $T = \mathbb{N} = \{0, 1, 2...\}$ mamy odpowiednio ciągły i dyskretny układ semidynamiczny.

1.1.1. Ciągłe układy dynamiczne

Ważną klasą układów dynamicznych są układy generowane przez równania różniczkowe zwyczajne

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(x(t), t),\tag{1.2a}$$

$$x(t_0) = x_0, \tag{1.2b}$$

gdzie $x \in \mathbb{R}^m$ oraz $f \colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^m$. Rozwiązanie problemu początkowego (1.2) będziemy oznaczać przez $\varphi(t, x_0)$ lub x(t).

Jeśli prawa strona układu (1.2a) nie zależy od zmiennej t w sposób jawny, to układ równań różniczkowych nazywamy *autonomicznym*. W przypadku równań autonomicznych możemy bez straty ogólności założyć, że $t_0 = 0$. Otrzymujemy wówczas następujący problem początkowy

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f(x(t)),\tag{1.3a}$$

$$x(0) = x_0.$$
 (1.3b)

Funkcja f jest nazywana *polem wektorowym* ponieważ definiuje ona kierunek (wektor) i prędkość trajektorii w każdym punkcie przestrzeni stanów. Poniższe twierdzenie mówi, kiedy autonomiczny układ równań różniczkowych zwyczajnych definiuje układ dynamiczny.

Twierdzenie 1.1. Rozważmy układ równań różniczkowych zwyczajnych

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x),\tag{1.4}$$

gdzie odwzorowanie $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ jest ciągłe. Załóżmy, że dla każdego $x \in \mathbb{R}^m$ istnieje dokładnie jedno rozwiązanie $\varphi(t, x)$ równania (1.4) zdefiniowane na \mathbb{R} , spełniające warunek $\varphi(0, x) = x$. Wówczas odwzorowanie $\pi(x, t) = \varphi(t, x)$ definiuje ciągły układ dynamiczny na \mathbb{R}^m .

Jeśli odwzorowanie $\varphi(t, x)$ jest zdefiniowane na \mathbb{R}^+ , to π jest układem semidynamicznym. Poniższe twierdzenie mówi, że układy równań spełniające warunek Lipschitza generują ciągłe układy dynamiczne.

Twierdzenie 1.2. Jeśli f spełnia globalnie warunek Lipschitza, tzn. istnieje liczba rzeczywista L taka że

$$||f(x) - f(y)|| \le L||x - y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m,$$

$$(1.5)$$

to spełniony jest warunek na jednoznaczność rozwiązań wymagany w poprzednim twierdzeniu.

1.1.2. Dyskretne układy dynamiczne

Dyskretne układy dynamiczne pojawiają się w naturalny sposób przy badaniach tzw. przekształcenia Poincarégo. Występują one również przy iteracjach odwzorowań bijektywnych. Mówi o tym następujące twierdzenie:

Twierdzenie 1.3. Jeśli $f: X \to X$ jest ciąglą bijekcją i zdefiniujemy $\varphi(x,k) = f^k(x)$, to (X, \mathbb{Z}, φ) jest dyskretnym układem dynamicznym¹.

W przypadku gdy odw
zorowanie fnie jest bijekcją, to (X,φ) jest układem semidynamic
znym.

¹Z definicji $f^{0}(x) = x, f^{k+1}(x) = f(f^{k}(x)), f^{-k}(x) = (f^{-1})^{k}(x) \text{ dla } k > 0.$

1.1.3. Podstawowe pojęcia

Przedstawimy obecnie definicje kilku pojęć, z których będziemy korzystać w niniejszej pracy. Niech (X, T, π) będzie układem (semi)dynamicznym.

Typy trajektorii

Zbiór $\gamma(x) = \{\pi(x,t) : t \in T\}$ nazywamy *trajektorią* lub *orbitą* punktu x. Zbiory $\gamma^+(x) = \{\pi(x,t) : t \ge 0, t \in T\}, \gamma^-(x) = \{\pi(x,t) : t \le 0, t \in T\}$ nazywamy odpowiednio *dodatnią* i *ujemną trajektorią* punktu x. Odwzorowanie $\pi_x : T \to X$ zdefiniowane przez $\pi_x(t) = \pi(x,t)$ nazywamy *ruchem* (przechodzącym przez x).

Wśród różnych typów trajektorii układu szczególne znaczenie odgrywają punkty stałe i trajektorie okresowe.

Punkt $x \in X$ nazywamy punktem stałym lub punktem równowagi, jeśli dla każdego $t \in T$ zachodzi $\pi(x,t) = x$. Punkt $x \in X$ nazywamy okresowym, jeśli istnieje t > 0 takie, że $\pi(x,t) = x$ oraz $\tau = \inf\{t > 0 : \pi(x,t) = x\} > 0$. Liczbę τ nazywamy okresem punktu x. Jeśli punkt x jest okresowy, to trajektorię $\gamma(x)$ nazywamy okresową.

Ruch π_x nazywamy prawie okresowym, jeśli dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje relatywnie gęsty² zbiór liczb $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ taki, że $\rho(\pi(x,t),\pi(x,t+\tau_n)) < \varepsilon$ dla każdego $t \in T$ oraz dla każdej liczby całkowitej n. Jeśli π_x jest ruchem prawie okresowym, to trajektorię punktu x nazywamy prawie okresową.

Punkty stałe, orbity okresowe i trajektorie prawie okresowe są przykładami zachowań ustalonych. Bardziej skomplikowanym typem zachowań ustalonych są tak zwane trajektorie chaotyczne, które w najprostszym rozumieniu są ograniczonym zachowaniem układu, które nie jest okresowe ani prawie okresowe oraz nie zmierza do żadnego z tych zachowań. Formalna definicja zostanie podana w podrozdziale 1.3.

Zbiory graniczne

Kolejnym ważnym pojęciem są zbiory graniczne. Określają one zachowanie układu po zaniku składowych przejściowych, czyli tak zwany stan ustalony układu.

Dodatnimzbiorem granicznym lub zbiorem $\omega\text{-}granicznym$ punktu x nazywamy zbiór

$$\omega(x) = \{ y \in X \colon \exists t_n \to +\infty \text{ taki, } \dot{z} \in \pi(x, t_n) \to y \}.$$
(1.6)

Ujemnym zbiorem granicznym lub zbiorem α -granicznym punktu x nazywamy zbiór

$$\alpha(x) = \{ y \in X \colon \exists t_n \to -\infty \text{ taki, } \dot{z} \in \pi(x, t_n) \to y \}.$$
(1.7)

Punkty stałe, orbity okresowe i prawie okresowe są przykładami zbiorów granicznych.

Zbiór niezmienniczy, atraktor

Zbiór $A \subset X$ nazywamy *niezmienniczym*, jeśli dla każdego $x \in A$ trajektoria punktu x jest zawarta w A. W przypadku układu semidynamicznego zbiór A nazywamy niezmienniczym, jeśli dla każdego $x \in A$ istnieje trajektoria układu przechodząca przez x zawarta w zbiorze A.

²Zbiór D liczb rzeczywistych nazywamy relatywnie gęstym, jeśli istnieje $t_0 > 0$ takie, że dla każdego $t \in \mathbb{R}$ zbiór $D \cap (t - t_0, t + t_0)$ jest niepusty.

Mówimy, że zbiór A jest zbiorem pułapką, jeśli jest on dodatnio niezmienniczy, tzn. $\pi(x,t) \in A$ dla każdego $x \in A$ i t > 0.

Trajektoria startująca w zbiorze pułapce pozostaje w nim na zawsze. Aby stwierdzić, że A jest zbiorem pułapką dla dyskretnego układu (semi)dynamicznego zadanego odwzorowaniem f, wystarczy sprawdzić, że $f(A) \subset A$. W przypadku układu ciągłego warunkiem wystarczającym jest, aby pole wektorowe na brzegu zbioru A było skierowane do wnętrza A.

Zbiór niezmienniczy nazywamy *hiperbolicznym*, jeśli w każdym jego punkcie istnieje rozkład na kierunki stabilny i niestabilny i rozkład ten jest ciągły.

Zbiór $A \subset X$ nazywamy *niedekomponowalnym*, jeśli jest on domknięty i niezmienniczy oraz jeśli dla dowolnych $x, y \in A$ i dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją $x = x_0$, $x_1, \ldots, x_n = y$ oraz $t_1, \ldots, t_n \ge 1$ takie, że odległość $\pi(x_{i-1}, t_i)$ od x_i jest mniejsza od ε .

Punkt $x \in X$ nazywamy niewędrującym, jeśli dla każdego otoczenia U punktu x i dla każdego $t \in T$ istnieje s > t takie, że $\pi(U, s) \cap U \neq \emptyset$.

Basenem przyciągania zbioru dodatnio niezmienniczego A nazywamy zbiór

$$B(A) = \{ x \in X : \omega(x) \neq \emptyset, \ \omega(x) \subset A \}.$$
(1.8)

Zbiór A nazywamy stabilnym, jeśli każde otoczenie U zbioru A zawiera dodatnio niezmiennicze otoczenie V zbioru A. Zbiór A nazywamy asymptotycznie stabilnym, jeśli jest stabilny i jeśli B(A) jest otoczeniem zbioru A. Zbiór A nazywamy niestabilnym, jeśli nie jest stabilny.

Atraktor jest to niedekomponowalny zbiór A posiadający otoczenie U takie, że dla każdego $x \in U$ dodatni zbiór graniczny $\omega(x)$ jest zawarty w zbiorze A oraz dodatnia semitrajektoria $\gamma^+(x)$ jest zawarta w zbiorze U.

Punkty homokliniczne i heterokliniczne

Przypomnijmy definicję punktu homoklinicznego [53, 112]. Załóżmy, że x^* jest hiperbolicznym punktem stałym. Hiperboliczność oznacza w przypadku ciągłego układu dynamicznego, że macierz Jacobiego $f'(x^*)$ nie ma wartości własnych o części rzeczywistej równej zero, zaś dla układów dyskretnych wartości własne nie leżą na okręgu jednostkowym. Oznaczmy przez E_s oraz E_u stabilną i niestabilną podprzestrzeń w punkcie x^* .

Lokalną stabilną i niestabilną podrozmaitością punktu x^* nazywamy zbiory

$$W^s_{\rm loc}(x^*) = \{ x \in U \colon \pi(x,t) \to x^* \text{ dla } t \to \infty, \gamma^+(x) \subset U \},$$
$$W^u_{\rm loc}(x^*) = \{ x \in U \colon \pi(x,t) \to x^* \text{ dla } t \to -\infty, \gamma^-(x) \subset U \},$$

gdzie U jest otwartym otoczeniem punktu x^* .

Globalną stabilną i niestabilną podrozmaitością punktu x^* nazywamy zbiory

$$W^{s}(x^{\star}) = \bigcup_{t \leq 0} \pi(W^{s}_{\text{loc}}(x^{\star}), t),$$
$$W^{u}(x^{\star}) = \bigcup_{t \geq 0} \pi(W^{u}_{\text{loc}}(x^{\star}), t).$$

Stabilne podrozmaitości dwóch różnych punktów stałych nie mogą się przecinać. To samo dotyczy podrozmaitości niestabilnych. Zbiory $W^s(x^*)$ oraz $W^u(x^*)$ nie mogą mieć samoprzecięć. Może natomiast mieć miejsce przecięcie podrozmaitości stabilnej jednego punktu stałego z podrozmaitością niestabilną tego samego (lub innego) punktu stałego. Taka sytuacja jest często źródłem skomplikowanej dynamiki.

Definicja 1.2. Punkt *x* nazywamy *punktem homoklinicznym*, jeśli leży on na przecięciu stabilnej i niestabilnej podrozmaitości pewnego punktu stałego, tzn.

$$x \in W^u(x^\star) \cap W^s(x^\star) \tag{1.9}$$

dla punktu stałego x^* przy czym $x \neq x^*$. Punkt homokliniczny nazywamy transwersalnym, jeśli $W^u(x^*)$ i $W^s(x^*)$ przecinają się transwersalnie w punkcie x, tzn. przestrzenie styczne do $W^u(x^*)$ i $W^s(x^*)$ w punkcie x rozpinają całą przestrzeń.

Punkt leżący na przecięciu podrozmaitości stabilnej oraz podrozmaitości niestabilnej różnych punktów stałych nazywamy *heteroklinicznym*.

1.2. Wybrane metody analizy układów nieliniowych

Omówimy obecnie kilka metod analizy układów nieliniowych, które będą wykorzystywane w niniejszej pracy.

1.2.1. Równanie wariacyjne

Równanie wariacyjne pojawia się dość często przy analizie ciągłych układów dynamicznych. Pozwala ono na badanie zmian trajektorii układu spowodowane zaburzeniem warunków początkowych [101]. Oznaczmy przez $\varphi(t, x_0)$ rozwiązanie problemu początkowego (1.3). Funkcja $\varphi(\cdot, x_0)$ spełnia warunki

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t,x_0) = f(\varphi(t,x_0)), \qquad (1.10a)$$

$$\varphi(0, x_0) = x_0.$$
 (1.10b)

Różniczkując powyższe równania względem x_0 otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}(t, x_0) = \frac{\partial}{\partial x_0} (f(\varphi(t, x_0)))$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t, x_0)$$

oraz

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(0, x_0) = \frac{\partial x_0}{\partial x_0} = I$$

Wprowadzając oznaczenie $D(t,x_0)=\frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(t,x_0)$ otrzymujemy układ równań

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t))D,\tag{1.11a}$$

$$D(0, x_0) = I. (1.11b)$$

Równanie (1.11a) jest nazywane równaniem wariacyjnym. Zauważmy, że jest to równanie liniowe o współczynnikach zależnych od czasu. W celu rozwiązania problemu początkowego (1.11) całkujemy równocześnie równania

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x),\tag{1.12a}$$

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t)) \cdot D, \qquad (1.12\mathrm{b})$$

z warunkiem początkowym

$$x(0) = x_0,$$
 (1.12c)

$$D(0, x_0) = I. (1.12d)$$

1.2.2. Odwzorowanie Poincarégo

Metoda odwzorowania Poincarégo jest często używana podczas analizy ciągłych układów dynamicznych [53]. Pozwala ona na uproszczenie analizy układu z uwagi na obniżenie wymiaru przestrzeni stanu. W metodzie tej rozważa się odwzorowanie powrotu dla wybranej hiperpłaszczyzny Σ przecinającej transwersalnie trajektorie układu.

Niech $\varphi(t, x_0)$ będzie rozwiązaniem problemu początkowego (1.3). Wybierzmy hiperpłaszczyznę Σ .

Definicja 1.3. Odwzorowanie Poincarégo $P: \Sigma \longrightarrow \Sigma$ jest zdefiniowane przez

$$P(x) = P_{\Sigma}(x) = \varphi(\tau(x), x), \qquad (1.13)$$

gdzie $\tau(x)$ jest czasem, po którym trajektoria $\varphi(t, x)$ wraca do Σ .

Na określenie odwzorowania Poincarégo będziemy zamiennie używać nazwy odwzorowanie powrotu.

Istnienie ciągłego odwzorowania Poincarégo w otoczeniu punktu \bar{x} takiego, że płaszczyzna Σ jest transwersalna do potoku w punktach \bar{x} oraz $P(\bar{x})$, wynika z następującego twierdzenia [101, str. 316]:

Twierdzenie 1.4. Niech $T = \tau(\bar{x})$ będzie czasem powrotu do Σ trajektorii startującej z punktu \bar{x} . Jeśli płaszczyzna Σ jest transwersalna do potoku w punktach \bar{x} oraz $P(\bar{x}) = \varphi(T, \bar{x})$, to istnieje otwarte otoczenie U punktu \bar{x} i dokładnie jedno odwzorowanie $\tau: U \longrightarrow \mathbb{R}$ klasy C^1 takie, że dla każdego $x \in U$ zachodzi $\varphi(\tau(x), x) \in \Sigma$ oraz $\tau(\bar{x}) = T$. Przy definicji odwzorowania Poincarégo można ograniczyć się do fragmentu płaszczyzny Σ lub innej hiperpowierzchni. Często wybiera się część płaszczyzny Σ , na której trajektorie przecinają płaszczyznę Σ w ustalonym kierunku. Przy takiej definicji punkt stały odwzorowania P odpowiada orbicie okresowej układu ciągłego. Okazuje się, że wartości własne macierzy Jacobiego odwzorowania Poincarégo w punkcie należącym do orbity okresowej nie zależą od wyboru punktu na orbicie okresowej oraz nie zależą od wyboru płaszczyzny transwersalnej [101, str. 318]. Można zatem za pomocą metody odwzorowania Poincarégo badać stabilność orbit okresowych układu ciągłego.

Uogólnione odwzorowanie Poincarégo

Standardowe odwzorowanie Poincarégo jest zdefiniowane przez jedną hiperpłaszczyznę. Uogólnione odwzorowanie Poincarégo jest zdefiniowane przez pewną liczbę takich hiperpłaszyzn. Niech $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \cdots \cup \Sigma_p$. Uogólnione odwzorowanie Poincarégo $P: \Sigma \mapsto \Sigma$ jest zdefiniowane jako

$$P(x) = \varphi(\tau(x), x), \tag{1.14}$$

gdzie $\varphi(t, x)$ jest trajektorią układu startującą z x, zaś $\tau(x)$ jest czasem, po którym trajektoria $\varphi(t, x)$ powraca do zbioru Σ .

Odwzorowanie takie pojawia się przy analizie układów odcinkami liniowych. Większą liczbę hiperpłaszczyzn stosuje się również w przypadku układów gładkich w celu ograniczenia czasu powrotu do zbioru Σ i uzyskania lepszej kontroli nad błędami metody całkowania numerycznego.

Odwzorowanie $P_{\Sigma_1 \Sigma_2}$

Podczas analizy układów ciągłych będziemy również zainteresowani odwzorowaniem, które punktom z jednej płaszczyzny transwersalnej przyporządkowuje punkty z innej płaszczyzny. Pojawia się ono w sposób naturalny przy badaniu uogólnionego odwzorowania Poincarégo. Wybierzmy hiperpłaszczyzny Σ_1 i Σ_2 .

Odwzorowanie $P_{\Sigma_1 \Sigma_2} \colon \Sigma_1 \longrightarrow \Sigma_2$ jest zdefiniowane przez

$$P_{\Sigma_1 \Sigma_2}(x) = \varphi(\tau(x), x), \tag{1.15}$$

gdzie $\tau(x)$ jest czasem, po którym trajektoria $\varphi(t, x)$ osiąga Σ_2 .

W przypadku gdy hiperpłaszczyzny Σ_1 i Σ_2 są transwersalne do potoku odpowiednio w punktach $\bar{x} \in \Sigma_1$ oraz $\bar{y} = P_{\Sigma_1 \Sigma_2}(\bar{x}) \in \Sigma_2$, to odwzorowanie $P_{\Sigma_1 \Sigma_2}$ jest ciągłe w pewnym otoczeniu punktu \bar{x} .

Wyprowadzimy wzór na pochodną odwzorowania $P_{\Sigma_1 \Sigma_2}$ (porównaj [101]). Niech *h* będzie wektorem prostopadłym do płaszczyzny Σ_2 .

Twierdzenie 1.5. Niech $\bar{x} \in \Sigma_1$, $\bar{y} = P_{\Sigma_1 \Sigma_2}(\bar{x}) = \varphi(T, \bar{x}) \in \Sigma_2$ oraz h będzie wektorem prostopadłym do płaszczyzny Σ_2 , tzn. $\Sigma_2 = \{x : h^T x = h^T \bar{y}\}$. Załóżmy, że pole wektorowe jest transwersalne do płaszczyzn Σ_1 i Σ_2 odpowiednio w punktach \bar{x} i \bar{y} . Wówczas macierz Jacobiego odwzorowania $P_{\Sigma_1 \Sigma_2}$ w punkcie \bar{x} wyraża się wzorem

$$\frac{\partial P_{\Sigma_1 \Sigma_2}}{\partial x}(\bar{x}) = \left(I - \frac{f(\bar{y})h^T}{h^T f(\bar{y})}\right) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, \bar{x}).$$
(1.16)

Dowód. Oznaczmy $g(t, x) = h^T \varphi(t, x) - h^T \bar{y}.$

$$g(T,\bar{x}) = h^T \varphi(T,\bar{x}) - h^T \bar{y} = h^T \bar{y} - h^T \bar{y} = 0, \qquad (1.17)$$

$$\frac{\partial g}{\partial t}(T,\bar{x}) = h^T \frac{\partial}{\partial t} \varphi(T,\bar{x}) = h^T \frac{\partial}{\partial t} \varphi(0,\bar{y}) = h^T f(\bar{y}) \neq 0.$$
(1.18)

Zatem na podstawie twierdzenia o funkcjach uwikłanych istnieje otoczenie U punktu \bar{x} oraz funkcja $\tau: U \ni x \longrightarrow \tau(x) \in \mathbb{R}$ taka, że $g(\tau(x), x) = 0$ dla każdego $x \in U$ oraz $\tau(\bar{x}) = T$. Zachodzi warunek

$$\frac{\partial g}{\partial x}(\tau(\bar{x}), \bar{x}) + \frac{\partial g}{\partial t}(\tau(\bar{x}), \bar{x}) \cdot \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}(\bar{x}) = 0.$$
(1.19)

Zatem

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}(\bar{x}) = \frac{-1}{h^T f(\bar{y})} \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(\tau(\bar{x}), \bar{x}) = \frac{-1}{h^T f(\bar{y})} \cdot h^T \cdot \frac{\partial}{\partial x}\varphi(T, \bar{x}).$$
(1.20)

Obliczmy pochodną odwzorowania $P_{\Sigma_1 \Sigma_2}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{\Sigma_1 \Sigma_2}}{\partial x}(\bar{x}) &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\tau(\bar{x}), \bar{x}) + \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\tau(\bar{x}), \bar{x}) \cdot \frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}x}(\bar{x}) = \\ &= \frac{\partial \varphi}{\partial x}(\tau(\bar{x}), \bar{x}) + f(\bar{y})\frac{-1}{h^T f(\bar{y})}h^T\frac{\partial \varphi}{\partial x}(\tau(\bar{x}), \bar{x}) = \\ &= \left(I - \frac{f(\bar{y})h^T}{h^T f(\bar{y})}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, \bar{x}).\end{aligned}$$

Powyżej odwzorowanie $P_{\Sigma_1\Sigma_2}$ traktujemy jako odwzorowanie z \mathbb{R}^n do \mathbb{R}^n . Ponieważ odwzorowanie $P_{\Sigma_1\Sigma_2}$ prowadzi z hiperpłaszczyzny Σ_1 do hiperpłaszczyzny Σ_2 , to po wprowadzeniu lokalnego układu współrzędnych na Σ_1 i Σ_2 można odwzorowanie $P_{\Sigma_1\Sigma_2}$ rozważać jako odwzorowanie z \mathbb{R}^{n-1} do \mathbb{R}^{n-1} . Przykładowo, jeśli $\Sigma_1 = \{x : x_j = \text{const}\}$ zaś $\Sigma_2 = \{x : x_i = \text{const}\}$, to w celu otrzymania macierzy Jacobiego odwzorowania $P_{\Sigma_1\Sigma_2}$ należy usunąć *i*-ty wiersz i *j*-tą kolumnę z macierzy (1.16).

Zauważmy, że aby obliczyć pochodną odw
zorowania $P_{\Sigma_1 \Sigma_2}$, należy całkować równanie wariacyjne w celu znale
zienia $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(T, \bar{x})$.

1.2.3. Dynamika symboliczna

Jedną z często stosowanych metod charakteryzacji trajektorii układu jest dynamika symboliczna [103]. Trajektoriom przypisuje się sekwencje symboli zgodnie z kolejnością odwiedzania rozłącznych zbiorów $N_1, N_2 \dots, N_p$, przy czym zbiorowi N_k odpowiada symbol k.

Definiujemy zbiór wszystkich obustronnie nieskończonych ciągów symboli

$$\Sigma_p = \{ s = (\dots, s_{-1}, s_0, s_1, s_2 \dots) \colon s_k \in \{1, 2, \dots, p\} \}.$$
(1.21)

Trajektorii $(\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$ przypisujemy ciąg symboli $s \in \Sigma_p$ w ten sposób, że $x_k \in N_{s_k}$.

Na przestrzeni ciągów Σ_p zdefiniowana jest operacja przesunięcia $\sigma \colon \Sigma_p \mapsto \Sigma_p$, określona wzorem $(\sigma(s))_i = s_{i+1}$.

Niech $A=(a_{ij})_{i,j=1}^n$ będzie macierzą kwadratową wymiaru $p\times p$ o elementach 0 lub 1. Wprowadzamy oznaczenie

$$\Sigma_A = \{ s \in \Sigma_n \colon a_{s_k s_{k+1}} = 1 \text{ dla każdego } k \}.$$
(1.22)

Odwzorowanie $\sigma_A = \sigma | \Sigma_A$ jest nazywane podprzesunięciem (ang. subshift) skończonego typu dla macierzy A. Macierz A jest nazywana macierzą przejścia dla podprzesunięcia σ_A . Określa ona, w jakiej kolejności mogą następować po sobie symbole. Jeśli $a_{ij} = 0$, to po symbolu *i* nie może nastąpić symbol *j*, czyli podciąg (i, j) jest zabroniony.

Mówimy, że dla odwzorowania $f: X \mapsto X$ istnieje dynamika symboliczna o macierzy przejścia A, jeśli istnieje homeomorfizm $h: X \mapsto \Sigma_A$ taki, że $h \circ f = \sigma_A \circ h$. Istnienie homeomorfizmu h oznacza, że trajektorii można w sposób wzajemnie jednoznaczny przyporządkować ciąg symboli należący do Σ_A . Dopuszczamy również sytuację, gdy odwzorowanie h nie jest różnowartościowe lub gdy dziedziną h nie jest całe X. Mogą wówczas istnieć dwie trajektorie, które realizują ten sam ciąg symboli lub pewne trajektorie mogą nie być reprezentowane w sposób symboliczny. W takim przypadku dynamika układu jest co najmniej tak skomplikowana jak dynamika odwzorowania σ_A .



Rys. 1.1. Odwzorowanie Bernoulliego

Najprostszy przykład dynamiki symbolicznej obserwujemy dla odwzorowania Bernoulliego (rys. 1.1) danego wzorem

$$f(x) = 2x \mod 1,\tag{1.23}$$

gdzie $x \in I = [0, 1]$. Punktowi x można przypisać reprezentację binarną

$$x = 0.b_1 b_2 b_3 \dots \equiv \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-j} b_j,$$
 (1.24)

gdzie b_j jest równe 0 lub 1. Działanie odwzorowania Bernoulliego w tej reprezentacji polega na przesunięciu kropki o jedno miejsce w prawo i pominięciu cyfry jedności.

Przypisujemy symbol 0 przedziałowi $I_0 = [0, 0.5)$ oraz symbol 1 przedziałowi $I_1 = [0.5, 1]$. Na podstawie trajektorii (x_k) tworzymy ciąg symboli: $s_k = 0$, jeśli $x_k \in I_0$ oraz $s_k = 1$, jeśli $x_k \in I_1$. Jest oczywiste, że otrzymany w ten sposób ciąg symboli dla trajektorii startującej z punktu x pokrywa się z reprezentacją binarną punktu x.

W reprezentacji binarnej każdy układ cyfr 0, 1 jest dozwolony. Nie ma zatem przejść zabronionych między symbolami i macierz przejścia ma postać $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Wynika stąd, że istnieje pełna dynamika symboliczna na dwóch symbolach dla odworowania Bernoulliego.

W przypadku bardziej skomplikowanych odwzorowań, gdy zbiory N_k nie pokrywają całej przestrzeni stanu, musimy ograniczyć badanie trajektorii do części niezmienniczej zbioru $N_1 \cup N_2 \cup \cdots \cup N_p$.



Rys. 1.2. Podkowa Smale'a

Metoda dynamiki symbolicznej jest często stosowana w kontekście układów dynamicznych do analizy odwzorowań typu *podkowy Smale'a*. Odwzorowanie podkowy jest czasem używane jako synonim zachowania chaotycznego. Podkowa Smale'a f jest odwzorowaniem ciągłym zdefiniowanym na prostokącie X (rys. 1.2). Pod działaniem f prostokąt X jest ściśnięty w kierunku pionowym, rozciągnięty w poziomym, zagięty oraz położony na siebie. W zbiorze X wybieramy prostokąty N_1 i N_2 jak na rysunku. Odwzorowanie f jest zdefiniowane w ten sposób, że na zbiorach N_1 , N_2 jest to odwzorowanie liniowe. Badamy odwzorowanie f zacieśnione do zbioru X. Obrazy punktów nie należących do $N_1 \cup N_2$ są położone poza zbiorem X.

Część niezmiennicza Λ zbioru X jest produktem dwóch zbiorów Cantora. Można wykazać, że dla dowolnego ciągu symboli o elementach ze zbioru $\{1, 2\}$ istnieje trajektoria zawarta w części niezmienniczej zbioru X, która realizuje ten ciąg symboli.

Z liniowości odwzorowania f na zbiorach N_1 oraz N_2 wynika, że istnieje tylko jedna taka trajektoria. Zatem dla podkowy Smale'a istnieje pełna dynamika symboliczna na dwóch symbolach. Taką dynamikę symboliczną będziemy również określać nazwą dynamika symboliczna podkowy.

Zbiór $\Lambda = \text{Inv}(X)$ zawiera przeliczalną liczbę orbit okresowych. Wszystkie orbity okresowe są typu siodłowego i są gęste w zbiorze Λ . Można również wykazać, że zbiór Λ zawiera nieprzeliczalną liczbę orbit nieokresowych oraz orbitę gęstą.

1.2.4. Entropia topologiczna

Entropia topologiczna odwzorowania f jest parametrem liczbowym charakteryzującym szybkość "mieszania" punktów przez odwzorowanie f [12, 112].

Przypomnimy najpierw oryginalną definicję entropii topologicznej. Niech (X, ϱ) będzie zwartą przestrzenią metryczną, zaś α otwartym pokryciem X, $\alpha = \{A_i\}_{i=1}^n$, $X \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$, A_i są zbiorami otwartymi.

Iloczynem pokryć $\alpha = \{A_i\}_{i=1}^n$ i $\beta = \{B_j\}_{j=1}^m$ nazywamy pokrycie

$$\alpha \lor \beta = \{A_i \cap B_j, i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}.$$

Pokrycie $\beta = \{A_{i_j}\}_{j=1}^m$ ($1 \le i_j \le n$) składające się z wybranych zbiorów należących do pokrycia $\alpha = \{A_i\}_{i=1}^n$ nazywamy *podpokryciem pokrycia* α . Dla każdego otwartego pokrycia α przestrzeni X niech $N(\alpha)$ oznacza liczbę zbiorów w podpokryciu o minimalnej mocy. Liczbę

$$H(\alpha) = \log N(\alpha) \tag{1.25}$$

nazywamy entropią pokrycia α .

Niech $f: X \mapsto X$ będzie odwzorowaniem ciągłym. Dla pokrycia $\alpha = \{A_i\}$ oznaczmy $f^{-1}(\alpha) = \{f^{-1}(A_i)\}$, gdzie $f^{-1}(A_i)$ jest przeciwobrazem zbioru A_i przez odwzorowanie f.

Definicja 1.4. Granicę

$$\mathbf{H}(f,\alpha) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \mathbf{H}(\alpha \lor f^{-1}(\alpha) \lor \ldots \lor f^{-n+1}(\alpha))$$
(1.26)

nazywamy entropią topologiczną przekształcenia f
 względem pokrycia $\alpha.$ Liczbę ${\rm H}(f),$ określoną wzorem

$$\mathbf{H}(f) = \sup_{\alpha} \mathbf{H}(f, \alpha) \tag{1.27}$$

nazywamy entropią topologiczną przekształcenia f. Supremum jest rozciągnięte na wszystkie możliwe pokrycia otwarte α .

Jedną z podstawowych własności entropii topologicznej jest jej niezmienniczość względem sprzężenia. Jeśli układy (X, f) i (Y, g) są topologicznie sprzężone (tzn. jeśli istnieje homeomorfizm $h : X \mapsto Y$ taki, że $h \circ f = g \circ h$), to H(f) = H(g). Jeśli odwzorowanie h jest surjekcją, to zachodzi nierówność $H(f) \ge H(g)$.

Podana definicja entropii topologicznej nie jest wygodna dla celów obliczeniowych. Definicja równoważna opiera się na pojęciu zbioru (n, ε) -rozdzielonego [12]. Zbiór $E \subset X$ nazywamy (n, ε) -rozdzielonym, jeśli dla dowolnych różnych punktów $x, y \in E$ istnieje $j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ takie, że odległość punktów $f^j(x), f^j(y)$ jest większa od ε .

Zdefiniujmy przez $s_n(\varepsilon)$ moc maksymalnego zbioru (n, ε) -rozdzielonego

 $s_n(\varepsilon) = \max\{\operatorname{card} E \colon E \text{ jest } (n, \varepsilon) - \operatorname{rozdzielony}\},\$

gdzie card E oznacza moc zbioru E.

Poniższe twierdzenie mówi, jak używając zbiorów (n, ε) –rozdzielonych, można obliczać entropię topologiczną.

Twierdzenie 1.6. Niech f będzie odwzorowaniem ciągłym. Wówczas

$$\mathbf{H}(f) = \lim_{\varepsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log s_n(\varepsilon).$$
(1.28)

Przedstawiona została definicja entropii topologicznej dla układu dyskretnego. Wprowadzimy teraz definicję entropii ciągłego układu dynamicznego [29].

Definicja 1.5. Entropią topologiczną ciągłego układu dynamicznego $\{X, \mathbb{R}, \pi\}$ nazywamy liczbę

$$\mathbf{H}(\pi) = \mathbf{H}(\pi_1),\tag{1.29}$$

gdzie odwzorowanie $\pi_t \colon X \mapsto X$ jest przesunięciem o czas t zdefiniowanym jako $\pi_t(x) = \pi(x, t).$

Zachodzi równość $H(\pi_t) = |t| H(\pi_1)$, co pozwala przeliczać entropię topologiczną przesunięć o różny czas [29, str. 218].

Entropia topologiczna układów zachowujących się w sposób regularny (np. posiadających stabilny punkt stały, który przyciąga wszystkie trajektorie) jest równa zeru. Mówimy, że układ jest *chaotyczny w sensie topologicznym*, jeśli jego entropia topologiczna jest dodatnia.

1.3. Układy chaotyczne

W niniejszej pracy będziemy rozważać układy nieliniowe generujące skomplikowane oscylacje. Nazywane są one układami chaotycznymi. Zdefiniujemy obecnie pojęcie układu chaotycznego oraz podamy podstawowe własności takich układów.

Istnieje wiele różnych definicji układu chaotycznego. Podamy definicję zaczerpniętą z pracy [53] bazującą na pojęciu punktu homoklinicznego. Istnienie transwersalnych punktów homoklinicznych komplikuje strukturę trajektorii. W układach dynamicznych posiadających transwersalne punkty homokliniczne występuje zjawisko podkowy Smale'a, co w konsekwencji implikuje istnienie nieskończenie wielu punktów okresowych układu dynamicznego. Atraktor nazywamy *chaotycznym*, jeśli zawiera transwersalną orbitę homokliniczną. Układ nazywamy chaotycznym, jeśli posiada chaotyczny atraktor.

Jedna z ważniejszych cech układów chaotycznych jest czułość na zmianę warunków początkowych, wyrażająca się istnieniem dodatniego wykładnika Lapunowa [27]. Największy wykładnik Lapunowa λ_1 określa typową szybkość wzrostu odległości rozwiązań układu startujących z dwóch blisko położonych punktów należących do danego atraktora. Rozwiązania oddalają się od siebie początkowo z eksponencjalną predkością. Odległość między nimi rośnie zgodnie z wzorem $||\pi(x,t) - \pi(y,t)|| \approx ||x-y|| e^{\lambda_1 t}$. Należy zwrócić uwagę, że rozwiązania startujące z obu punktów początkowych należą do atraktora, a zatem odległość między nimi nie może rosnąć w sposób nieograniczony. Jednak po pewnym czasie rozwiązania te stają się nieskorelowane. Czułość na zmianę warunków początkowych jest na tyle ważną cechą układów chaotycznych, że w wielu pracach pojawia się ona w definicji atraktora chaotycznego. Przykładowo w pracy [52] atraktorem chaotycznym nazywa się atraktor, dla którego typowa orbita posiada dodatni wykładnik Lapunowa. Czułość na zmianę warunków początkowych oznacza, że z praktycznego punktu widzenia układy chaotyczne są nieprzewidywalne w długim czasie. Zawsze istnieje pewien błąd pomiaru warunków początkowych układu. Różnica miedzy rozwiazaniem rzeczywistym a rozwiazaniem obliczonym na podstawie zmierzonych warunków początkowych rośnie z czasem w sposób eksponencjalny.

Kolejną własnością układów chaotycznych jest dodatniość entropii topologicznej. W niektórych pracach własność ta jest podawana jako definicja chaosu. Należy jednak zwrócić uwagę, że dodatniość entropii topologicznej nie implikuje istnienia atraktora i jest warunkiem słabszym niż poprzednie. Zatem w układzie, który posiada dodatnią entropię topologiczną, możemy nie obserwować zachowań chaotycznych dla typowej trajektorii.

Inną cechą atraktorów chaotycznych jest istnienie (przy pewnych założeniach) nieskończenie wielu niestabilnych orbit okresowych należących do atraktora. Typowa trajektoria odwiedza wszystkie części atraktora i przechodzi nieskończenie wiele razy dowolnie blisko każdego punktu należącego do atraktora.

1.4. Przykładowe układy nieliniowe

W tym podrozdziale podane zostaną przykłady układów nieliniowych rozważanych w niniejszej pracy.

1.4.1. Odwzorowanie logistyczne

Odwzorowanie logistyczne jest nieliniowym odwzorowaniem jednej zmiennej

$$f(x) = ax(1-x), (1.30)$$

zdefiniowanym na odcinku I = [0, 1]. Odwzorowanie to będziemy rozważać z parametrem a = 3.9. Dla tej wartości parametru obserwuje się zachowanie chaotyczne. Trajektore odwzorowań jednowymiarowych często przedstawia się za pomocą *wykre*su schodkowego, gdzie punkty x_k trajektorii rysuje się na przekątnej kwadratu, zaś w celu zobrazowania przejścia $x_k \mapsto x_{k+1} = f(x_k)$ rysowany jest schodek złożony z odcinków $\overline{(x_k, x_k)(x_k, f(x_k))}$ oraz $\overline{(x_k, f(x_k))(f(x_k), f(x_k))}$.



Rys. 1.3. Odwzorowanie logistyczne, trajektoria punktu x = 0.3 złożona z 80 punktów przedstawiona za pomocą wykresu schodkowego

Przykładowa trajektoria odwzorowania logistycznego jest przedstawiona na rysunku 1.3.

Na rysunku tym zaznaczono również punkty stałe, które są położone na przecięciu przekątnej z wykresem funkcji f. Odwzorowanie logistyczne posiada dwa punkty stałe: $x_1 = 0, x_2 = 1 - a^{-1} \approx 0.7436$. Pochodne f w punktach stałych są równe odpowiednio $f'(x_1) = 3.9$ oraz $f'(x_2) = -1.9$, co oznacza, że oba punkty stałe są niestabilne.

1.4.2. Odwzorowanie Hénona

Odwzorowanie Hénona [59] podane jest wzorem

$$h(x_1, x_2) = (1 + x_2 - ax_1^2, bx_1).$$
(1.31)

Dla klasycznych wartości parametrów a = 1.4, b = 0.3 obserwuje się atraktor Hénona (rys. 1.4).

Wiadomo, że czworokąt $\Omega = \overline{ABCD}$, gdzie A = (-1.33, 0.42), B = (1.32, 0.133), C = (1.245, -0.14) oraz D = (-1.06, -0.5), jest zbiorem pułapką dla odwzorowania Hénona, tzn. $h(\Omega) \subset \Omega$. Zbiór Ω zawiera w sobie atraktor Hénona obserwowany numerycznie.

Odwzorowanie Hénona posiada dwa niestabilne punkty stałe

$$x^{\pm} = (x_1^{\pm}, bx_1^{\pm}), \quad x_1^{\pm} = \frac{b - 1 \pm \sqrt{(1 - b)^2 + 4a}}{2a}.$$
 (1.32)

Punkt $x^+ \approx (0.631, 0.189)$ należy do zbioru Ω , zaś $x^- \approx (-1.131, -0.339)$ leży poza tym zbiorem (rys. 1.4). Oba punkty stałe są typu siodłowego. Wartości własne macierzy Jacobiego h' dla x^+ są równe $\lambda_1 \approx 0.1559$, $\lambda_2 \approx -1.9237$, zaś dla x^- są równe $\lambda_1 \approx 3.2598$, $\lambda_2 \approx -0.092$.



Rys. 1.4. Trajektoria odwzorowania Hénona składająca się z 10 000 punktów oraz zbiór Ω , niestabilne punkty stałe: $x^+ \in \Omega$ (symbol "+") oraz $x^- \notin \Omega$ (symbol "*")

1.4.3. Odwzorowanie Ikedy

Odwzorowanie Ikedy [55] dane jest następującym równaniem

$$f(z) = p + B \exp\left(i\kappa - i\alpha/(1+|z|^2)\right)z,$$
(1.33)

gdzi
e $z=x_1+ix_2$ jest liczbą zespoloną. Odw
zorowanie to można również zapisać w postaci

$$f(x_1, x_2) = (p + B(x_1 \cos t - x_2 \sin t), B(x_1 \sin t + x_2 \cos t)), \quad (1.34)$$

gdzie $t = t(x_1, x_2) = \kappa - \alpha/(1 + x_1^2 + x_2^2).$

Zauważmy najpierw, że kula

$$K = B((p,0), pB/(1-B))$$
(1.35)

jest zbiorem pułapką dla f (tzn. $f(K) \subset K$) [55]. Dla $z \in K$ mamy

$$|f(z) - p| \le B|z| \le B\left(p + \frac{pB}{1 - B}\right) = \frac{pB}{1 - B},$$

czyli $f(z) \in K$.

Przykładowa trajektoria odw
zorowania Ikedy dla parametrów o wartościach p=1,
 $B=0.9,\,\kappa=0.4$ i $\alpha=6$ jest pokazana na rysunku 1.5
a. Dla tych wartości parametrów odw
zorowanie Ikedy posiada trzy punkty stałe

$$P_1 \approx (2.972132, 4.145946),$$

$$P_2 \approx (0.532755, 0.246897),$$

$$P_3 \approx (1.114270, -2.285694).$$

Pierwszy z nich (niewidoczny na rysunku) jest stabilny, a pozostałe dwa są niestabilne. P_2 należy do atraktora obserwowanego numerycznie, zaś P_3 jest położony nieznacznie poniżej (rys. 1.5a). Wartości własne wynoszą odpowiednio $\lambda_{1,2} \approx 0.8517 \pm j0.2908$, dla P_1 , $\lambda_1 \approx -2.3897$, $\lambda_2 \approx -0.339$ dla P_2 oraz $\lambda_1 \approx 1.6592$, $\lambda_2 \approx 0.4882$ dla P_3 .



Rys. 1.5. Odwzorowanie Ikedy, a) $\alpha = 6$, trajektoria punktu (0,0), niestabilny punkt stały P_2 (symbol "*"), niestabilny punkt stały P_3 (symbol "+"); b) $\alpha = 6$, przebieg czasowy zmiennej x_1 ; c) $\alpha = 3$, przebieg czasowy zmiennej x_1 ; d) $\alpha = 7$, przebieg czasowy x_1

Przy zmianie parametrów odwzorowania Ikedy w jego zachowaniu następują istotne zmiany (tzw. bifurkacje). Wygenerowana przez komputer trajektoria punktu (x, y) = (0, 0) dla różnych wartości parametru α jest przedstawiona na rysunkach 1.5b–d. Dla $\alpha = 3$ trajektoria zmierza do punktu stałego. Dla $\alpha = 6$ trajektoria jest chaotyczna, zaś dla $\alpha = 7$ trajektoria początkowo wykazuje skomplikowane oscylacje, ale jej zbiorem granicznym jest orbita o okresie 2.

1.4.4. Obwód Chuy

Obwód Chuy [15] przedstawiony na rysunku 1.6 jest układem rzędu trzeciego, zbudowanym z pięciu elementów liniowych (pojemności C_1 , C_2 , indukcyjności L i rezystancji R_0 , R) oraz jednego elementu nieliniowego oznaczonego symbolem N_R .



Rys. 1.6. Obwód Chuy

Idealny obwód Chuy opisywany jest przez autonomiczny układ równań różnicz-kowych trzeciego rzędu

$$C_{1} \frac{\mathrm{d}x_{1}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}(x_{2} - x_{1}) - g(x_{1}),$$

$$C_{2} \frac{\mathrm{d}x_{2}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}(x_{1} - x_{2}) + x_{3},$$

$$L \frac{\mathrm{d}x_{3}}{\mathrm{d}t} = -x_{2} - R_{0}x_{3},$$
(1.36)

gdzie $q(\cdot)$ jest trójsegmentową funkcją odcinkami liniową

$$g(z) = G_b z + 0.5(G_a - G_b)(|z+1| - |z-1|).$$
(1.37)

W układzie tym występuje wiele ciekawych zjawisk dynamicznych. Przy różnych wartościach parametrów obserwowano stabilne punkty stałe, orbity okresowe o różnych długościach, zjawisko podwajania okresu, wiele rodzajów dziwnych atraktorów, np. atraktor typu Roesslera, *double-scroll, double-hook* [15]. W niniejszej pracy powyższy układ rozważany jest z następującymi wartościami parametrów

$$C_1 = 1, C_2 = 9.3515, G_a = -3.4429, G_b = -2.1849,$$

$$L = 0.06913, R = 0.33065, R_0 = 0.00036.$$
(1.38)

Dla tych wartości parametrów obserwuje się atraktor typu double-scroll (rys. 1.7).

Ponieważ prawa strona równania (1.36) jest odcinkami liniowa, to spełnia globalny warunek Lipschitza. Zatem na podstawie Twierdzenia 1.2 układ (1.36) posiada własność jednoznaczności rozwiązań.

Obwód Chuy posiada trzy punkty stałe

$$\begin{split} x &= (0,0,0), \\ x^{\pm} &= \pm \frac{G_b - G_a}{G_b + (R + R_0)^{-1}} (1, R_0 (R_0 + R)^{-1}, -(R_0 + R)^{-1}) \approx \\ &\approx \pm (1.5045, 0.0016, -4.545). \end{split}$$

Dla trywialnego punktu stałego macierz Jacobiego posiada jedną niestabilną i dwie stabilne wartości własne: $\lambda_1 \approx 0.728$, $\lambda_{2,3} \approx -0.319 \pm j0.892$. Dla punktów x^{\pm} wartości własne są równe $\lambda_{1,2} \approx 0.061 \pm j$, $\lambda_3 \approx -1.29$.



Rys. 1.7. Obwód Chuy: a) trajektoria typu *double-scroll*; b) przebieg czasowy napięcia x_1

1.4.5. Obwód Chuy z gładką nieliniowością

Poprzednio opisany został obwód z elementem nieliniowym o charakterystyce odcinkami liniowej. Obecnie przedstawimy jego modyfikację polegającą na zastąpieniu odcinkami liniowej charakterystyki rezystora nieliniowego za pomocą wielomianu rzędu trzeciego [65]. Elektroniczna implementacja nieliniowości tego typu za pomocą analogowych układów mnożących oraz wzmacniaczy operacyjnych została opisana w pracy [122]. Obwód jest opisany następującym równaniem stanu

$$C_{1} \frac{dx_{1}}{dt} = \frac{1}{R}(x_{2} - x_{1}) - g(x_{1}),$$

$$C_{2} \frac{dx_{2}}{dt} = \frac{1}{R}(x_{1} - x_{2}) + x_{3},$$

$$L \frac{dx_{3}}{dt} = -x_{2} - R_{0}x_{3},$$
(1.39)

gdzie $g(\cdot)$ jest wielomianem rzędu trzeciego

$$g(z) = g_1 z + g_2 z^3. (1.40)$$

W niniejszej pracy będziemy rozważać układ (1.39) z następującymi wartościami parametrów

$$C_1 = 0.7, C_2 = 7.8, L = 1.891, R = 1.964,$$

$$R_0 = 0.01499, g_1 = -0.59, g_2 = 0.02.$$
(1.41)

Rozważany układ posiada trzy punkty stałe określone wzorami

$$x = (0, 0, 0), \tag{1.42}$$

$$x^{\pm} = \pm x_1 (1, R_0 (R_0 + R)^{-1}, -(R_0 + R)^{-1}), \qquad (1.43)$$

gdzie $x_1 = \sqrt{-(g_1 + (R + R_0)^{-1})g_2^{-1}}.$
Dla wartości parametrów (1.41) $x^{\pm} = \pm (2.0578, 0.015587, -1.0398)$. Wartości własne dla trywialnego punktu stałego są równe: $\lambda_1 \approx 0.1954, \lambda_{2,3} \approx -0.0766 \pm j0.191$. Dla x^{\pm} są one równe: $\lambda_{1,2} \approx 0.0127 \pm j0.218, \lambda_3 \approx -0.346$.



Rys. 1.8. Trajektorie obwodu z gładką nieliniowością: a) R = 2.2; b) R = 2.15; c) R = 2.14; d) R = 2.137; e) R = 2.13; f) R = 1.964

Wyniki symulacji równań obwodu dla różnych wartości parametru R zostały przedstawione na rysunku 1.8. Można zaobserwować jedną z typowych dla układów nieliniowych serię bifurkacji podwajania okresu prowadzącą do zachowania chaotycznego. Przy zmianie parametru obserwuje się kolejne bifurkacje prowadzące do powstawania stabilnych orbit okresowych o okresie w przybliżeniu dwukrotnie dłuższym niż dotychczas istniejące.

Dla R = 2.2 istnieje stabilna orbita o okresie podstawowym (rys. 1.8a). Przy zmniejszaniu wartości parametru orbita okresowa traci stabilność i rodzi się stabilna orbita o okresie w przybliżeniu dwa razy dłuższym (rys. 1.8b). Przy dalszym zmniejszaniu R obserwujemy orbity o okresie 4 i 8 (rys. 1.8c, d). Dla wartości R = 2.1 mamy zachowanie chaotyczne w postaci atraktora typu Roesslera (rys. 1.8e). Dla jeszcze mniejszych wartości R dwa atraktory typu Roesslera zderzają się ze sobą i powstaje atraktor typu double-scroll (rys. 1.8f).

1.4.6. Układ Roesslera

Kolejnym często rozważanym układem nieliniowym jest układ Roesslera. Jest to układ rzędu trzeciego z gładką prawą stroną

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 - x_3 \\ x_1 + ax_2 \\ b + x_3(x_1 - c) \end{pmatrix}.$$
(1.44)

Dla wartości parametrów

$$a = 0.2, \quad b = 0.2, \quad c = 5.7,$$

obserwuje się znany atraktor Roesslera pokazany na rysunku 1.9.



Rys. 1.9. Atraktor Roesslera (a); przebieg czasowy zmiennej x_1 (b)

Dla rozważanych wartości parametrów układ Roesslera posiada dwa punkty stałe określone wzorem

$$x^{\pm} = (ax_3^{\pm}, -x_3^{\pm}, x_3^{\pm}), \quad x_3^{\pm} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4ab}}{2a}.$$
 (1.45)

Punkt $x^+ \approx (5.69, -28.5, 28.5)$ leży poza atraktorem, zaś $x^- \approx (0.007, -0.035, 0.035)$ jest położony w środku obszaru zajmowanego przez atraktor. Dla x^- mamy jedną stabilną i dwie niestabilne wartości własne: $\lambda_{1,2} \approx 0.097 \pm j0.995$, $\lambda_3 \approx -5.6869$.

1.4.7. Układ Lorenza

Układ Lorenza [79] powstaje jako uproszczony model konwekcji płynów w dwuwymiarowej warstwie ogrzewanej od dołu. Jest on opisany następującym równaniem różniczkowym

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx_2 - sx_1 \\ rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - qx_3 \end{pmatrix}.$$
(1.46)

Układ Lorenza będziemy rozważać z następującymi wartościami parametrów

 $s = 10, \quad r = 28, \quad q = 8/3.$

Na rysunku 1.10 przedstawiono typową trajektorię układu Lorenza oraz przykładowy przebieg czasowy zmiennej x_2 .



Rys. 1.10. Atraktor Lorenza (a); przebieg czasowy zmiennej x_2 (b)

Dla rozważanych wartości parametrów układ Lorenza posiada trzy punkty stałe. Jednym z nich jest początek układu współrzędnych. Wartości własne macierzy Jacobiego w tym punkcie są równe: $\lambda_1 \approx 11.83$, $\lambda_2 \approx -2.67$, $\lambda_3 \approx -22.83$.

Pozostałe punkty stałe są określone wzorami

$$x^{\pm} = (\pm \sqrt{q(r-1)}, \pm \sqrt{q(r-1)}, r-1) \approx (\pm 8.49, \pm 8.49, 27).$$
(1.47)

Wartości własne są równe $\lambda_{1,2} \approx 0.094 \pm j10.19, \lambda_3 \approx -13.854.$

1.5. Analiza układów nieliniowych

W poprzednim podrozdziale przedstawiono kilka przykładów układów nieliniowych, oraz wybrane trajektorie tych układów. Aby móc powiedzieć coś więcej na temat dynamiki układów, można generować wiele trajektorii startujących z różnych warunków początkowych. Taka metoda analizy jest raczej czasochłonna i nie daje nam zbyt bogatej informacji na temat rozważanego układu. Nie ma nawet pewności, że stosując tę metodę zlokalizujemy wszystkie stabilne orbity okresowe o niskich okresach, żeby nie wspomnieć rozwiązań niestabilnych. Stabilne rozwiązania okresowe mogą mieć bardzo małe baseny przyciągania w porównaniu z rozmiarem badanego obszaru i znalezienie ich przy starcie z przypadkowych warunków początkowych może się nie udać. Przykłady zostaną podane w dalszej części pracy.

Istnieje wiele analitycznych metod badania układów nieliniowych. Bogaty przegląd takich metod można znaleźć w pracach [53, 118, 103, 75, 107]. Część tych metod nadaje się do zastosowania tylko w przypadku bardzo prostych układów. Niektóre są opracowane dla konkretnych układów dynamicznych i ich zastosowanie w ogólnej sytuacji jest trudne lub niemożliwe. Już choćby rozwiązanie tak prostych zagadnień jak obliczenie trajektorii układu w sensie ścisłym jest dla większości układów dynamicznych zagadnieniem nierozwiązywalnym analitycznie. Podobnie udowodnienie istnienia orbity okresowej nie jest zagadnieniem trywialnym.

W niniejszej pracy wykażemy, iż arytmetyka przedziałowa pozwala na skonstruowanie metod analizy, które można zastosować do badania bardzo szerokiej klasy układów. Opiszemy wybrane metody analizy układów nieliniowych wykorzystujące arytmetykę przedziałową. Pokażemy, jak za pomocą metod arytmetyki przedziałowej można w sposób ścisły wyznaczać trajektorie układu, dowodzić istnienia orbit okresowych (również niestabilnych), znajdować wszystkie orbity okresowe o ustalonym okresie, dowodzić istnienia dynamiki symbolicznej i inne.

1.6. Arytmetyka przedziałowa

W podrozdziale tym przedstawiony zostanie krótki opis arytmetyki przedziałowej. Szczegółowy opis można znaleźć w monografiach [88, 3].

Przez *przedział* będziemy rozumieć domknięty ograniczony zbiór liczb rzeczywistych postaci

$$\mathbf{x} = [a, b] = \{ x \colon a \leqslant x \leqslant b \}. \tag{1.48}$$

Przedział można również rozważać jako uporządkowaną parę dwóch liczb rzeczywistych *a* and *b*, będących jego końcami. Wektor przedziałowy wymiaru *n* jest to uporządkowany ciąg *n* przedziałów $\mathbf{v} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Wektor przedziałowy o wymiarze *n* odpowiada kostce w przestrzeni \mathbb{R}^n : $\{(x_1, x_2, \dots, x_n): x_i \in \mathbf{x}_i \text{ dla } i = 1, \dots, n\}$.

W niniejszej pracy będziemy używać liter pogrubionych do oznaczenia przedziałów, wektorów przedziałowych i macierzy przedziałowych i zwykłych liter do oznaczania wielkości "rzeczywistych". Do zapisu wielkości przedziałowych będziemy niekiedy stosować skróconą notację. Przykładowo, przedział [1.23233343, 1.23233369] będziemy zapisywać w postaci 1.232333⁴³₄₃.

Dla danego przedziału $\mathbf{x} = [a, b]$ definiujemy szerokość przedziału Diam(\mathbf{x}) oraz środek przedziału Mid(\mathbf{x}) jako

$$Diam(\mathbf{x}) = b - a, \quad Mid(\mathbf{x}) = 0.5(b + a).$$
 (1.49)

Szerokość i środek wektora przedziałowego i macierzy przedziałowej definiujemy jako wektor rzeczywisty lub macierz rzeczywistą, których elementami są odpowiednio szerokości lub środki odpowiednich przedziałów.

Na zbiorze przedziałów definiujemy podstawowe operacje arytmetyczne

$$\mathbf{x}_1 \diamond \mathbf{x}_2 = \{ x = x_1 \diamond x_2 \colon x_1 \in \mathbf{x}_1, x_2 \in \mathbf{x}_2 \},$$
(1.50)

gdzie \diamond jest jednym z następujących operatorów: +, -, · lub /. Wszystkie operatory poza dzieleniem są zdefiniowane dla dowolnych przedziałów. W przypadku dzielenia zakładamy, że $0 \notin \mathbf{x}_2$. Ponieważ liczba rzeczywista *a* może być potraktowana jako zdegenerowany przedział a = [a, a], to arytmetyka przedziałowa zawiera w sobie zwykłą arytmetykę "rzeczywistą".

Dla wszystkich podstawowych operacji arytmetycznych wynik można obliczyć, wykonując odpowiednie operacje arytmetyczne na końcach przedziałów. Przykładowo dla dodawania i mnożenia przedziałów reguły są następujące

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d],$$

$$[a, b] * [c, d] = [\min\{ac, ad, bc, bd\}, \max\{ac, ad, bc, bd\}].$$

W praktyce nie jest możliwe wykonanie operacji arytmetycznych (rzeczywistych czy też przedziałowych) z nieskończoną dokładnością. Jesteśmy zatem ograniczeni przez reprezentacje o skończonej precyzji. Możliwa jest implementacja arytmetyki przedziałowej na komputerze w taki sposób, aby obliczony przedział zawsze zawierał ścisły wynik. W "najlepszej" implementacji arytmetyki przedziałowej obliczony przez komputer prawy koniec przedziału jest najmniejszą liczbą reprezentowalną maszynowo, która jest nie mniejsza niż prawdziwy prawy koniec, zaś obliczony lewy koniec jest największą liczbą reprezentowalną maszynowo nie większą niż prawdziwy lewy koniec.

Funkcje elementarne implementuje się w sposób ścisły, korzystając z rozwinięcia Taylora funkcji. W obliczonym wyniku uwzględnia się błąd popełniony przez opuszczenie wyrazów wyższego rzędu. Dla funkcji monotonicznych (np. exp, log) oblicza się wartości na końcach przedziału ustawiając odpowiedni rodzaj zaokrąglania przy wykonywaniu operacji elementarnych. Dla funkcji niemonotonicznych (np. sin, cos) bada się dodatkowo warunki na istnienie eksremów lokalnych wewnątrz badanego przedziału.

Istnieje pełna gama algorytmów przedziałowych, które mogą być wykorzystane do rozwiązania różnorodnych problemów obliczeniowych. Bogaty przegląd można znaleźć w pracach [87, 88, 3]. Niektóre algorytmy przedziałowe są rozszerzeniem odpowiednich algorytmów dla liczb rzeczywistych. Można do nich zaliczyć metody obliczania trajektorii układu ciągłego za pomocą rozwiniecia Taylora. Istnieją również algorytmy specyficzne dla arytmetyki przedziałowej. Metody "samosprawdzające się" zwane również metodami inkluzji należą do tej właśnie klasy. Przykładem są metody dowodu istnienia i jednoznaczności zer funkcji omawiane w niniejszej pracy. Możliwość konstrukcji takich algorytmów wynika z dualnego charakteru przedziału. Ponieważ przedział jest nie tylko liczbą reprezentowaną przez swoje końce, ale jest również zbiorem liczb rzeczywistych, to można obliczyć przecięcie dwóch lub więcej przedziałów lub sprawdzić zawieranie jednego przedziału w drugim.

1.6.1. Efekt pakowania

Efekt pakowania został opisany już w pracy [87] w kontekście całkowania układów równań różniczkowych za pomocą arytmetyki przedziałowej. Reprezentowanie wyników obliczeń jako iloczynu kartezjańskiego przedziałów odpowiada w pewnym sensie "pakowaniu" przedmiotów do pudełka. Stąd nazwa *efekt pakowania* (ang. *wrapping effect*). Przy reprezentowaniu obiektów dowolnego kształtu za pomocą wektorów przedziałowych, czyli prostopadłościennych pudełek o krawędziach równoległych do osi układu współrzędnych dochodzi do przeszacowania wyniku. Przeszacowanie to propaguje się, gdy pośrednie wyniki są wykorzystywane w dalszych obliczeniach. Szczególnie wyraźnie widać to przy obliczeniach opartych na wzorach rekurencyjnych, do których należy wyznaczanie trajektorii układu dynamicznego. Przykład wpływu efektu pakowania na obliczanie trajektorii układu liniowego oraz zaburzonego układu nieliniowego zostanie szczegółowo opisany w rozdziale 2.

Występowanie efektu pakowania nie jest jednak ograniczone do wyznaczania trajektorii układów dynamicznych. Przy obliczeniach w arytmetyce przedziałowej wynik każdej pośredniej operacji jest przedziałem. Jeśli jakaś wielkość kilkakrotnie pojawia się w obliczeniach, to ponieważ nie są pamiętane zależności między przedziałami, może się zdarzyć, że wynik obliczeń jest przeszacowany. Najprościej można to zauważyć przy próbie obliczenia wyniku operacji 2x - x dla $x \in \mathbf{x}$, korzystając z metod arytmetyki przedziałowej. Przykładowo jeśli $\mathbf{x} = [0, 1]$ to $2\mathbf{x} - \mathbf{x} = [-1, 2]$, gdy tymczasem wiadomo, że prawdziwy wynik jest równy $\mathbf{x} = [0, 1]$. Obserwujemy zatem znaczne przeszacowanie wyniku.

Podobnie zauważmy, że zastosowanie wzoru $x^2 = xx$ nie daje optymalnych wyników, przykładowo dla $\mathbf{x} = [-1, 2]$ otrzymujemy $\mathbf{x}^2 \subset \mathbf{x}\mathbf{x} = [-1, 2] \cdot [-1, 2] = [-2, 4]$, gdy tymczasem wiemy, że wynik $\{x^2 : x \in [-1, 2]\} = [0, 4]$ jest zawarty w dodatniej półosi \mathbb{R}_+ .

W powyższych przykładach łatwo można poprawić technikę obliczeń, tak aby uzyskać wynik dokładny. W celu zobaczenia wpływu efektu pakowania na bardziej skomplikowanym przykładzie, gdzie nie ma prostej redukcji składników, obliczmy wartość wyrażenia

$$f(x,y) = \frac{-x+2y}{2x+y} - 0.2y \tag{1.51}$$

dla $x \in \mathbf{x} = [0,1], \, y \in \mathbf{y} = [1,3].$ Bezpośrednie obliczenia w arytmetyce przedziałowej dają wynik

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{-[0, 1] + 2[1, 3]}{2[0, 1] + [1, 3]} - 0.2[1, 3] = \frac{[1, 6]}{[1, 5]} - [0.2, 0.6] =$$
$$= [0.2, 6] - [0.2, 0.6] = [-0.4, 5.8].$$

Jest to przedział o szerokości $\text{Diam}(f(\mathbf{x}, \mathbf{y})) = 6.2$. Wiadomo jednak, że prawdziwy wynik należy do przedziału [-0.2 + 1/3, 1.8] o szerokości 5/3. Obserwujemy bardzo znaczne przeszacowanie wyniku. Odpowiedzialne za to jest wielokrotne występowanie zmiennych x, y we wzorze.

Przy okazji zobaczmy, w jaki sposób wynik może zależeć od postaci wzoru. Jeśli do obliczenia wartości f użyjemy równoważnego z matematycznego punktu widzenia wzoru

$$f(x,y) = \frac{-x + 2y - 0.4xy - 0.2y^2}{2x + y},$$
(1.52)

to otrzymamy wynik $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = [-2, 5.8]$ o szerokości 7.8 > 6.2. Widać zatem, że wynik obliczeń może zmieniać się znacznie zależnie od użytego wzoru.

Istnieje wiele metod ograniczenia wpływu efektu pakowania. Jedną z nich jest użycie wzoru opartego na twierdzeniu o wartości średniej (zobacz podrozdz. 2.1.2). Okazuje się jednak, że użycie tej metody dla szerokich przedziałów \mathbf{x} , \mathbf{y} nie daje spodziewanej poprawy. Dla \mathbf{x} , \mathbf{y} takich jak poprzednio otrzymuje się przedział o szerokości 25, czyli znacznie większy niż przy bezpośrednim użyciu wzoru (1.51). Metoda oparta na twierdzeniu o wartości średniej działa dobrze dla wąskich przedziałów wejściowych. Przykładowo f([0.99, 1], [2.99, 3]) obliczone w arytmetyce przedziałowej daje wynik o szerokości 0.014, natomiast metoda oparta na twierdzeniu o wartości średniej daje wynik o szerokości równej 0.008.

Inne metody zmniejszenia wpływu efektu pakowania polegają na używaniu różnych reprezentacji pośrednich wyników obliczeń (zobacz podrozdz. 2.2.5). Używane są rozwinięcia Taylora pierwszego rzędu — arytmetyka afiniczna [28]. Do reprezentacji wektorów przedziałowych można używać równoległościanów [77, 78] lub specjalnych klas wielościanów [73, 72].

1.6.2. Oprogramowanie do obliczeń przedziałowych

Istnieje wiele pakietów oprogramowania, które mogą być używane do przeprowadzania obliczeń w arytmetyce przedziałowej. Są one dostępne jako biblioteki w C [68, 74], C++ [66, 69], Fortranie [63, 116], Pascalu [67, 56] oraz jako zestaw procedur w Matlabie.

1.6.3. Automatyczne różniczkowanie

W wielu zastosowaniach niezbędne jest obliczenie pochodnej funkcji. Jeśli chcemy pochodne zastosować w programie komputerowym mamy kilka możliwości. Pierwszą opcją jest ręczne wyprowadzenie wzorów na pochodne i wpisanie ich do programu. Druga możliwość to wykorzystanie pakietu do obliczeń symbolicznych (np. Maple lub Mathematica) do wyprowadzenia wzorów na pochodne i wklejenie odpowiedniego kodu do programu. Obie te metody prowadzą do dokładnych wyników na pochodne. Okazuje się jednak, że zastosowanie ich w przypadku bardziej skomplikowanych funkcji lub w przypadku konieczności obliczania pochodnych wysokiego rzędu często nie jest możliwe. Powodem są duże wymagania co do czasu obliczeń, wykorzystanej pamięci oraz rozmiaru wyniku, który musi być wprowadzony do programu.

Często stosowaną metodą uzyskania przybliżonych wartości pochodnych jest zastosowanie przybliżenia opartego na ilorazach skończonych różnic. Ta metoda wprowadza błędy obcięcia, co może prowadzić do bardzo niedokładnych wyników. Jeśli celem jest uzyskanie wyników dokładnych, metoda nie nadaje się do użycia. Okazuje się jednak, że wbrew potocznemu mniemaniu obliczenie pochodnych funkcji jest stosunkowo proste. Wykorzystuje się do tego metody automatycznego różniczkowania [102]. Obliczanie wartości funkcji oraz jej pochodnej jest wykonywane przez program równocześnie. Użytkownik (autor programu komputerowego) musi podać jedynie metodę obliczania wartości funkcji. Pochodne są obliczanie za pomocą wzoru na pochodną złożenia. Spis dostępnych narzędzi do wykonywania automatycznego różniczkowania można znaleźć w pracy [62].

1.6.4. Program komputerowy do ścisłej analizy układów

W ramach przygotowywania niniejszej pracy opracowano program komputerowy do ścisłej analizy układów nieliniowych. Program został napisany w języku C++, był kompilowany przy użyciu kompilatora gcc w wersji 3.2. Obliczenia były prowadzone na komputerze z zainstalowanym systemem operacyjnym Linux, RedHat 8.0. W celu zapewnienia wygodnego w użyciu środowiska graficznego wykorzystano pakiety gtk++ oraz gtkmm w wersji 2.0.

Jako podstawę do obliczeń w arytmetyce przedziałowej wykorzystano pakiety BIAS oraz Profil opracowane na początku lat 90. XX w. [69, 70]. Dokonano w nich kilku niezbędnych zmian. Poprawiono definicje typów i nagłówków funkcji, co umożliwia współpracę tych pakietów ze współczesnymi kompilatorami. Bardziej istotna zmiana polega na implementacji funkcji elementarnych sin, cos, exp oraz log w sposób ścisły. W oryginalnej wersji funkcje elementarne wykorzystywały standardowe implementacje tych funkcji dostępne w bibliotece matematycznej libm, które zgodnie ze standardem IEEE nie muszą być dokładne (tzn. nie ma pewności, że wszystkie cyfry obliczone przez komputer przy uzyciu procedur z biblioteki libm są dokładne).

W programie wykorzystano pakiety do automatycznego różniczkowania FAD-BAD [5] oraz TADIFF [6]. Są one dostosowane do współpracy z zestawami procedur BIAS i Profil [70], co umożliwia obliczanie pochodnych w sposób ścisły w arytmetyce przedziałowej. Pakiet TADIFF służy do obliczania rozwinięcia danej funkcji w szereg Taylora, zaś pakiet FADBAD umożliwia automatyczne obliczanie pochodnych wyrażeń względem wybranych zmiennych. Pakiety TADIFF oraz FADBAD można wykorzystywać równocześnie i uzyskiwać w ten sposób na przykład pochodne wyrazów szeregu Taylora.

W programie zdefiniowano wszystkie układy dynamiczne rozważane w niniejszej pracy oraz dodatkowo wiele innych układów. Parametry badanego układu można zmieniać wewnątrz programu.

- W programie zawarto ścisłe procedury do:
- obliczania trajektorii układu,
- obliczania wartości odwzorowania Poincarégo oraz jego macierzy jakobianowej (dla układów ciągłych),
- dowodzenia istnienia trajektorii okresowych,
- znajdowania wszystkich orbit okresowych o ustalonym okresie oraz basenu przyciągania stabilnej orbity okresowej (dla układów dyskretnych),
- znajdowania nakrycia części niezmienniczej i niewędrującej danego zbioru (dla układów dyskretnych),
- dowodzenia istnienia dynamiki symbolicznej.

Poza obliczeniami ścisłymi program umożliwia badanie układów dynamicznych przy użyciu standardowych (nieprzedziałowych) metod analizy układów. Możliwe jest obliczanie trajektorii układu, znajdowanie wykładników Lapunowa, poszukiwanie położenia orbit okresowych za pomocą metody Newtona oraz metody bliskich powrotów, konstruowanie diagramów bifurkacyjnych itd.

2. Wyznaczanie trajektorii

Podstawowym problemem przy badaniu układów nieliniowych jest znajdowanie trajektorii startującej z wybranego punktu przestrzeni stanu, co sprowadza się do wyznaczenia dla ustalonego $x_0 \in \mathbb{R}^m$ oraz t > 0 położenia punktu x_0 po czasie t, czyli znalezienia $\pi(x_0, t)$. Poza bardzo szczególnymi przypadkami problemu tego nie da się rozwiązać w sposób ścisły. Wymagałoby to bowiem prowadzenia obliczeń w nieskończonej precyzji.

W naszych rozważaniach będziemy się zadowalać znalezieniem zbioru zawierającego punkt $\pi(x_0, t)$, przy czym będziemy zainteresowani, aby rozmiar tego zbioru był możliwie mały, czyli aby położenie punktu $\pi(x_0, t)$ było znane z możliwie dużą dokładnością. Poniżej przedstawimy metody obliczania trajektorii układu dynamicznego dla warunków początkowych należących do zadanego wektora przedziałowego \mathbf{x}_0 (kostki w przestrzeni stanów). Tak postawione zadanie obejmuje problem wyznaczania trajektorii punktu — w tym przypadku zbiorem startowym jest wektor przedziałowy o zerowej średnicy.

Problem obliczania trajektorii równocześnie dla zbioru warunków początkowych pojawia się w sposób naturalny w przypadkach, gdy nie znamy warunku początkowego z nieskończoną dokładnością. Jeśli trajektorię wyznaczamy przy użyciu komputera, to nawet jeśli warunek początkowy x_0 jest liczbą reprezentowalną, zwykle po pewnym czasie jako wynik obliczeń pojawia się liczba niereprezentowalna, którą arytmetyka przedziałowa reprezentuje jako niezdegenerowany przedział (przedział o niezerowej długości) zawierający tę liczbę. W trakcie obliczania trajektorii występują błędy zaokrągleń i ewentualnie błędy metody (np. przy całkowaniu układów równań różniczkowych), które są uwzględniane przez zwiększenie rozmiaru wyniku. Występuje również przeszacowanie wyniku związane z "efektem pakowania". Wszystkie te czynniki kumulują się i średnica zbioru zawierającego $\pi(x_0, t)$ może rosnąć z t.

W przypadku obliczania trajektorii układów stabilnych zwiększanie rozmiaru spowodowane błędami zaokrągleń i efektem pakowania może być skompensowane przez dynamikę układu. Nie ma jednak na to szansy w przypadku układów dynamicznych posiadających własność wrażliwości na warunki początkowe. Dla takich układów obserwuje się eksponencjalne zwiększanie rozmiaru zbioru zawierającego trajektorie startujące z obszaru o niezerowej objętości. Znaleziony wektor przedziałowy zawierający zbiór $\pi(\mathbf{x}_0, t)$ rośnie wraz z t i po pewnym czasie osiąga rozmiar większy niż rozważany przez nas obszar przestrzeni stanu (np. staje się większy niż rozmiar atraktora). W tym momencie informacja, którą posiadamy na temat rozwiązania rzeczywistego, jest równa zeru — prawdziwa trajektoria może znajdować się w dowolnym punkcie atraktora. W przypadku takich układów szczególnie istotne staje się ograniczenie wpływu błędów zaokrągleń i efektu pakowania. Dzięki użyciu odpowiednich metod obliczania trajektorii udaje się zredukować wpływ tych czynników i w efekcie można obliczać trajektorie układu w dłuższych przedziałach czasowych.

Niekiedy problem istnienia trajektorii układu dynamicznego odpowiadającej trajektorii wygenerowanej przez komputer formułuje się nieco inaczej. Nie interesuje nas trajektoria startująca z zadanych warunków początkowych, lecz problem istnienia trajektorii pozostającej blisko wygenerowanej trajektorii startującej z pewnego nieznanego warunku początkowego. Podejście to oparte jest na twierdzeniu o śledzeniu, które mówi, że w przypadku odwzorowań hiperbolicznych dla każdego ε istnieje δ takie, że każda δ -pseudoorbita może być śledzona z dokładnością ε przez prawdziwą orbite [13]. Ten wynik nie ma zbyt wielu bezpośrednich zastosowań praktycznych. Po pierwsze wartość δ , dla której istnienie orbity śledzącej jest zapewnione, może być o wiele rzedów wielkości mniejsze niż dokładność obliczeń uzyskiwanych za pomocą komputerów. Po drugie, co bardziej istotne, większość interesujących układów dynamicznych nie jest hiperboliczna. W celu udowodnienia własności śledzenia dla układów niehiperbolicznych należy podczas generowania trajektorii sprawdzać pewne dodatkowe warunki, aby zapewnić istnienie prawdziwej orbity śledzacej trajektorie wygenerowaną za pomocą komputera. Przykłady zastosowania tej techniki są opisane w pracach [105, 16, 17].

Zaczniemy od przypadku dyskretnych układów dynamicznych.

2.1. Metody obliczania $f^n(\mathbf{x}_0)$

W przypadku dyskretnych układów dynamicznych zadanych odwzorowaniem f problem wyznaczenia trajektorii startującej z zadanego punktu x_0 sprowadza się do obliczania kolejnych iteracji: $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \ldots, x_n = f(x_{n-1}), \ldots$

Niech \mathbf{x}_0 będzie wektorem przedziałowym, dla którego chcemy obliczyć kolejne iteracje pod działaniem odwzorowania f. Oznaczmy przez \mathbf{x}_k zbiór zawierający rozwiązanie problemu dla chwili k.

2.1.1. Bezpośrednie zastosowanie arytmetyki przedziałowej

Najprostszą metodą obliczenia kolejnych iteracji odw
zorowania fjest zastosowanie wzoru

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k). \tag{2.1}$$

W k-tej iteracji obliczamy $f(\mathbf{x}_k)$ w arytmetyce przedziałowej i \mathbf{x}_{k+1} definiujemy jako wynik tych obliczeń. Z własności arytmetyki przedziałowej wynika, że spełniona jest inkluzja $\{f(x_k): x_k \in \mathbf{x}_k\} \subset \mathbf{x}_{k+1}$. Indukcyjnie można wykazać, że dla każdego k > 0zachodzi warunek $\{f^k(x_0): x_0 \in \mathbf{x}_0\} \subset \mathbf{x}_k$. Okazuje się, że bezpośrednie zastosowanie wzoru (2.1) jest zwykle bardzo nieefektywne. Pokażemy to na przykładzie obliczania trajektorii układu liniowego zdefiniowanego następującym wzorem

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} x,$$
(2.2)

gdzie $x = (x_1, x_2)^{\mathrm{T}}$ oraz $\theta = \pi/10$. Odw
zorowanie f opisuje obrót o kąt θ wokół środka układu współrzędnych.

Na rysunku 2.1 przedstawiona jest trajektoria układu obliczona przy użyciu arytmetyki przedziałowej dla warunku początkowego $\mathbf{x}_0 = [0.999, 1.001] \times [-0.001, 0.001]$. Narysowanych jest pierwszych 37 iteracji \mathbf{x}_k obliczonych przy użyciu wzoru (2.1).



Rys. 2.1. Efekt pakowania przy obliczaniu trajektorii odwzorowania liniowego dla zbioru warunków początkowych $\mathbf{x}_0 = [0.999, 1.001] \times [-0.001, 0.001]$

Widać, że rozmiar kolejnych iteracji rośnie wraz z k. Wiemy jednak, że układ opisuje obrót, czyli że rozmiar zbioru $\{f^k(x_0): x_0 \in \mathbf{x}_0\}$ nie zmienia się pod działaniem odwzorowania f. To co obserwujemy na rysunku, jest typowym przykładem na tzw. efekt pakowania. Obraz kwadratu \mathbf{x} jest kwadratem obróconym o kąt θ . Zbiór $f(\mathbf{x})$ wyznaczony zgodnie z wzorem (2.1) jest wektorem przedziałowym. Jeśli założymy, że nie występują błędy zaokrągleń oraz że \mathbf{x} jest kwadratem o boku δ , to $f(\mathbf{x})$ jest wektorem przedziałowym o bokach równych $a\delta$, gdzie

$$a = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right). \tag{2.3}$$

W każdej iteracji rozmiar wektora przedziałowego rośnie co najmniej a razy i po n iteracjach rozmiar obrazu jest a^n razy większy niż rozmiar kostki startowej. Dla

 $\theta=\pi/10$ mamy $a\approx 1.26$ i po 37 iteracjach rozmiar kostki jest $a^{37}>5000$ razy większy od rozmiaru kostki startowej.

Przykład powyższy pokazuje na czym polega i jak się objawia efekt pakowania. Głównym powodem jego występowania jest znajdowanie w każdej iteracji wektora przedziałowego \mathbf{x}_{k+1} zawierającego zbiór $f(\mathbf{x}_k)$.

Dzięki zmianie sposobu reprezentacji zbioru \mathbf{x}_k można w niektórych przypadkach całkowicie wyeliminować efekt pakowania, w innych zaś znacznie ograniczyć jego wpływ. Metody oparte na zmianie sposobu reprezentacji zbioru \mathbf{x}_k zostaną opisane w podrozdziale 2.1.3.

2.1.2. Zastosowanie twierdzenia o wartości średniej

Przy bardziej skomplikowanych odwzorowaniach f efekt pakowania może się ujawniać już podczas obliczania pojedynczej iteracji. Aby zmniejszyć rozmiar obliczonego wektora przedziałowego $f(\mathbf{x})$ stosuje się wyrażenie oparte na twierdzeniu o wartości średniej.

Twierdzenie 2.1. Niech $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem klasy C^1 . Wybierzmy punkty $x, y \in \mathbb{R}^n$. Wówczas $\forall i \in \{1, 2, ..., m\}$ istnieje punkt z_i należący do odcinka \overline{xy} , taki że

$$f_i(x) - f_i(y) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_j} (z_i) (x_j - y_j).$$
(2.4)

Wniosek 2.1. Wybierzmy wektor przedziałowy \mathbf{x} i punkt $y \in \mathbf{x}$. Wówczas

$$\{f(x)\colon x\in\mathbf{x}\}\subset f(y)+f'(\mathbf{x})(\mathbf{x}-y).$$
(2.5)

Dowód. Wybierzmy $x \in \mathbf{x}$. Na podstawie Twierdzenia 2.1 istnieją punkty z_i należące do odcinka \overline{xy} takie, że równanie (2.4) jest spełnione. Zauważmy, że położenie punktu z_i zależy od *i*. Dla każdego *i* zachodzi natomiast warunek $z_i \in \mathbf{x}$ (\mathbf{x} jest zbiorem wypukłym oraz $x, y, \in \mathbf{x}$). Zatem

$$f_i(x) \in f_i(y) + \sum_{j=1}^m \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\mathbf{x})(x_j - y_j)$$

Ostatecznie

$$f(x) \in f(y) + f'(\mathbf{x})(x-y) \subset f(y) + f'(\mathbf{x})(\mathbf{x}-y).$$

Inkluzję (2.5) możemy wykorzystać do wyznaczania trajektorii odwzorowania f zgodnie z następującym wzorem rekurencyjnym

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\bar{x}_k) + f'(\mathbf{x}_k)(\mathbf{x}_k - \bar{x}_k), \qquad (2.6)$$

gdzie \bar{x}_k jest dowolnym punktem należącym do \mathbf{x}_k . Zwykle jako \bar{x}_k wybiera się środek kostki \mathbf{x}_k . Taką metodę obliczania trajektorii będziemy w tekście określać skrótem MVF (*mean value form*).

Zauważmy, że w celu obliczenia k-tej iteracji odwzorowania f możemy zastosować k-krotnie wzór (2.6) lub zastosować ten wzór do odwzorowania f^k

$$\mathbf{x}_{k} = f^{k}(\bar{x}_{0}) + (f^{k})'(\mathbf{x}_{0})(\mathbf{x}_{0} - \bar{x}_{0}).$$
(2.7)

Pochodną $(f^k)'$ możemy obliczyć z wzoru $(f^k)'(x) = f'(f^{k-1}(x)) \cdots f'(f(x)) f'(x)$. Tę wersję będziemy określać skrótem MVFN.

2.1.3. Zmiana reprezentacji zbioru x_k

Opiszemy obecnie jak poprzez wprowadzenie nowej reprezentacji zbioru \mathbf{x}_k można uzyskać lepsze wyniki przy obliczaniu iteracji odwzorowania f za pomocą wzoru (2.6). Opisane poniżej metody pochodzą z pracy [78], w której są one zastosowane do obliczania trajektorii układów ciągłych.

Wektor \mathbf{x}_k jest reprezentowany jako suma $\mathbf{x}_k = \bar{x}_k + \mathbf{r}_k$, gdzie \bar{x}_k jest środkiem \mathbf{x}_k . W praktyce, aby znaleźć \bar{x}_k oraz \mathbf{r}_k wykonujemy w arytmetyce przedziałowej następujące operacje

$$\bar{x}_k = \operatorname{Mid}(\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{r}_k = \mathbf{x}_k - \bar{x}_k.$$
 (2.8)

W ten sposób spełniony jest warunek: $\mathbf{x}_k \subset \bar{x}_k + \mathbf{r}_k$.

Wprowadźmy oznaczenie $\mathbf{A}_k = f'(\mathbf{x}_k)$. Używając rozkładu $\mathbf{x}_k = \bar{x}_k + \mathbf{r}_k$ na podstawie wzoru (2.6), otrzymujemy

$$\bar{x}_{k+1} + \mathbf{r}_{k+1} = f(\bar{x}_k) + \mathbf{A}_k \mathbf{r}_k.$$
(2.9)

Przedstawmy $f(\bar{x}_k)$ jako sumę jego środka $\bar{x}_{k+1} = \text{Mid}(f(\bar{x}_k))$ i wektora przedziałowego $\mathbf{z}_{k+1} = f(\bar{x}_k) - \bar{x}_{k+1}$

$$f(\bar{x}_k) = \bar{x}_{k+1} + \mathbf{z}_{k+1}.$$
(2.10)

Po podstawieniu do wzoru (2.9) otrzymujemy

$$\bar{x}_{k+1} + \mathbf{r}_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + \mathbf{z}_{k+1} + \mathbf{A}_k \mathbf{r}_k$$
 (2.11)

i stąd dostajemy równanie na \mathbf{r}_{k+1}

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} + \mathbf{A}_k \mathbf{r}_k. \tag{2.12}$$

Powyższe obliczenia można wykonać w następującej kolejności:

1. $\mathbf{A}_{k} = f'(\mathbf{x}_{k})$, 2. $\mathbf{u} = f(\bar{x}_{k})$, 3. $\bar{x}_{k+1} = \text{Mid}(\mathbf{u})$, 4. $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{u} - \bar{x}_{k+1}$, 5. $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} + \mathbf{A}_{k}\mathbf{r}_{k}$.

Zależnie od sposobu reprezentacji \mathbf{r}_{k+1} otrzymujemy różne wersje algorytmu różniące się znacznie szerokością otrzymanego wyniku.

Wektor przedziałowy — metoda IV

Jest to najprostsza wersja obliczeń, w której nie wprowadzamy nowej reprezentacji i \mathbf{r}_k jest wektorem przedziałowym (stąd skrót IV — *interval vector*). Wektor przedziałowy \mathbf{r}_{k+1} jest obliczany bezpośrednio ze wzoru (2.12). Metoda ta jest równoważna zastosowaniu wzoru (2.6).

Równoległościan — metody PAR, QR, QRS

W tej grupie metod \mathbf{r}_k jest reprezentowane jako równoległościan, tzn. $\mathbf{r}_k = B_k \hat{\mathbf{r}}_k$, gdzie B_k jest macierzą nieosobliwą, zaś $\hat{\mathbf{r}}_k$ jest wektorem przedziałowym. W momencie rozpoczęcia obliczeń wybieramy $B_0 = I$.

Na podstawie (2.12) mamy

$$B_{k+1}\hat{\mathbf{r}}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} + \mathbf{A}_k B_k \hat{\mathbf{r}}_k \tag{2.13}$$

i stąd

$$\hat{\mathbf{r}}_{k+1} = B_{k+1}^{-1} \mathbf{z}_{k+1} + (B_{k+1}^{-1} \mathbf{A}_k B_k) \hat{\mathbf{r}}_k.$$
(2.14)

W każdym kroku dokonujemy wyboru macierzy B_{k+1} , obliczamy B_{k+1}^{-1} (w arytmetyce przedziałowej) i wyznaczamy $\hat{\mathbf{r}}_{k+1}$ na podstawie powyższego wzoru. Należy zauważyć, że wyrażenie w nawiasie powinno być obliczone w pierwszej kolejności. Wektor przedziałowy $\mathbf{r}_k = B_k \hat{\mathbf{r}}_k$ jest obliczany tylko w celu otrzymania końcowego wyniku.

W pierwszej wersji wybieramy $B_{k+1} = \text{Mid}(\mathbf{A}_k B_k)$. Zbiór $\mathbf{r}_k = B_k \hat{\mathbf{r}}_k$ jest równoległościanem. Tę wersję określamy symbolem PAR (*parallelogram*). Przy takim wyborze B_{k+1} musimy obliczać macierz odwrotną B_{k+1}^{-1} . Obliczenia te musimy wykonywać w arytmetyce przedziałowej. Ponieważ przy większej liczbie iteracji macierz B_{k+1} staje się zwykle źle uwarunkowana, to metoda zawodzi. Średnica macierzy B_{k+1}^{-1} staje się bardzo duża lub jej obliczenie jest niemożliwe.

Druga metoda, pozbawiona konieczności obliczania w arytmetyce przedziałowej macierzy odwrotnej, oparta jest na algorytmie QR rozkładu macierzy [110]. Macierz Mid($\mathbf{A}_k B_k$) rozkładamy jako Mid($\mathbf{A}_k B_k$) = $Q_{k+1} R_{k+1}$, gdzie Q_{k+1} jest macierzą ortonormalną, zaś R_{k+1} jest macierzą trójkątną górną i wybieramy $B_{k+1} = Q_{k+1}$. Macierz odwrotną do B_{k+1} otrzymujemy jako transpozycję macierzy Q_{k+1} . Główną zaletą tej metody jest brak konieczności odwracania macierzy B_{k+1} . Zbiór $\mathbf{r}_k = B_k \hat{\mathbf{r}}_k$ jest obróconym prostopadłościanem. Zwykle metoda ta jest znacznie lepsza od wersji poprzednich, choć zdarzają się jednak przypadki, w których daje gorsze wyniki. Tę wersję określamy symbolem QR.

Ulepszenie metody QR (metoda QRS) polega na sortowaniu kolumn macierzy $Mid(\mathbf{A}_k B_k)$ według długości wektorów odpowiadających kolumnom przed dokonaniem rozkładu QR.

Niezdegenerowany przedział wartości początkowych — metoda IE

Metoda ta znajduje zastosowanie w przypadku, gdy wektor początkowy ma niezerową średnicę. Błędy wprowadzane przy obliczaniu $f(\bar{x}_k)$ traktuje się niezależnie od błędów pochodzących od wielkości startowego wektora przedziałowego. Wektor \mathbf{r}_{k+1} jest przedstawiony w postaci

$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{E}_{k+1}\mathbf{r}_0 + \tilde{\mathbf{r}}_{k+1}.$$
(2.15)

Pierwsza część, reprezentująca błędy pochodzące od warunku początkowego, zmienia się według zależności

$$\mathbf{E}_{k+1} = \mathbf{A}_k \mathbf{E}_k. \tag{2.16}$$

Drugi składnik

$$\tilde{\mathbf{r}}_{k+1} = \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{r}}_k + \mathbf{z}_{k+1},\tag{2.17}$$

obliczany jest jedną z metod przedstawioną wcześniej (zwykle stosuje się metodę QR). Jako warunki początkowe dla metody przyjmuje się $\mathbf{E}_0 = I$ oraz $\tilde{\mathbf{r}}_0 = (0, 0, \dots, 0)$.

Aby uniknąć efektu pakowania przy obliczaniu iloczynu $\mathbf{A}_k \mathbf{E}_k$, wprowadza się macierz rzeczywistą C_k spełniającą warunki $C_0 = I$ oraz $C_{k+1} \in \mathbf{A}_k C_k$. Macierz C_k reprezentuje środek macierzy \mathbf{E}_k . Wektor \mathbf{r}_{k+1} jest przedstawiony w postaci

$$\mathbf{r}_{k+1} = C_{k+1}\mathbf{r}_0 + \tilde{\mathbf{r}}_{k+1}.\tag{2.18}$$

Różnicę między $\mathbf{A}_k C_k$ a C_{k+1} uwzględnia się w składniku $\tilde{\mathbf{r}}_{k+1}$

$$\tilde{\mathbf{r}}_{k+1} = \mathbf{A}_k \tilde{\mathbf{r}}_k + \mathbf{z}_{k+1} + (\mathbf{A}_k C_k - C_{k+1}) \mathbf{r}_0.$$
(2.19)

Możliwe jest również stosowanie kilku reprezentacji równocześnie, co często okazuje się najlepszym rozwiązaniem.

2.1.4. Metoda uogólnionej bisekcji

Prostym sposobem ograniczenia wpływu efektu pakowania jest zastosowanie metody bisekcji. W najprostszej wersji tej metody pokrywamy zbiór \mathbf{x}_0 , którego trajektorię chcemy obliczyć, za pomocą p wektorów przedziałowych o małych rozmiarach

$$\mathbf{x}_0 = igcup_{i=1}^p \mathbf{z}_0^i$$

i znajdujemy trajektorię każdej z części niezależnie. Trajektorię zbioru \mathbf{x}_0 otrzymuje się jako sumę mnogościową obliczonych trajektorii

$$\mathbf{x}_k = \bigcup_{i=1}^p \mathbf{z}_k^i.$$

Najczęściej podział kostki startowej jest wykonywany wzdłuż każdej zmiennej na l części (metoda uogólnionej bisekcji). W ten sposób otrzymujemy l^m kostek, gdzie m jest wymiarem układu. Zbiór startowy niekoniecznie musi być kostką. W celu zastosowania jej do dowolnego zbioru pokrywamy ten zbiór za pomocą kostek ustalonego rozmiaru i powyższą metodę stosujemy do pokrycia. Do obliczania trajektorii każdej z kostek można używać dowolnej z metod podanych wcześniej. Metoda ta nadaje się dobrze do obliczania trajektorii stosunkowo dużych zbiorów dla niewielkiej liczby iteracji.

Szczególnie często stosuje się jej wersję rekurencyjną. Przypuśćmy, że naszym celem jest sprawdzenie jakiegoś warunku dla k-tej iteracji kostki \mathbf{x}_0 . W tym celu obliczamy $f^k(\mathbf{x}_0)$ i sprawdzamy zachodzenie warunku. Jeśli jest on spełniony, to kończymy obliczenia. W przeciwnym wypadku dokonujemy podziału kostki \mathbf{x}_0 na mniejsze części i wywołujemy procedurę rekurencyjną dla każdej z części. W ten sposób unikamy niepotrzebnych podziałów w części zbioru \mathbf{x}_0 , gdzie nie jest to konieczne — automatycznie dobierana jest możliwie duża wielkość kostki, dla której warunek jest spełniony.

W rozdziale 4 metoda ta jest stosowana do dowodu istnienia dynamiki symbolicznej. Metodę bisekcji stosuje się również do znajdowania wszystkich orbit okresowych o zadanym okresie (porównaj podrozdz. 3.1.5).

W przypadku większej liczby iteracji można wprowadzić dodatkowe podziały po kolejnych iteracjach. Ta wersja nadaje się również do zastosowania w przypadku, gdy chcemy znaleźć trajektorię punktu. Postępujemy wówczas w następujący sposób. Obliczamy trajektorię zbioru początkowego jedną z metod podanych wcześniej i obserwujemy wielkość obliczonego zbioru. Jeśli przekroczy ona z góry zadaną wartość, to dokonujemy podziału na mniejsze części i dla każdej z nich obliczamy trajektorię niezależnie.

Wielokrotne dokonywanie podziałów wzdłuż trajektorii daje się połączyć z metodami MVF, MVFN oraz IV opisanymi uprzednio. Należy zwrócić uwagę, że w przypadku pozostałych metod nie można dokonywać podziałów zbyt często, gdyż ich działanie opiera się na specyficznej reprezentacji zbioru zawierającego kolejne iteracje. W momencie podziału trzeba inicjować metodę ponownie, co polega na znalezieniu wektora przedziałowego zawierającego reprezentowany zbiór i powoduje utratę korzyści osiąganych przez stosowanie danej reprezentacji.

Teoretycznie za pomocą metody z podziałami wzdłuż trajektorii można wyeliminować efekt pakowania. W praktyce okazuje się jednak, że najczęściej liczba kostek, dla których należy obliczać iteracje, rośnie wykładniczo wraz z numerem iteracji. Powoduje to, że czas obliczeń również rośnie wykładniczo. W efekcie liczba iteracji, dla której możemy obliczyć trajektorię z żądaną dokładnością jest ograniczona.

Znaczne zmniejszenie liczby kostek reprezentujących trajektorię dla danej iteracji można uzyskać poprzez łączenie kostek \mathbf{z}_k^i . W tym celu znajdujemy kostki o ustalonym rozmiarze, które pokrywają zbiór $\bigcup_{i=1}^{p} \mathbf{z}_k^i$. Najczęściej do pokrycia używa się kostek, których wierzchołki leżą na ustalonej siatce. Dopuszczamy przy tym, że kostki pokrywające nieznacznie przeszacowują zbiór $\bigcup_{i=1}^{p} \mathbf{z}_k^i$. Uzyskane w ten sposób zmniejszenie liczby kostek pozwala jednak na wykonanie obliczeń dla znacznie większej liczby iteracji.

Porównanie metod obliczania trajektorii układów dyskretnych opisanych powyżej jest przedstawione w podrozdziale 2.7.

2.2. Wyznaczanie trajektorii układu ciągłego

Wyznaczanie trajektorii układu ciągłego jest znacznie bardziej skomplikowanym zagadnieniem. Do obliczania trajektorii stosuje się metody numeryczne całkowania układu równań różniczkowych. Opiszemy metodę ścisłego obliczania trajektorii dla problemu początkowego

$$x'(t) = f(x(t)), \quad x(0) = x_0,$$
(2.20)

gdzie $x(t) \in \mathbb{R}^m$ zaś $f : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ jest funkcją klasy C^p . Oznaczmy przez $\varphi(t, x_0)$ rozwiązanie problemu (2.20).

Zwykle problem ten rozwiązuje się numerycznie za pomocą dyskretyzacji równania różniczkowego

$$\tilde{x}(t_{k+1}) = \Phi(\tilde{x}(t_k), h_k),$$
(2.21)

gdzie $t_{k+1} = t_k + h_k$, $t_0 = 0$, $\tilde{x}(t_0) = x_0$. Ciąg t_k jest dyskretyzacją zmiennej całkowania t, natomiast $\tilde{x}(t_k)$ jest przybliżeniem rozwiązania dokładnego x(t) w chwili t_k uzyskanym za pomocą metody numerycznej Φ .

W celu obliczenia w sposób ścisły trajektorii układu (2.20) będziemy stosować zmodyfikowaną wersję metody całkowania numerycznego. Modyfikacja polega na uwzględnieniu błędów wprowadzanych przez metodę numeryczną oraz przeprowadzaniu obliczeń w arytmetyce przedziałowej. Podobnie jak w przypadku układów dyskretnych rozważymy nieco ogólniejszy przypadek, gdy warunek początkowy należy do wektora przedziałowego \mathbf{x}_0 . Opisane metody będą znajdowały rozwiązanie problemu (2.20) w postaci ciągu wektorów przedziałowych $\mathbf{x}_k, k = 0, 1, 2, \ldots$, które spełniają warunek $\varphi(t_k, x_0) \subset \mathbf{x}_k$ dla każdego $x_0 \in \mathbf{x}_0$.

Na podstawie metody numerycznej Φ konstruujemy ścisłą metodę obliczenia trajektorii w następujący sposób

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\mathbf{x}_k, h_k) + e(\mathbf{y}_k). \tag{2.22}$$

Pierwszy składnik odpowiada metodzie numerycznej. Obliczenie $\Phi(\mathbf{x}_k, h_k)$ przeprowadzamy w arytmetyce przedziałowej, aby mieć pewność, że uzyskany wynik zawiera wynik prawdziwy. Składnik $e(\mathbf{y}_k)$ jest ścisłym oszacowaniem na błąd metody. W przypadku wielu metod numerycznych, błąd metody jest wyrażeniem zależnym od pewnych nieznanych parametrów. Potrafimy jednak oszacować go w sposób ścisły.

Poniżej przedstawimy metodę ścisłego obliczania trajektorii układu opartą na metodzie Taylora. Jest również możliwe zastosowanie innych metod numerycznych (np. metody Rungego–Kutty), dla których znamy wyrażenie na błąd metody. Okazuje się jednak, że zwykle czas obliczeń jest dłuższy niż dla metody Taylora z powodu większej liczby składników w wyrażeniu na błąd metody.

Metoda Taylora rzędu n jest oparta na następującym rozwinięciu

$$x_{i}(h) = x_{i}(0) + hx'_{i}(0) + \frac{h^{2}}{2}x''_{i}(0) + \dots + \frac{h^{n}}{n!}x_{i}^{(n)}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}x_{i}^{(n+1)}(\lambda_{i}h),$$
(2.23)

gdzie $x = (x_1, x_2, \dots, x_m), i = 1, 2, \dots, m$ oraz $\lambda_i \in [0, 1]$ dla $i = 1, 2, \dots, m$.

Pierwsze n + 1 składników odpowiada standardowej metodzie Taylora. Do ich obliczenia wykorzystujemy wzory na pochodne $x^{(k)}$, które łatwo można wyprowadzić

korzystając z równania x' = f(x). Przykład obliczeń jest przedstawiony w podrozdziale 2.4.

Ostatni składnik określa błąd metody. Należy zwrócić uwagę, że nie znamy wartości parametrów λ_i występujących w równaniu (2.23). Nie powoduje to jednak komplikacji przy konstrukcji ścisłej metody całkowania. Błąd ten można oszacować na podstawie znajomości zbioru wypukłego \mathbf{y}_k zawierającego trajektorie startujące z \mathbf{x}_k dla czasu $t \in [0, h_k]$. Z uwagi na czynnik $h^{n+1}/(n+1)!$ oszacowanie \mathbf{y}_k nie musi być dobrej jakości. Poniżej przedstawimy prostą metodę znajdowania zbioru \mathbf{y}_k .

2.2.1. Oszacowanie zgrubne

Zgrubne oszacowanie zbioru zawierającego trajektorie $\{\varphi(t, x_k) : t \in [0.h_k]\}$ dla $x_k \in \mathbf{x}_k$ można uzyskać na podstawie następującego twierdzenia (porównaj [78]):

Twierdzenie 2.2. Niech y będzie wektorem przedziałowym takim, że

$$\mathbf{z} = \mathbf{x}_0 + [0, h] f(\mathbf{y}) \subset \mathbf{y}.$$
(2.24)

Wówczas dla każdego $x_0 \in \mathbf{x}_0$ rozwiązanie problemu początkowego $x(0) = x_0$ jest dobrze zdefiniowane dla całego przedziału [0,h] oraz rozwiązanie nie opuszcza zbioru \mathbf{z} dla $t \leq h$, tzn. $\varphi(t, x_0) \in \mathbf{z}$ dla każdego $t \in [0,h]$, $x_0 \in \mathbf{x}_0$.

Poszukiwanie **y** spełniającego założenia powyższego twierdzenia przeprowadza się iteracyjnie. Startujemy ze zbioru **y** zawierającego \mathbf{x}_0 , np. $\mathbf{y} = \mathbf{x}_0 + [0, h]f(\mathbf{x}_0)$ obliczamy **z** i sprawdzamy założenia twierdzenia. Jeśli nie są spełnione, to wybieramy nowe **y**, zwiększając wektor przedziałowy **z** zgodnie z wzorem

$$\mathbf{y} = (1+\varepsilon)\mathbf{z} - \varepsilon \mathbf{z},\tag{2.25}$$

dla ustalonego $\varepsilon > 0$. Zwykle stosuje się wartość $\varepsilon = 0.1$. Jeśli okaże się, że po wielu iteracjach warunek (2.24) nadal nie jest spełniony, to należy zmienić krok h.

2.2.2. Metoda Taylora

Najprostszą metodą obliczenia $\mathbf{x}_{k+1} \supset \varphi(h_k, \mathbf{x}_k)$ otrzymujemy poprzez bezpośrednie zastosowanie wzoru (2.22).

W celu znalezienia oszacowania na błąd metody najpierw znajdujemy oszacowanie zgrubne \mathbf{y}_k zawierające trajektorie startujące z \mathbf{x}_k dla czasu $t \in [0, h_k]$

$$\{\varphi(t,x)\colon t\in[0,h_k], x\in\mathbf{x}_k\}\subset\mathbf{y}_k.$$
(2.26)

Błąd metody szacujemy, obliczając wartość pochodnej $x^{(n+1)}$ na zbiorze \mathbf{y}_k i mnożymy otrzymany wynik przez $h^{n+1}/(n+1)!$. Znajdujemy w ten sposób wektor przedziałowy $e(\mathbf{y}_k)$ zawierający oszacowanie na błąd metody.

Następnie wyznaczamy $\Phi(\mathbf{x}_k, h_k)$, obliczając na zbiorze \mathbf{x}_k wyrażenie

$$\Phi(x,h_k) = x + h_k x' + \frac{h_k^2}{2} x'' + \dots + \frac{h_k^n}{n!} x^{(n)}.$$
(2.27)

Ostatecznie stosujemy wzór (2.22). Zastosowanie metody Taylora do obliczania trajektorii układu Lorenza jest opisane w podrozdziale 2.4.

Metoda Taylora wprowadza bardzo znaczne przeszacowanie i rzadko jest stosowana w praktyce. Są one spowodowane przez efekt pakowania.

2.2.3. Normy logarytmiczne

Jedną z metod zmniejszenia wpływu efektu pakowania jest użycie innej reprezentacji zbioru \mathbf{x}_k i rozbicie obliczeń na dwa etapy. W metodzie wykorzystującej normy logarytmiczne zbiór \mathbf{x}_k jest reprezentowany jako kula $B(\bar{x}_k, r_k)$ o środku \bar{x}_k i promieniu r_k .

W pierwszym etapie obliczany jest obraz środka kuli \bar{x}_k za pomocą ścisłej metody Taylora przedstawionej powyżej. Otrzymujemy wektor przedziałowy \mathbf{v}_{k+1} zawierający punkt $\varphi(h_k, \bar{x}_k)$.

Następnie obliczamy jak zmienia się promień kuli przy ewolucji o czas h_k . Do oszacowania zmiany r_k stosujemy normy logarytmiczne macierzy Jacobiego na zbiorze zawierającym badane trajektorie. Można również w tym celu użyć stałej Lipschitza pola wektorowego f, ale wtedy zwykle uzyskuje się gorsze wyniki. Przypomnijmy, że norma logarytmiczna [54] macierzy Q jest zdefiniowana przez

$$\mu(Q) = \lim_{h \to 0, h > 0} \frac{||I + hQ|| - 1}{h},$$
(2.28)

gdzie $|| \cdot ||$ po prawej stronie oznacza dowolną normę macierzową.

W dalszej części pracy będziemy rozważać następujące normy

- normę euklidesową $||x||_2 = \sum_{i=1}^m |x_i|^2$, normę maksimum $||x||_{\infty} = \max_{i=1,2,\dots,m} |x_i|$, oraz normę $||x||_1 = \sum_{i=1}^m |x_i|$.

Normę logarytmiczną generowaną przez te trzy normy można obliczyć za pomocą następujących wzorów. Dla normy euklidesowej

$$\mu_2(Q) = \text{największa wartość własna macierzy } \frac{Q^{\mathrm{T}} + Q}{2}.$$
(2.29)

Wartości własne są rzeczywiste ponieważ macierz $Q^{\mathrm{T}} + Q$ jest symetryczna.

Dla normy maksimum mamy

$$\mu_{\infty}(Q) = \max_{i=1,...,m} \left(q_{ii} + \sum_{j \neq i} |q_{ij}| \right).$$
(2.30)

Dla normy $|| \cdot ||_1$ zachodzi wzór

$$\mu_1(Q) = \max_{i=1,\dots,m} \left(q_{ii} + \sum_{j \neq i} |q_{ji}| \right).$$
(2.31)

W celu obliczenia, jak zmienia się promień kuli warunków początkowych po czasie h, stosujemy następujące twierdzenie [54]:

Twierdzenie 2.3. Załóżmy, że $\{\varphi(t, x)\}_{t\in[0,h]}$ i $\{\varphi(t, y)\}_{t\in[0,h]}$ są rozwiązaniami układu x' = f(x) zawartymi w zbiorze wypukłym **y**. Załóżmy również, że norma logarytmiczna macierzy f' spełnia warunek $\mu(f') \leq L$ na zbiorze **y** oraz, że odległość punktów x i y spełnia zależność $||x - y|| \leq \varepsilon$. Wówczas dla $t \in [0, h]$ zachodzi następujące oszacowanie

$$||\varphi(t,x) - \varphi(t,y)|| \le \varepsilon e^{tL}.$$
(2.32)

Za pomocą metody opisanej w podrozdziale 2.2.1 znajdujemy oszacowanie zgrubne \mathbf{y}_k zawierające wszystkie trajektorie startujące z kuli $B(\bar{x}_k, r_k)$ dla czasu $t \in [0, h_k]$

$$\{\varphi(t, x_k) \colon t \in [0, h_k], x_k \in \mathcal{B}(\bar{x}_k, r_k)\} \subset \mathbf{y}_k.$$
(2.33)

Obliczamy oszacowanie od góry L_k normy logarytmicznej macierzy f'na zbiorze \mathbf{y}_k

$$\sup_{y \in \mathbf{y}_k} \mu(f'(y)) \leqslant L_k. \tag{2.34}$$

W przypadku normy euklidesowej sprowadza się to do obliczenia największej wartości własnej macierzy $(f'(y)+f'(y)^{\mathrm{T}})/2$ dla $y \in \mathbf{y}_k$. Następnie obliczamy zmianę promienia kuli według wzoru

$$\tilde{r}_{k+1} = r_k \operatorname{e}^{h_k L_k} . \tag{2.35}$$

W wyniku opisanych powyżej operacji otrzymujemy wektor przedziałowy \mathbf{v}_{k+1} zawierający punkt $\varphi(h, \bar{x}_k)$ oraz liczbę rzeczywistą \tilde{r}_{k+1} .Wiemy, że trajektoria startująca z kuli $B(\bar{x}_k, r_k)$ po czasie h_k znajduje się w kuli o promieniu \tilde{r}_{k+1} i środku należącym do \mathbf{v}_{k+1} . W ramach przygotowania do następnego kroku całkowania obliczamy $\bar{x}_{k+1} = \text{Mid}(\mathbf{v}_k)$ oraz znajdujemy nową wartość $r_{k+1} \ge \tilde{r}_{k+1}$ tak, aby dla każdego $v_{k+1} \in \mathbf{v}_{k+1}$ spełniony był warunek

$$B(v_{k+1}, \tilde{r}_{k+1}) \subset B(\bar{x}_{k+1}, r_{k+1}).$$
(2.36)

Postać wzoru na r_{k+1} zależy od wybranej normy. W przypadku normy euklidesowej można użyć wzoru

$$r_{k+1} = \tilde{r}_{k+1} + ||\operatorname{Abs}(\mathbf{v}_{k+1} - \bar{x}_{k+1})||_2, \qquad (2.37)$$

gdzie $y = Abs(\mathbf{x})$ jest wektorem takim, że $-y_i \leq Inf(\mathbf{x}_i) \leq Sup(\mathbf{x}_i) \leq y_i$ dla każdego *i*. Z konstrukcji wynika, że obraz kuli $B(\bar{x}_k, r_k)$ po czasie h_k zawarty jest w kuli $B(\bar{x}_{k+1}, r_{k+1})$

$$\{\varphi(h_k, x_k) \colon x_k \in \mathcal{B}(\bar{x}_k, r_k)\} \subset \mathcal{B}(\bar{x}_{k+1}, r_{k+1}).$$
(2.38)

2.2.4. Metoda Lohnera

Ta metoda polegająca na zastosowaniu twierdzenia o wartości średniej do równania (2.22) pochodzi z pracy [78]. Podobnie jak przy obliczaniu iteracji odwzorowania wprowadzamy następującą reprezentację zbioru \mathbf{x}_k

$$\mathbf{x}_k = \bar{x}_k + \mathbf{r}_k,\tag{2.39}$$

gdzie $\bar{x}_k = \operatorname{Mid}(\mathbf{x}_k).$

Na podstawie twierdzenia o wartości średniej mamy

$$\{\Phi(x_k, h_k) \colon x_k \in \mathbf{x}_k\} \subset \Phi(\bar{x}_k, h_k) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\mathbf{x}_k, h_k)(\mathbf{x}_k - \bar{x}_k).$$
(2.40)

Oznaczmy

$$\mathbf{A}_{k} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\mathbf{x}_{k}, h_{k}) \tag{2.41}$$

tzn. \mathbf{A}_k jest macierzą przedziałową zawierającą pochodne cząstkowe $\frac{\partial \Phi}{\partial x}(x_k, h_k)$ metody numerycznej Φ dla wszystkich $x_k \in \mathbf{x}_k$. Jeśli Φ jest metodą Taylora rzędu n, to macier
z \mathbf{A}_k możemy wyznaczyć ze wzoru

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = I + h \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \right) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} \right) + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} \right).$$
(2.42)

Na podstawie wzoru (2.22), postępując podobnie jak dla układów dyskretnych, otrzymujemy

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(\bar{x}_k, h_k) + \mathbf{A}_k(\mathbf{x}_k - \bar{x}_k) + e(\mathbf{y}_k),$$
$$\bar{x}_{k+1} + \mathbf{r}_{k+1} = \bar{x}_{k+1} + \mathbf{z}_{k+1} + \mathbf{A}_k \mathbf{r}_k,$$
$$\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} + \mathbf{A}_k \mathbf{r}_k,$$
(2.43)

gdzie $\bar{x}_{k+1} = \operatorname{Mid}(\Phi(\bar{x}_k, h_k) + e(\mathbf{y}_k))$ oraz $\mathbf{z}_{k+1} = \Phi(\bar{x}_k, h_k) + e(\mathbf{y}_k) - \bar{x}_{k+1}$. Algorytm Lohnera można zapisać w postaci:

1. znajdź oszacowanie zgrubne $\mathbf{y}_k \supset \{ \varphi(t,x_k) \colon t \in [0,h_k], x_k \in \bar{x}_k + \mathbf{r}_k \}$,

- 2. $\mathbf{A}_k = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(\bar{x}_k + \mathbf{r}_k, h_k)$, 3. $\mathbf{u} = \Phi(\bar{x}_k, h_k) + e(\mathbf{y}_k)$,
- 4. $\bar{x}_{k+1} = Mid(\mathbf{u})$,
- 5. $\mathbf{z}_{k+1} = \mathbf{u} \bar{x}_{k+1}$,
- 6. $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} + \mathbf{A}_k \mathbf{r}_k$.

Podobnie jak poprzednio można wprowadzić różne reprezentacje zbioru \mathbf{r}_k i obliczenie równania $\mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{z}_{k+1} + \mathbf{A}_k \mathbf{r}_k$ można dokonać na wiele sposobów.

Otrzymujemy w ten sposób różne wersje metody Lohnera, które zgodnie z poprzednimi ustaleniami będziemy oznaczać symbolami IR, PAR, QR, QRS oraz IE (zobacz podrozdz. 2.1.3).

Do zastosowania metody Lohnera konieczne jest znalezienie pochodnych $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ metody numerycznej Φ . W podrozdziale 2.4 przedstawione zostaną obliczenia dla układu Lorenza.

2.2.5. Inne metody

Do wyznaczania trajektorii można również stosować bardziej zaawansowane metody oparte na arytmetyce przedziałowej. Należą do nich *arytmetyka afiniczna* oraz tzw. *formy Taylora* lub *modele Taylora*.

Arytmetyka afiniczna [28, 8] wykorzystuje rozwinięcia Taylora rzędu pierwszego, przy czym funkcja jest rozwijana w szereg nie tylko względem początkowych zmiennych, ale również względem pośrednich wyników obliczeń. Posiada ona własność redukcji efektu pakowania. W arytmetyce afinicznej wielkość x jest reprezentowana w formie

$$x = x_0 + x_1 \varepsilon_1 + \dots + x_n \varepsilon_n, \tag{2.44}$$

gdzie x_i są liczbami rzeczywistymi, natomast ε_i są symbolicznymi zmiennymi rzeczywistymi, o których wiadomo, że należą do przedziału [-1, 1]. W arytmetyce afinicznej pamiętane są zależności między zmiennymi. W związku z tym możliwa jest automatyczna redukcja wyrażeń.

W metodzie modeli Taylora [26, 7], które są w pewnym sensie uogólnieniem arytmetyki afinicznej, w sposób rekurencyjny oblicza się aproksymację wielowymiarowego rozwinięcia Taylora z resztą, która w ścisły sposób szacuje błąd rozwinięcia. Jednym z osiągnięć tej metody było przeprowadzenie w 2001 roku ścisłego całkowania dynamiki asteroidy w układzie słonecznym [9] — problemu nie rozwiązanego przedtem za pomocą innych metod.

Ostatnio opisana została techniką redukcji efektu pakowania nazwana zwężającym pakowaniem (ang. shrink wrapping) [8].

2.3. Całkowanie równania wariacyjnego

W wielu zastosowaniach poza obliczaniem trajektorii układu niezbędne jest znalezienie rozwiązania równania wariacyjnego (1.11). Przykładowo do przeprowadzenia dowodu istnienia orbity okresowej odwzorowania Poincarégo za pomocą przedziałowego operatora Newtona konieczna jest znajomość macierzy Jacobiego odwzorowania Poincarégo w otoczeniu punktu okresowego. Do jej obliczenia niezbędne jest całkowanie równania wariacyjnego (porównaj Twierdzenie 1.5).

Aby znaleźć rozwiązanie równania wariacyjnego, można zastosować jedną z metod opisanych poprzednio do układu równań różniczkowych

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x),\tag{2.45a}$$

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t)) \cdot D, \qquad (2.45\mathrm{b})$$

z warunkiem początkowym

$$x(0) = x_0, (2.46a)$$

$$D(0, x_0) = I. (2.46b)$$

Jest to jednak podejście, w którym nie wykorzystujemy w żaden sposób specjalnej struktury układu (2.45). Równanie (2.45b) składa się z m takich samych zestawów m równań różniczkowych, różniących się tylko warunkiem początkowym. Te układy równań są niezależne od siebie i ponadto równanie (2.45a) jest niezależne od równania (2.45b). Dodatkową wadą tej metody jest wysoki rząd otrzymanego w ten sposób układu równań różniczkowych równy $m + m^2$.

W praktyce, aby rozwiązać układ (2.45) najpierw całkuje się równanie (2.45a), a otrzymane rozwiązanie wykorzystuje do znalezienia rozwiązania równania (2.45b) (porównaj również [121]).

Oznaczmy przez $\psi(t, x_0, D_0)$ rozwiązanie równania wariacyjnego startujące z warunków początkowych $x(0) = x_0, D(0) = D_0$. Z liniowości równania wariacyjnego wynika, że $\psi(t, x_0, D_0) = \psi(t, x_0, I)D_0$.

Opiszemy najpierw, jak obliczyć $\psi(t, x_0, I)$ przy założeniu, że $x_0 \in \mathbf{x}_0$. Równanie (2.45b) całkujemy za pomocą ścisłej wersji metody Taylora rzędu *n*. Oznaczmy $D(t) = \psi(t, x_0, I)$. Używając rozwinięcia Taylora funkcji D(t) otrzymujemy

$$D_{i,j}(h) = D_{i,j}(0) + hD'_{i,j}(0) + \frac{h^2}{2}D''_{i,j}(0) + \dots + + \frac{h^n}{n!}D^{(n)}_{i,j}(0) + \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}D^{(n+1)}_{i,j}(\lambda_{i,j}h),$$
(2.47)

gdzie $\lambda_{i,j} \in [0, 1]$. Pierwsze n + 1 składników powyższego wzoru stanowi zwykłą metodę Taylora. W celu obliczenia tych składników musimy znaleźć pochodne do rzędu n zmiennych $D_{i,j}$ po czasie. Obliczenia dla układu Lorenza są przedstawione w podrozdziale 2.4. Pochodne obliczamy na wektorze przedziałowym \mathbf{x}_0 . Jeśli równanie różniczkowe rozwiązujemy metodą Lohnera dla metody Taylora rzędu n, to obliczenia pochodnej po zmiennej x metody numerycznej oraz pochodnych D po czasie można wykonać jednocześnie, co wynika z wzoru

$$\frac{\mathrm{d}^{k}D}{\mathrm{d}t^{k}} = \frac{\mathrm{d}^{k}}{\mathrm{d}t^{k}}\frac{\partial\varphi}{\partial x_{0}}(t,x_{0}) = \frac{\partial}{\partial x_{0}}\frac{\mathrm{d}^{k}\varphi}{\mathrm{d}t^{k}}(t,x_{0}) =
= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{d}^{k}\varphi}{\mathrm{d}t^{k}}(t,x_{0})\frac{\partial x}{\partial x_{0}} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\mathrm{d}^{k}x}{\mathrm{d}t^{k}}D.$$
(2.48)

2.3.1. Oszacowanie zgrubne

Ostatni składnik wzoru (2.47), będący błędem metody, musi być obliczony dla pewnego $\lambda_{i,j}$ z przedziału [0, 1], którego wartości nie znamy. W celu oszacowania błędu metody musimy znaleźć oszacowanie zgrubne rozwiązania równania wariacyjnego, tzn. macierz przedziałową **E** taką, że

$$\{\psi(t, x, I) \colon t \in [0, h], x \in \mathbf{x}\} \subset \mathbf{E}.$$
(2.49)

Stosujemy twierdzenie pozwalające na znajdowanie oszacowania zgrubnego do równania wariacyjnego i otrzymujemy następujący wniosek: **Wniosek 2.2.** Załóżmy, że y zawiera $\varphi([0,h], \mathbf{x})$. Niech Y będzie macierzą przedzialową spełniającą warunek

$$\mathbf{E} = I + [0, h] \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{y}) \mathbf{Y} \subset \mathbf{Y}.$$
(2.50)

Wówczas rozwiązanie równania wariacyjnego z warunkiem początkowym D(0,x) = Inie opuszcza zbioru \mathbf{E} dla $t \in [0,h]$, tzn. { $\psi(t,x,I): t \in [0,h], x \in \mathbf{x}$ } $\subset \mathbf{E}$.

Poszukiwanie macierzy \mathbf{E} przeprowadza się podobnie jak przy szukaniu oszacowania zgrubnego dla równania różniczkowego (porównaj podrozdział 2.2.1).

W celu oszacowania błędu metody oblicza się pochodną $D^{(n+1)}$ w punkcie D = Ina wektorze przedziałowym **y**, który zawiera rozwiązanie równania różniczkowego dla $t \in [0, h]$. Wynik mnoży się przez oszacowanie zgrubne **E** w celu znalezienia ścisłego oszacowania na błąd metody.

Opisaliśmy metodę obliczenia rozwiązania równania wariacyjnego po czasie h startującego z warunku początkowego I. Aby obliczyć rozwiązanie równania wariacyjnego po dowolnym czasie, stosujemy powyższą metodę dla każdego kroku czasowego i korzystamy z liniowości równania wariacyjnego. Startujemy z warunku początkowego $\mathbf{D}_0 = I$.

Przypuśćmy, że wektory przedziałowe \mathbf{x}_k , \mathbf{y}_k takie, że $\{\varphi(t_k, x_0) : x_0 \in \mathbf{x}_0\} \subset \mathbf{x}_k$, $\{\varphi(t, x_k) : t \in [0, h_k], x_k \in \mathbf{x}_k\} \subset \mathbf{y}_k$ zostały już znalezione.

Za pomocą metody opisanej powyżej obliczamy macierz \mathbf{C}_k zawierającą rozwiązanie równania wariacyjnego z warunkiem początkowym D(0) = I oraz $x(0) \in \mathbf{x}_k$. Z liniowości równania wariacyjnego wynika, że $\psi(h_k, x_k, D_k) = \psi(h_k, x_k, I)D_k$. Zatem jeśli \mathbf{D}_k zawiera rozwiązanie równania wariacyjnego dla chwili t_k , to macierz przedziałowa $\mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{C}_k \mathbf{D}_k$ zawiera rozwiązanie równania wariacyjnego dla chwili $t_{k+1} = t_k + h_k$. Z przedstawionej konstrukcji wynika, że macierze przedziałowe \mathbf{D}_k spełniają warunek { $\psi(t_k, x_0, I): x_0 \in \mathbf{x}_0$ } $\subset \mathbf{D}_k$.

2.3.2. Redukcja efektu pakowania

Do obliczenia macierzy \mathbf{D}_k niezbędne jest wykonanie k-1 operacji mnożenia macierzy przedziałowych. Aby zmniejszyć wpływ efektu pakowania, stosuje się technikę podobną jak w metodzie Lohnera.

Stosując reprezentację $\mathbf{D}_k = B_k \tilde{\mathbf{D}}_k$, gdzie B_k jest pewną macierzą nieosobliwą, otrzymujemy

$$\tilde{\mathbf{D}}_{k+1} = (B_{k+1}^{-1} \mathbf{C}_k B_k) \tilde{\mathbf{D}}_k.$$
(2.51)

W metodzie określanej symbolem PAR jako macierz B_{k+1} wybieramy środek macierzy $\mathbf{C}_k B_k$, i obliczamy B_{k+1}^{-1} w sposób ścisły. Metoda ta posiada podobne wady jak wersja PAR metody Lohnera.

W metodzie opartej na algorytmie QR rozkładu macierze wprowadzamy pomocniczo macierz $\tilde{B}_{k+1} = \text{Mid}(\mathbf{C}_k B_k)$. Rozkładamy tę macierz za pomocą algorytmu QR: $\tilde{B}_{k+1} = Q_{k+1} R_{k+1}$ i stawiamy $B_{k+1} = Q_{k+1}$ oraz $B_{k+1}^{-1} = Q_{k+1}^{\mathrm{T}}$. Nieco lepsze efekty uzyskuje się, stosując reprezentację $\mathbf{D}_k = \bar{D}_k + B_k \tilde{\mathbf{D}}_k$, gdzie \bar{D}_k jest macierzą punktową reprezentującą środek \mathbf{D}_k , zaś $\tilde{\mathbf{D}}_k$ jest macierzą przedziałową zbudowaną z przedziałów symetrycznych względem zera. Również w tym przypadku do wyboru macierzy B_k można użyć metod PAR i QR.

2.4. Obliczanie pochodnych

Na przykładzie układu Lorenza

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(x) = \begin{pmatrix} sx_2 - sx_1\\ rx_1 - x_2 - x_1x_3\\ x_1x_2 - qx_3 \end{pmatrix}$$
(2.52)

pokażemy jak można wyprowadzić wzory niezbędne do konstrukcji metod całkowania układów równań różniczkowych w sposób ścisły. Rozważymy metodę Taylora rzędu czwartego

$$\Phi(x,h) = x + hx'(t) + \frac{h^2}{2}x''(t) + \frac{h^3}{6}x^{(3)}(t) + \frac{h^4}{24}x^{(4)}(t).$$
 (2.53)

Rozpoczniemy od wyprowadzenia wzorów na $\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d} t^k}$ niezbędnych do konstrukcji metody Taylora.

2.4.1. Pochodne $\frac{d^k x}{dt^k}$

Pochodne $x^{(k)}$ można obliczyć za pomocą następujących wzorów.

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = f(x) = \begin{pmatrix} sx_2 - sx_1 \\ rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - qx_3 \end{pmatrix},$$
(2.54a)

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = \begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx_2' - sx_1' \\ rx_1' - x_2' - x_1'x_3 - x_1x_3' \\ x_1'x_2 + x_1x_2' - qx_3' \end{pmatrix}, \quad (2.54b)$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} = \begin{pmatrix} x_1^{(3)} \\ x_2^{(3)} \\ x_3^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx_2'' - sx_1'' \\ rx_1'' - x_2'' - x_1''x_3 - 2x_1'x_3' - x_1x_3'' \\ rx_1''x_2 + 2x_1'x_2' + x_1x_2'' - qx_3'' \end{pmatrix}, \quad (2.54c)$$

$$\frac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}t^4} = \begin{pmatrix} sx_2^{(3)} - sx_1^{(3)} \\ rx_1^{(3)} - x_2^{(3)} - x_1^{(3)}x_3 - 3x_1''x_3' - 3x_1'x_3'' - x_1x_3^{(3)} \\ x_1^{(3)}x_2 + 3x_1''x_2' + 3x_1'x_2'' + x_1x_2^{(3)} - qx_3^{(3)} \end{pmatrix}.$$
 (2.54d)

Wzory (2.54) pozwalają w sposób rekurencyjny obliczyć kolejne pochodne $x^{(k)}$. Można również wyprowadzić wzory na pochodną dowolnego rzędu wyrażoną wyłącznie za pomocą zmiennych x_k .

Przykładowo dla k = 1, 2 mamy

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sx_2 - sx_1 \\ rx_1 - x_2 - x_1x_3 \\ x_1x_2 - qx_3 \end{pmatrix},$$
(2.55a)
$$\begin{pmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (sr + s^2)x_1 + (-s - s^2)x_2 - sx_1x_3 \\ (-rs - r)x_1 + (rs + 1)x_2 + (1 + s + q)x_1x_3 - sx_2x_3 - x_1^2x_2 \\ q^2x_3 + rx_1^2 + sx_2^2 - (1 + s + q)x_1x_2 - x_1^2x_3 \end{pmatrix}.$$
(2.55b)

Widać, że złożoność wzorów rośnie bardzo znacznie wraz ze wzrostem k i operowanie takimi wzorami w programie komputerowym staje się bardzo niewygodne. Ponadto, ręczne wyprowadzanie wzorów może prowadzić do wielu pomyłek.

Kolejna możliwość to wyrażenie pochodnych rozwiązania za pomocą pochodnych cząstkowych funkcji f (porównaj [44]). Otrzymujemy w ten sposób nieco bardziej zwarte wzory rekurencyjne, które łatwiej można wprowadzić do programu komputerowego. Dla równania różniczkowego opisującego układ Lorenza (2.52) zachodzą następujące wzory

$$f'(x) \cdot h = \begin{pmatrix} -s & s & 0\\ r - x_3 & -1 & -x_1\\ x_2 & x_1 & -q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1\\ h_2\\ h_3 \end{pmatrix}, \qquad (2.56)$$

gdzie $x = (x_1, x_2, x_3)^{\mathrm{T}}$ oraz $h = (h_1, h_2, h_3)^{\mathrm{T}}$. Druga pochodna f''(x)nie zależy od x

$$f''(x) \cdot (h_1, h_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ -h_{11}h_{32} - h_{31}h_{12} \\ h_{11}h_{22} + h_{21}h_{12} \end{pmatrix}, \qquad (2.57)$$

gdzie $h_1 = (h_{11}, h_{21}, h_{31})^{\mathrm{T}}$ oraz $h_2 = (h_{12}, h_{22}, h_{32})^{\mathrm{T}}$. Ponieważ lewa strona równania (1.46) nie zawiera elementów rzędu wyższego niż dwa, to jest oczywiste, że $f^{(k)} \equiv 0$ dla k > 2. Wzory na $x^{(k)}$ otrzymuje się w sposób rekurencyjny

$$x'(t) = f(x(t)) = f,$$
 (2.58a)

$$x''(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f(x(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = f'f, \qquad (2.58\mathrm{b})$$

$$x^{(3)}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f'(x(t))f(x(t))) = f''ff + f'f'f, \qquad (2.58c)$$

$$x^{(4)}(t) = 3f''f'ff + f'f''ff + f'f'ff, \qquad (2.58d)$$

$$x^{(5)}(t) = 4f''ff''ff + 4f''f'ff + 3f''f'ff' + + 3f'f''ff'f + f'f'ff + f'f'ff' + f'f'ff' + (2.58e)$$

Wzór na $\boldsymbol{x}(t+h)$ dla przypadku metody czwartego rzędu ma postać

$$\Phi(x,h) = x + hf + \frac{h^2}{2}f'f + \frac{h^3}{6}(f''ff + f'f'f) + \frac{h^4}{24}(3f''f'ff + f'f'ff + f'f'ff).$$
(2.59)

Wyrażenie powyższe należy obliczyć na wektorze przedziałowym ${\bf x}.$

W wersji przedziałowej metody Taylora należy dodatkowo uwzględnić błąd wprowadzony przez opuszczenie wyrazów wyższych rzędów

$$e(x,h) = \frac{h^5}{120} (4f''ff''ff + 4f''f'ff + 3f''f'ff'f + 3f''f'ff'f + 3f''f'ff'f),$$
(2.60)

gdzie tym razem wyrażenie jest wyznaczone na oszacowaniu zgrubnym y zawierającym trajektorie startujące z \mathbf{x} w czasie [0, h].

2.4.2. Pochodne $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d} t^k} \right)$

W celu zastosowania metody Lohnera niezbędne jest obliczenie pochodnej metody Taylora

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = I + h \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \right) + \frac{h^3}{6} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}t^3} \right) + \\
+ \frac{h^4}{24} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathrm{d}^4 x}{\mathrm{d}t^4} \right).$$
(2.61)

Wyrażenia występujące w równaniu (2.61)można obliczyć, różniczkując względem x równania (2.55). Dla k = 1, 2 otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \right) = \begin{pmatrix} -s & s & 0\\ r - x_3 & -1 & -x_1\\ x_2 & x_1 & -q \end{pmatrix}, \qquad (2.62a)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \right) = \begin{pmatrix} sr + s^2 - sx_3 & -s - s^2 & -sx_1 \\ -rs - r - tx_3 - 2x_1x_2 & rs + 1 - sx_3 - x_1^2 & -tx_1 - sx_2 \\ 2rx_1 + tx_2 - 2x_1x_3 & 2sx_2 + tx_1 & q^2 - x_1^2 \end{pmatrix}.$$
(2.62b)

gdzie t = -(1 + s + q)jest śladem macierzy Jacobiego. Kolejna możliwość jest oparta na związku pochodnych $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d} t^k}\right)$ z pochodnymi po czasie rozwiązania równania wariacyjnego (porównaj wzór (2.48) oraz następny podrozdział).

2.4.3. Pochodne $\frac{\mathrm{d}^k D}{\mathrm{d}t^k}$

Aby przeprowadzić całkowanie równania wariacyjnego

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t)) \cdot D, \qquad (2.63)$$

należy obliczyć pochodne $D^{(k)}.$ Dla układu Lorenza macierz Jacobiego prawej strony równania różniczkowego jest równa

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t)) = \begin{pmatrix} -s & s & 0\\ r - x_3 & -1 & -x_1\\ x_2 & x_1 & -q \end{pmatrix}.$$
 (2.64)

Używając równania wariacyjnego możemy wyprowadzić w sposób rekurencyjny wzory na pochodne $D^{(k)}$ w punkcie D dla x = x(t). Przykładowo

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}(x) \cdot D, \qquad (2.65a)$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x) \cdot D \right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot D + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t}, \qquad (2.65b)$$

$$\frac{d^{3}D}{dt^{3}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot D + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dD}{dt} \right) = \\
= \frac{d^{2}}{dt^{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot D + 2 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{dD}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d^{2}D}{dt^{2}}, \quad (2.65c) \\
\frac{d^{4}D}{dt^{4}} = \frac{d^{3}}{dt^{3}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot D + 3 \cdot \frac{d^{2}}{dt^{2}} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{dD}{dt} + \\
+ 3 \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \frac{d^{2}D}{dt^{2}} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{d^{3}D}{dt^{3}}.$$
(2.65c)

W powyższych wzorach pojawia się macierz Jacobiego (2.64) prawej strony równania różniczkowego i jej pochodne po czasie. Są one równe

$$\frac{\mathrm{d}^{k}}{\mathrm{d}t^{k}} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ -x_{3}^{(k)} & 0 & -x_{1}^{(k)}\\ x_{2}^{(k)} & x_{1}^{(k)} & 0 \end{pmatrix}.$$
 (2.66)

Pochodne $x^{(k)}$ znajdujemy rekurencyjnie za pomocą równa
ń (2.54).

Istnieje również możliwość wyrażenia pochodnych $D^{(k)}$ wyłącznie za pomocą zmiennych x i D.

Przykładowo

$$\frac{\mathrm{d}D}{\mathrm{d}t} = \begin{pmatrix} -s & s & 0\\ r - x_3 & -1 & -x_1\\ x_2 & x_1 & -q \end{pmatrix} \cdot D,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 D}{\mathrm{d}t^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ -x'_3 & 0 & -x'_1\\ x'_2 & x'_1 & 0 \end{pmatrix} D + \begin{pmatrix} -s & s & 0\\ r - x_3 & -1 & -x_1\\ x_2 & x_1 & -q \end{pmatrix}^2 D =$$

$$= \begin{pmatrix} sr + s^2 - sx_3 & -s - s^2 & -sx_1\\ -rs - r - tx_3 - 2x_1x_2 & rs + 1 - 1sx_3 - x_1^2 & -tx_1 - sx_2\\ 2rx_1 + tx_2 - 2x_1x_3 & 2sx_2 + tx_1 & q^2 - x_1^2 \end{pmatrix} D.$$
(2.67a)
$$(2.67b)$$

Zauważmy, że równania (2.67) oraz (2.62) różnią się jedynie czynnikiem D (porównaj również wzór (2.48)). Można zatem do obliczania pochodnych $D^{(k)}$ wykorzystać wzory na $\frac{\partial}{\partial x} (\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d} t^k})$.

2.4.4. Automatyczne różniczkowanie

Wcześniej przedstawiliśmy wyprowadzenie wzorów niezbędnych do zastosowania ścisłej metody Taylora, metody Lohnera, oraz ścisłego całkowania równania wariacyjnego. Widać, że ręczne wyprowadzanie wzorów jest dość uciążliwe i może prowadzić do pomyłek. Aby tego uniknąć, można użyć tzw. automatycznego różniczkowania.

W niniejszej pracy opisane są wyniki obliczeń, w których do wyznaczania pochodnych $\frac{d^k x}{dt^k}$, $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d^k x}{dt^k} \right)$ oraz $\frac{d^k D}{dt^k}$ użyto procedur automatycznego różniczkowania z pakietów TADIFF oraz FADBAB [6, 5]. Jedynym wzorem, który należy wprowadzić ręcznie do programu komputerowego, jest definicją prawej strony równania różniczkowego. Pochodne dowolnego rzędu rozwiązania po czasie są obliczane automatycznie za pomocą pakietu TADIFF. Podobnie jeśli podamy definicję równania wariacyjnego, to pochodne $\frac{d^k D}{dt^k}$ można obliczać automatycznie. Jeśli wykorzystamy pakiet FADBAB, to nie ma nawet konieczności wprowadza-

Jeśli wykorzystamy pakiet FADBAB, to nie ma nawet konieczności wprowadzania równania wariacyjnego do programu. Prawą stronę równania wariacyjnego oraz pochodne $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\mathrm{d}^k x}{\mathrm{d} t^k} \right)$ można również obliczyć automatycznie.

2.5. Obliczanie wartości odwzorowania powrotu

Metoda odwzorowania Poincarégo jest bardzo często stosowana podczas analizy ciągłych układów dynamicznych. W niniejszej pracy jest wykorzystywana w dowodach istnienia orbit okresowych, czy też dynamiki symbolicznej. Jeśli potrafimy obliczać trajektorię układu, to wyznaczenie obrazu danego wektora przedziałowego przez odwzorowanie Poincarégo jest zagadnieniem stosunkowo prostym.

Załóżmy, że uogólnione odwzorowanie Poincarégo jest zdefiniowane przez zbiór Σ (sumę mnogościową hiperpłaszczyzn Σ_i). Aby obliczyć obraz wektora przedziałowego

 $\mathbf{x}_0 \subset \Sigma$ przez odwzorowanie Poincarégo należy obliczać trajektorię układu, sprawdzając równocześnie warunek przecięcia ze zbiorem Σ . Podobnie jak poprzednio przez $\tau(x_0)$ oznaczmy czas powrotu trajektorii startującej z x_0 do zbioru Σ . Przypuśćmy, że dla każdego $x_0 \in \mathbf{x}_0$ pierwsze przecięcie trajektorii startującej z x_0 ze zbiorem Σ należy do hiperpłaszczyzny Σ_k , tzn. $P(x_0) = \varphi(\tau(x_0), x_0) \in \Sigma_k$. W celu obliczenia obrazu \mathbf{x}_0 przez odwzorowanie Poincarégo znajdujemy trajektorię układu za pomocą jednej z metod opisanych wcześniej. Po wyznaczeniu $0 < s_1 < s_2$ takich, że zbiory $\{\varphi(s_1, x_0): x_0 \in \mathbf{x}_0\}$ i $\{\varphi(s_2, x_0): x_0 \in \mathbf{x}_0\}$ leżą po przeciwnych stronach płaszczyzny Σ_k , należy znaleźć zbiór \mathbf{y}

$$\{\varphi(t, x_0) : t \in [s_1, s_2], x_0 \in \mathbf{x}_0\} \subset \mathbf{y}.$$
 (2.68)

Obraz zbioru \mathbf{x}_0 przez odwzorowanie Poincarégo jest zawarty w przecięciu \mathbf{y} z płaszczyzną Σ_k .

Aby mieć pewność, że trajektoria po raz pierwszy powróciła do zbioru Σ dla $t > s_1$, należy dodatkowo sprawdzać warunek { $\varphi(t, x_0) : x_0 \in \mathbf{x}_0$ } $\cap \Sigma = \emptyset$ dla $t \in (0, s_1]$. Można w tym celu wykorzystać oszacowania zgrubne \mathbf{y}_k znalezione w procesie całkowania równania różniczkowego. Ponieważ $\mathbf{x}_0 \subset \Sigma$ to oszacowanie zgrubne \mathbf{y}_0 ma niepuste przecięcie z Σ . W tym przypadku wystarczy jednak sprawdzić, że pole wektorowe jest transwersalne do Σ na zbiorze \mathbf{y}_0 . Dodatkowo w celu stwierdzenia, że w momencie powrotu do płaszczyzny Σ przecięcie również jest transwersalne, należy sprawdzić, czy pole wektorowe jest transwersalne do Σ na zbiorze \mathbf{y}_0 .

Obraz obliczony w sposób przedstawiony powyżej może być znacznie przeszacowany, jeśli używamy stałego kroku całkowania. Problemy pojawiają się zwłaszcza w przypadku, gdy krok całkowania jest duży, zbiory \mathbf{x}_k małe, i gdy pole wektorowe w obszarze przecięcia nie jest prostopadłe do płaszczyzny Σ_k . Najprostszą metodą zmniejszenia wielkości znalezionego obrazu jest dopuszczenie modyfikacji kroku całkowania. Dzięki temu możemy uzyskać znaczne zmniejszenie różnicy $s_2 - s_1$, a zatem poprawę dokładności wyznaczonego obrazu. W praktyce do szukania optymalnych wartości s_1, s_2 stosuje się metodę bisekcji. Po znalezieniu t_k takiego, że $\varphi(t_{k+1}, \mathbf{x}_0)$ nie leży (w całości) po tej samej stronie płaszczyzny Σ_k co $\varphi(t_k, \mathbf{x}_0)$, cofamy się o h_k i zmniejszamy dwukrotnie krok całkowania. Dopuszczając konkretną liczbę podziałów kroku całkowania możemy znaleźć s_1 dowolnie bliskie optymalnej wartości. Podobnie postępujemy podczas szukania optymalnej wartości s_2 .

Aby obliczyć pochodną odwzorowania Poincarégo, należy oprócz obliczania trajektorii układu całkować również równanie wariacyjne. Pochodną można wyznaczyć na podstawie Twierdzenia 1.5.

2.6. Układy odcinkami liniowe

W przypadku układów odcinkami liniowych (lub ogólnie odcinkami gładkich) prawa strona równania różniczkowego nie jest funkcją gładką i nie mamy możliwości bezpośredniego zastosowania metod opisanych wcześniej. Trajektorię układu można obliczyć za pomocą sklejania trajektorii układów gładkich. Podczas obliczania trajektorii musimy sprawdzać warunek pozostawania w obszarze, w którym prawa strona jest funkcją gładką. W przypadku dojścia do granicy obszaru należy znaleźć zbiór zawierający przecięcie trajektorii z granicą obszarów i zbiór ten potraktować jako warunek początkowy problemu Cauchy'ego w następnym obszarze.

Będziemy rozważać ciągłe układy dynamiczne z prawą stroną ciągłą, odcinkami liniową. Załóżmy, że dla rozważanego układu obszary liniowe U_1, U_2, \ldots są oddzielone hiperpłaszczyznami $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots$

2.6.1. Obliczanie trajektorii

Do wyznaczenia trajektorii w danym obszarze liniowym można zastosować jedną z metod przedstawionych poprzednio. Dodatkowo istnieje możliwość zastosowania wzorów analitycznych na rozwiązanie układu liniowego. Dla liniowego równania różniczkowego

$$\dot{x} = A(x - p) \tag{2.69}$$

rozwiązanie ma postać

$$\varphi(t, x_0) = e^{At}(x_0 - p) + p. \tag{2.70}$$

Niech \mathbf{x}_0 będzie wektorem przedziałowym. Przypuśćmy, że dla $t \in (0, s)$ oraz $x_0 \in \mathbf{x}_0$ punkt $\varphi(t, x_0)$ należy do obszaru liniowego U_k , w którym równanie stanu ma postać (2.69). Wybierzmy przedział $\mathbf{t} = [t_1, t_2]$, taki że $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq s$ oraz oznaczmy przez $\mathbf{x}(\mathbf{t}, \mathbf{x}_0)$ wektor przedziałowy otrzymany w wyniku obliczenia

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}, \mathbf{x}_0) = e^{A\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0 - p) + p.$$
(2.71)

Jest oczywiste, że $\{\varphi(t, x_0) : t \in \mathbf{t}, x_0 \in \mathbf{x}_0\} \subset \mathbf{x}(\mathbf{t}, \mathbf{x}_0)$. W celu wyznaczenia trajektorii układu wybieramy chwile $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots$ i obliczamy $\mathbf{x}(t_i, \mathbf{x}_0)$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Równocześnie sprawdzamy warunek $\mathbf{x}([t_{i-1}, t_i], \mathbf{x}_0) \subset U_k$, aby mieć pewność, że trajektoria nie opuściła obszaru liniowego U_k .

W przypadku stwierdzenia, że trajektoria opuszcza obszar liniowy, należy obliczyć przecięcie trajektorii z brzegiem obszaru liniowego. W tym celu najpierw znajdujemy możliwie dużą wartość s_1 , taką że $\varphi(t, x_0) \notin \Sigma$ dla każdego $x_0 \in \mathbf{x}_0$ i $0 < t \leq s_1$. To zapewnia, że trajektorie startujące z \mathbf{x} pozostają wewnątrz jednego obszaru liniowego dla $t \leq s_1$. Następnie znajdujemy możliwie małe $s_2 > s_1$, takie że dla $x_0 \in \mathbf{x}_0$ punkt $\varphi(s_2, x_0)$ należy do innego obszaru liniowego. Wynika stąd, że przecięcie każdej trajektorii startującej w \mathbf{x}_0 ze zbiorem Σ następuje dla $t < s_2$, czyli że czas powrotu do Σ dla punktów z \mathbf{x}_0 należy do $[s_1, s_2]$. Przedział $\mathbf{t} = [s_1, s_2]$ powinien mieć możliwie małą średnicę. Optymalizację przeprowadzamy metodą bisekcji. Ostatecznie używamy rozwiązania analitycznego w celu obliczenia $\varphi(\mathbf{t}, \mathbf{x}_0)$. Znajdujemy w ten sposób wektor przedziałowy

$$\mathbf{x}(\mathbf{t}, \mathbf{x}_0) = e^{A\mathbf{t}}(\mathbf{x}_0 - p) + p.$$
(2.72)

Ponieważ wszystkie obliczenia są wykonywane w arytmetyce przedziałowej, to

$$\{\varphi(\tau(x_0), x_0) \colon x_0 \in \mathbf{x}_0\} \subset \mathbf{x}(\mathbf{t}, \mathbf{x}_0).$$

Po wyznaczeniu przecięcia trajektorii z granicą obszaru U_k

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{t}, \mathbf{x}_0) \cap \Sigma,$$

rozpoczynamy obliczenia dla kolejnego obszaru liniowego. Szczegóły można znaleźć w pracy [31]. Zauważmy, że w ten sposób obliczyliśmy obraz \mathbf{x}_0 przez uogólnione odwzorowanie Poincarégo P zdefiniowane przez zbiór Σ , tzn. $P(\mathbf{x}_0) \subset \mathbf{y}$.

Macierz Jacobiego odw
zorowania P w punkcie $x_0 \in \Sigma$ może być obliczona na podstawie Twierdzenia 1.5. Dla układu liniowego rozwiązanie równania wariacyjnego jest równ
e $D(t) = e^{At}$. Otrzymujemy zatem

$$P'(x_0) = \left(I - \frac{A(y-p)h^{\rm T}}{h^{\rm T}A(y-p)}\right)e^{At},$$
(2.73)

gdzie $t = \tau(x_0)$ jest czasem powrotu, $y = P(x_0)$ zaś h jest wektorem prostopadłym do Σ w punkcie $P(x_0)$. Powyższy wzór jest prawdziwy przy założeniu, że trajektoria $\varphi(t, x_0)$ przecina Σ transwersalnie w punktach x_0 i y.

Macierz Jacobiego dla $x_0 \in \mathbf{x}_0$ jest obliczana za pomocą wzoru

$$\mathbf{J} = \left(I - \frac{A(\mathbf{y} - p)h^{\mathrm{T}}}{h^{\mathrm{T}}A(\mathbf{y} - p)}\right)e^{A\mathbf{t}},\tag{2.74}$$

gdzie podstawiamy wielkości przedziałowe \mathbf{y} , \mathbf{t} znalezione podczas obliczania $P(\mathbf{x}_0)$. Przykład obliczeń zostanie przedstawiony w podrozdziale 2.9.

2.7. Przykłady obliczania trajektorii układów dyskretnych

Na przykładzie odwzorowań Hénona i Ikedy przeprowadzimy porównanie opisanych wcześniej metod obliczania trajektorii układów dyskretnych.

2.7.1. Odwzorowanie Hénona

Jako pierwszy przykład rozważmy odwzorowanie Hénona (1.31).

W tabeli 2.1 przedstawiono wyniki obliczeń trajektorii punktu (0,0) dla odwzorowania Hénona przy użyciu różnych metod. W tabeli podano numer iteracji k, w której przerwano obliczenia, oraz średnicę $\text{Diam}(\mathbf{x}_k)$ zbioru zawierającego obraz kostki początkowej po czasie k. Metoda IV to bezpośrednie obliczenie kolejnych iteracji odwzorowania w arytmetyce przedziałowej według wzoru (2.1). Metody MVF i MVFN wykorzystują twierdzenie o wartości średniej (wzory (2.6) oraz (2.7)). Pozostałe metody to różne reprezentacje zbioru \mathbf{x}_k przy obliczaniu trajektorii (porównaj podrozdz. 2.1.3).

Okazuje się, że w przypadku odwzorowania Hénona metoda IV daje lepsze wyniki niż metoda MVF oparta na twierdzeniu o wartości średniej. W pewnym sensie odwzorowanie Hénona jest wyjątkowe. W przypadku innych rozważanych odwzorowań metoda IV jest gorsza niż pozostałe metody.

	$\mathbf{x}_0 = (0,0)$		$\mathbf{x}_0 = (0.000_0^1, 0.000_0^1)$	
Metoda	k	$\operatorname{Diam}(\mathbf{x}_k)$	k	$\operatorname{Diam}(\mathbf{x}_k)$
IV	67	3.05	18	4.11
MVF	66	9.46	16	6.43
MVFN	67	3.05	19	11.28
MVF IV	66	6.00	16	6.43
MVF PAR	11	41.86	6	10.00
MVF QR	81	8.36	18	3.76
MVF QRS	81	8.36	19	8.44
MVF IE	81	9.94	19	5.58

 Tabela 2.1

 Wyniki obliczeń trajektorii odwzorowania Hénona

Wyjątkowość odwzorowania Hénona wynika z faktu, że jedyną nieliniowością w odwzorowaniu Hénona jest podnoszenie do kwadratu zmiennej x_1 , oraz że każda zmienna występuje co najwyżej raz we wzorach, z których korzystamy podczas obliczenia $h(x_1, x_2)$. Jeśli używamy optymalnej metody wyznaczania x^2 , to obliczenia w arytmetyce przedziałowej dają nam najmniejszy wektor przedziałowy zawierający $h(\mathbf{x})$. Przy obliczaniu pojedynczej iteracji nie występuje efekt pakowania.



Rys. 2.2. Trajektoria punktu(0,0)dla od
wzorowania Hénona

Metody oparte na zmianie reprezentacji zbioru \mathbf{x}_k dają całkowicie różne wyniki. Metoda PAR przestaje działać po niewielkiej liczbie iteracji. Daje ona dobre oszacowania w przypadku rozwiązań oscylacyjnych.

Dla odwzorowania liniowego, na przykładzie którego przedstawialiśmy efekt pakowania, metoda ta przewyższa pozostałe metody. Jednak w większości przypadków przestaje ona działać na skutek konieczności odwracania macierzy B_{k+1} , która zwykle staje się źle uwarunkowana przy większym czasie obliczeń. Tak jest dla wszystkich układów liniowych, dla których wartości własne mają różne części rzeczywiste.

Metoda QR zdecydowanie przewyższa pozostałe metody. Przy jej użyciu możliwe jest obliczenie 80 iteracji odwzorowania Hénona. W przypadku przedziału startowego o zerowej średnicy stosowanie metody IE nie ma sensu. Zwiększona ilość obliczeń daje nieznaczne pogorszenie wyników w porównaniu z metodą QR. Obliczone trajektorie zostały przedstawione na rysunku 2.2.

W tabeli 2.1 zostały również zebrane wyniki obliczeń dla zbioru warunków początkowych $\mathbf{x}_0 = (0.000_0^1, 0.000_0^1)$. Z przedstawionych wyników można wysnuć podobne wnioski jak poprzednio. Metoda IV jest lepsza od metody MVF. Również w tym przypadku metoda PAR działa bardzo źle. Istotne różnice dotyczą metod najlepszych. Tym razem wersja QR z sortowaniem jest lepsza niż wersja QR. Metoda IE, w której przedział początkowy jest traktowany niezależnie od błędów powstałych w trakcie obliczeń, działa najlepiej. Mimo iż zbiór początkowy jest wektorem przedziałowym o stosunkowo małej średnicy, to nawet w przypadku najlepszej metody udaje się obliczyć nie więcej niż 20 iteracji odwzorowania. Zwiększenie liczby iteracji przy ustalonej średnicy zbioru \mathbf{x}_k można uzyskać dzięki zastosowaniu uogólnionej metody bisekcji.

2.7.2. Odwzorowanie Ikedy

W tabeli 2.2 porównane zostały różne metody obliczania trajektorii odwzorowania Ikedy dla warunków początkowych $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ oraz $\mathbf{x}_0 = (0.000_0^1, 0.000_0^1)$.

Tabela 2.2

Wyniki obliczeń trajektorii odw
zorowania Ikedy dla punktu $\mathbf{x}_0 = (0,0)$ oraz zbior
u $\mathbf{x}_0 = (0.000_0^1, 0.000_0^1), k$ jest numerem iteracji, w której przerwano obliczenia, Diam
(\mathbf{x}_k) jest średnicą zbioru zawierającego trajektorię po czasie k

Metoda	$\mathbf{x}_0 = (0,0)$		$\mathbf{x}_0 = (0.000^1_0, 0.000^1_0)$	
	k	$\operatorname{Diam}(\mathbf{x}_k)$	k	$\operatorname{Diam}(\mathbf{x}_k)$
IV	31	6.06	10	3.93
MVF	47	120.57	11	14.04
MVFN	31	6.06	14	35.42
MVF IV	47	79.00	11	14.04
MVF PAR	15	> 1000.00	8	> 1000.00
MVF QR	55	214.69	13	16.38
MVF QRS	55	264.22	13	16.38
MVF IE	55	17.65	14	93.89

Widać, że metoda IV obliczania obrazu za pomocą arytmetyki przedziałowej bez wykorzystania twierdzenia o wartości średniej daje znacznie gorsze rezultaty niż metoda MVF. Podobnie jak dla odwzorowania Hénona najlepsze wyniki daje metoda IE. Dla niezdegenerowanego zbioru warunków początkowych metoda MVFN jest nieznacznie lepsza. Przy małej liczbie iteracji efekt pakowania związany z obliczaniem iloczynu macierzy przedziałowych we wzorze (2.7) nie ma dużego wpływu. Obliczone trajektorie dla $\mathbf{x}_0 = (0.000_0^1, 0.000_0^1)$ zostały pokazane na rysunku 2.3.



Rys. 2.3. Trajektoria kostki $[0, 0.0001] \times [0, 0.0001]$ dla odw
zorowania Ikedy

2.8. Przykłady obliczania trajektorii układów ciągłych

Porównamy obecnie wybrane metody obliczania trajektorii układów ciągłych. W obliczeniach użyte zostały zmodyfikowane wersje procedur do arytmetyki przedziałowej pochodzących z pakietów Bias i Profil [69]. Do obliczania pochodnych użyto procedur automatycznego różniczkowania z pakietów TADIFF oraz FADBAB [6, 5].

Zaczniemy od ciągłego układu dynamicznego na płaszczyźnie.
2.8.1. Zaburzony układ liniowy

Jako pierwszy przykład rozważmy zaburzenie układu liniowego drugiego rzędu

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + c_{11}x_1^2 + c_{12}x_2^2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + d_2x_1x_2 \end{pmatrix}$$
(2.75)

z następującymi wartościami parametrów: $a_{11} = 0.1$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = -0.05$, $c_{11} = 0.07$, $c_{12} = -0.05$, $d_2 = 0.04$. Jest to zaburzony układ liniowy, który w przybliżeniu opisuje obrót wokół początku układu. Dla takiego układu spodziewamy się, że metoda Lohnera w wersji PAR powinna dawać dobre wyniki.

Obliczono trajektorię dla warunków początkowych $\mathbf{x}_0 = [0.48, 0.52] \times [-0.02, 0.02]$. W obliczeniach używano metodę Taylora czwartego rzędu i stosowano krok całkowania $\tau = 0.1$. Trajektorię obliczano do momentu, gdy osiągnięto czas całkowania równy t = 50 lub gdy kolejny zbiór \mathbf{x}_{k+1} zawierał zbiór \mathbf{x}_k . Warunek $\mathbf{x}_k \subset \mathbf{x}_{k+1}$ jest wygodnym kryterium stopu przy obliczaniu trajektorii układu, a zwłaszcza przy obliczaniu odwzorowania Poincarégo. Jeśli warunek ten jest spełniony, to kolejne iteracje będą zawierały iteracje poprzednie i nie ma szansy, aby w którymś z kolejnych kroków stwierdzono przejście całego zbioru \mathbf{x}_k poza hiperpłaszczyznę definiującą odwzorowanie Poincarégo. Kontynuacja obliczeń nie ma zatem sensu i należy wybrać mniejszy zbiór startowy lub zmienić krok całkowania.

Tabela 2.3

Wyniki obliczeń trajektorii zaburzonego układu liniowego, t jest czasem, w którym przerwano obliczenia, Diam (\mathbf{x}_k) jest średnicą zbioru zawierającego obraz kostki początkowej po czasie t

Metoda	t	$\operatorname{Diam}(\mathbf{x}_k)$
Taylor	2.9	1.0994
LogNorm EUCL	24.1	3.2765
LogNorm MAX	2.5	0.7881
LogNorm SUM	2.1	0.9587
Lohner IV	3.5	1.2653
Lohner PAR	50.0	0.9519
Lohner QR	33.3	2.7383
Lohner QRS	33.3	2.7383
Lohner IE	50.0	1.0816

Przeprowadzono obliczenia za pomocą metody Taylora, przy użyciu metod opartych na normach logarytmicznych (wersja EUCL dla normy euklidesowej, MAX dla normy $|| \cdot ||_{\infty}$ oraz SUM dla normy $|| \cdot ||_1$) oraz wykorzystując różne wersje metody Lohnera (IV, PAR, QR, QRS oraz IE). Wyniki obliczeń zebrano w tabeli 2.3 oraz przedstawiono na rysunku 2.4.

Widać, że najlepsze wyniki są osiągane przy użyciu metody PAR. Metoda QR jest znacznie gorsza. Proces ortogonalizacji powoduje przeszacowanie zbioru reprezentowanego. Metoda IE daje prawie tak dobre wyniki jak metoda PAR, choć jest oparta na wersji QR. Jest to efektem użycia niezależnej reprezentacji dla zbioru startowego.



Rys. 2.4. Trajektoria zaburzonego układu liniowego dla zbioru warunków początkowych $\mathbf{x}_0 = [0.48, 0.52] \times [-0.02, 0.02]$ obliczona przy użyciu różnych metod

Metoda Taylora przestaje działać już po czasie t = 3. Niewiele lepsza jest metoda Lohnera w wersji IV. Reprezentacja wyniku w postaci wektora przedziałowego prowadzi do bardzo znacznych przeszacowań i silnego wpływu efektu pakowania.

Z metod opartych na normach logarytmicznych zadowalające wyniki daje jedynie wersja używająca normy euklidesowej. Gdyby układ opisywał czysty obrót ($a_{11} = 0$, $a_{12} = 1$, $a_{21} = -1$, $a_{22} = 0$), to metoda ta dawałaby wyniki optymalne. Z powodu niezerowych wartości współczynników odpowiedzialnych za ściskanie i rozciąganie norma euklidesowa powoduje nieznaczne przeszacowanie prawdziwego wzrostu kuli przy przesunięciu o krok czasowy. Normy MAX i SUM nie potrafią poprawnie oszacować zmiany wielkości zbioru. Uzyskane wyniki są gorsze niż dla metody Taylora. Na rysunku 2.5 przedstawiono obliczone trajektorie na płaszczyźnie (x_1, x_2) dla metody Taylora i wersji PAR metody Lohnera.



Rys. 2.5. Trajektoria zaburzonego układu liniowego dla zbioru $[0.48, 0.52] \times [-0.02, 0.02]$ obliczona metodą: a) Taylora; b) Lohnera w wersji PAR

2.8.2. Układ Lorenza

Dla układu Lorenza obliczono trajektorię kwadratu [0, 0.001] × [2, 2.001] × [27, 27], co odpowiada obliczaniu odwzorowania Poincarégo dla wyboru płaszczyzny transwersalnej, tak jak w późniejszej części pracy. Używano kroku całkowania $\tau = 0.01$. Wyniki obliczeń przedstawiono w tabeli 2.4 oraz na rysunku 2.6. Widać znaczne różnice w porównaniu z zaburzonym układem liniowym. Metoda PAR, która przedtem była najlepsza, teraz daje wyniki tylko niewiele lepsze od metody Taylora.

Tabela 2.4

Wyniki obliczeń trajektorii układu Lorenza; t jest czasem, w którym przerwano obliczenia, Diam (\mathbf{x}_k) jest średnicą zbioru zawierającego obraz kostki początkowej po czasie t

Metoda	t	$\operatorname{Diam}(\mathbf{x}_k)$
Taylor	0.29	4.73
LogNorm EUCL	1.05	5.12
LogNorm MAX	0.54	9.88
LogNorm SUM	0.57	15.63
Lohner IV	1.15	10.06
Lohner PAR	0.39	35.26
Lohner QR	1.69	24.92
Lohner QRS	1.70	21.64
Lohner IE	1.69	19.52





Rys. 2.6. Trajektoria układu Lorenza dla zbioru $\mathbf{x}_0 = [0, 0.001] \times [2, 2.001] \times [27, 27]$ obliczona przy użyciu wybranych metod

Obliczenie obrazu początkowej kostki przez odw
zorowanie Poincarégo (przecięcie z płaszczyzną $x_3 = 27, x'_3 < 0$) jest możliwe tylko przy użyciu metody Lohnera lub metody EUCL. Przy metodzie Taylora nawet start z punktu nie pozwala na obliczenie obrazu przez odw
zorowanie Poincarégo. Obliczenie obrazu kostki przez odw
zorowanie Poincarégo przy zastosowaniu innych metod jest możliwe tylko pod warunkiem, że kostka jest bardzo mała, a krok całkowania krótki.

2.8.3. Układ elektroniczny z gładką nieliniowością

Dla układu elektronicznego opisanego równaniem (1.39) przeprowadzono obliczenia trajektorii dla zbioru początkowego $[-2.301, -2.3] \times [-0.141, -0.14] \times [1.23, 1.231]$ przy użyciu kroku czasowego $\tau = 0.1$. Wyniki przedstawiono na rysunku 2.7 oraz w tabeli 2.5.



Rys. 2.7. Trajektoria układu elektronicznego z gładką nieliniowością dla zbioru warunków początkowych $\mathbf{x}_0 = [-2.301, -2.3] \times [-0.141, -0.14] \times [1.23, 1.231]$

Z podanych wyników jednoznacznie widać zalety metody Lohnera w wersji IE. Pozwala ona na całkowanie układu w czasie ponaddwukrotnie dłuższym niż pozostałe wersje.

Tabela 2.5

Wyniki obliczeń trajektorii układu elektronicznego z gładką nieliniowością, t jest czasem, w którym przerwano obliczenia, $\text{Diam}(\mathbf{x}_k)$ jest średnicą zbioru zawierającego obraz kostki początkowej po czasie t

Metoda	t	$Diam(\mathbf{x}_k)$
Taylor	3.6	2.2498
LogNorm EUCL	12.3	0.3611
LogNorm MAX	10.7	0.2911
LogNorm SUM	2.6	10.0664
Lohner IV	22.7	10.7052
Lohner PAR	19.9	30.0860
Lohner QR	76.4	21.6187
Lohner QRS	77.6	21.5453
Lohner IE	172.1	10.6968

Szczególnie ciekawe jest porównanie z wersją QRS. Okazuje się, że potraktowanie propagacji błędów pochodzących od niezerowej szerokości startowego wektora przedziałowego decyduje o przewadze tej metody. Metoda Taylora prawie natychmiast przestaje działać (czas całkowania ponad 40–krotnie krótszy niż przy użyciu metody IE). W przypadku tego układu dynamicznego efekt pakowania objawia się szczególnie silnie. Metoda wykorzystująca normy logarytmiczne w wersji MAX daje wyniki porównywalne z metodą EUCL, podczas gdy wersja SUM działa gorzej niż metoda Taylora.

2.9. Przykład obliczania trajektorii układu odcinkami liniowego

Rozważmy obwód Chuy opisany równaniem (1.36). Jest to układ równań różniczkowych z prawą stroną odcinkami liniową. Przestrzeń stanów \mathbb{R}^3 można podzielić na trzy otwarte obszary, w których układ równań różniczkowych jest liniowy,

$$U_{1} = \{x \in \mathbb{R}^{3} : x_{1} < -1\},$$

$$U_{2} = \{x \in \mathbb{R}^{3} : |x_{1}| < 1\},$$

$$U_{3} = \{x \in \mathbb{R}^{3} : x_{1} > 1\},$$
(2.76)

oddzielone płaszczyznami

$$\Sigma_1 = \{ x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 = -1 \}, \quad \Sigma_2 = \{ x \in \mathbb{R}^3 \colon x_1 = 1 \}.$$
(2.77)

W każdym z obszarów U_i układ jest liniowy i równanie (1.36) ma postać

$$\dot{x} = A_i(x - p_i),\tag{2.78}$$

gdzie A_i są macierzami kwadratowymi wymiaru 3 o stałych współczynnikach, natomiast p_i są punktami stałymi układu (1.36) należącymi do obszarów U_i . Rozwiązanie układu w obszarze U_i ma postać

$$\varphi(t,x) = e^{A_i t} (x - p_i) + p_i.$$
(2.79)

Poniżej przedstawimy porównanie różnych metod obliczania wartości uogólnionego odw
zorowania Poincarégo P zdefiniowanego przez zbiór $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$. W
prowadźmy na Σ_2 lokalny układ współrzędnych odziedzicz
ony z \mathbb{R}^3 , tzn. punkt $(x_1, x_2) \in \Sigma_2$ będziemy utoż
samiać z punktem $(1, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3$.

Porównanie przeprowadzimy dla wektora przedziałowego

$$\mathbf{x}_0 = (-0.3330_0^1, -4.2340_0^1) \subset \Sigma_2 \tag{2.80}$$

o szerokości $(10^{-5}, 10^{-5})$.

Obliczono $P(\mathbf{x}_0)$ i $P'(\mathbf{x}_0)$ przy użyciu metody Lohnera (wersja IE), opisanej w podrozdziale 2.2, oraz za pomocą wzorów analitycznych (typu e^{At}) na trajektorię układu liniowego, podanych w podrozdziale 2.6.

Wyniki obliczeń zostały przedstawione w tabeli 2.6. Dla obu metod podano wynik obliczeń oraz wielkość otrzymanego zbioru. Znaleziony czas powrotu w przypadku obu metod jest podobny. Metoda analityczna daje nieznacznie węższy przedział. Pozostałe wielkości są obliczone znacznie dokładniej przy użyciu metody Lohnera. Jest to o tyle dziwne, że przy ustalonym czasie powrotu wzory analityczne są wzorami dokładnymi. Okazuje się że bezpośrednie zastosowanie wzorów (2.72) oraz (2.74) powoduje bardzo znacznie przeszacowanie wyników na skutek silnego wpływu efektu pakowania.

Tabela 2.6

Porównanie wyników obliczeń odwzorowania Poincarégo dla obwodu Chuy

Metoda	Lohner IE	Rozwiązanie analityczne \mathbf{e}^{At}
$ au(\mathbf{x}_0)$	[3.3961230, 3.3962696]	[3.3961267, 3.3962688]
$\operatorname{Diam}(\tau(\mathbf{x}_0))$	0.0001466	0.0001421
$P(\mathbf{x}_0)$	$(0.2444_{194}^{506}, -1.14_{7769}^{8625})$	$(0.244_{2574}^{6130}, -1.1_{44809}^{51596})$
$\operatorname{Diam}(P(\mathbf{x}_0))$	$(3.12 \cdot 10^{-5}, 0.000856)$	(0.0003556, 0.006787)
$P'(\mathbf{x}_0)$	$\begin{pmatrix} -0.38^{9506}_{7342} & -0.00^{1216}_{0896} \\ 14.4^{46876}_{31099} & 1.81^{6780}_{4308} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -0.3^{94464}_{82295} & -0.00^{19311}_{01711} \\ 14^{495624}_{\cdot 382454} & 1.8^{237138}_{073885} \end{pmatrix}$
Diam $(P'(\mathbf{x}_0))$	$ \begin{pmatrix} 0.002164 & 0.00032 \\ 0.015777 & 0.002472 \end{pmatrix} $	$\left(\begin{array}{ccc} 0.012169 & 0.00176\\ 0.11317 & 0.0163253 \end{array}\right)$

Poniżej przedyskutujemy kilka metod poprawy wyników uzyskanych za pomocą wzorów analitycznych. Najprostszą metodą zmniejszenia efektu pakowania jest podział przedziału t na kilka części i dla każdej z nich zastosowanie wzoru (2.72). Przy obliczaniu $P'(\mathbf{x}_0)$ za pomocą wzoru (2.74) wykorzystujemy poprawione $\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathbf{t}, \mathbf{x}_0)$ i dodatkowo wykorzystujemy metodę bisekcji dla t.

Porównanie wyników otrzymanych przy użyciu tej metody dla różnej liczby podziałów n_t jest przedstawione w tabeli 2.7. Widać, że już podział na 10 części daje ok. pięciokrotne zmniejszenie średnicy $P(\mathbf{x}_0)$. Wykonywanie podziałów na mniejsze części daje dalszą poprawę, ale obserwujemy efekt nasycenia. Wraz ze wzrostem liczby n_t poprawa staje się coraz mniejsza.

Tabela 2.7

Porównanie szerokości zbiorów $P(\mathbf{x}_0)$ oraz $P'(\mathbf{x}_0)$ znalezionych za pomocą różnych metod

Metoda	$\operatorname{Diam}(P(\mathbf{x}))$	$\operatorname{Diam}(P'(\mathbf{x}))$
Lohner IE	$(3.12 \cdot 10^{-5}, 0.000856)$	(0.002164, 0.00032, 0.01577, 0.002472)
e^{At}	(0.0003556, 0.006787)	(0.012169, 0.00176, 0.1131, 0.016325)
$e^{At}, n_t = 10$	$(6.13 \cdot 10^{-5}, 0.001380)$	(0.002599, 0.000372, 0.02402, 0.003617)
$e^{At}, n_t = 10^2$	$(3.36 \cdot 10^{-5}, 0.000894)$	(0.001753, 0.000249, 0.01625, 0.002530)
$e^{At}, n_t = 10^3$	$(3.09 \cdot 10^{-5}, 0.000845)$	(0.001668, 0.000237, 0.01547, 0.002422)
$e^{At}, n_t = 10^4$	$(3.07 \cdot 10^{-5}, 0.000841)$	(0.001661, 0.000236, 0.01541, 0.002412)
$e^{At}, n_x = 2^6$	$(7.28 \cdot 10^{-6}, 0.000248)$	$(0.000583, 8.022 \cdot 10^{-5}, 0.00774, 0.001303)$
$e^{At}, n_x = 2^{10}$	$(4.73 \cdot 10^{-6}, 0.000183)$	$(0.000583, 8.022 \cdot 10^{-5}, 0.00774, 0.001303)$
$e^{At}, n_x = 2^{12}$	$(4.32 \cdot 10^{-6}, 0.000174)$	$(0.000567, 7.770 \cdot 10^{-5}, 0.00762, 0.001286)$
$e^{At}, n_x = 2^{14}$	$(4.11 \cdot 10^{-6}, 0.000168)$	$(0.000558, 7.644 \cdot 10^{-5}, 0.00756, 0.001277)$
$e^{At}, n_x = 2^{16}$	$(3.99 \cdot 10^{-6}, 0.000165)$	$(0.000553, 7.582 \cdot 10^{-5}, 0.00752, 0.001273)$
e^{At} , MVF	$(3.96 \cdot 10^{-6}, 0.000163)$	$(0.000590, 8.646 \cdot 10^{-5}, 0.00947, 0.001335)$

Druga modyfikacja polega na zastosowaniu metody uogólnionej bisekcji do zbioru \mathbf{x}_0 . Dla każdej części \mathbf{x}_0^i zbioru \mathbf{x}_0 wyznacza się czas powrotu i oblicza $P(\mathbf{x}_0^i)$ oraz $P'(\mathbf{x}_0^i)$ za pomocą wzorów (2.72) i (2.74). W tabeli 2.7 podano wyniki uzyskane przy podziale zbioru \mathbf{x}_0 na $n_x = 2^6, \ldots, 2^{16}$ części. Uzyskane wyniki są znacznie lepsze niż przy podziale przedziału **t**. Głównym minusem jest konieczność wielokrotnego wyznaczania czasu powrotu, co znacznie wydłuża czas obliczeń.

Kolejna metoda to zastosowanie twierdzenia o wartości średniej do obliczenia wyrażenia (2.72). Obliczenie $P(\mathbf{x}_0)$ wykonujemy dwuetapowo. Najpierw znajdujemy **y** ze wzoru (2.72). Następnie obliczamy macierz Jacobiego **J** ze wzoru (2.74) i wykorzystujemy ją do poprawy oszacowania na $P(\mathbf{x}_0)$

$$P(\mathbf{x}_0) \subset \mathbf{z} = P(x_0) + \mathbf{J}(\mathbf{x}_0 - x_0).$$
 (2.81)

Obliczone w ten sposób poprawione oszacowanie na $P(\mathbf{x}_0)$ możemy następnie użyć do poprawy oszacowania na $P'(\mathbf{x}_0)$. Można tę procedurę stosować iteracyjnie. Okazuje się jednak, że kolejne iteracje nie zmniejszają w sposób istotny średnicy otrzymanych oszacowań.

Wyniki obliczeń uzyskane za pomocą tych metod zostały przedstawione w tabeli 2.7. Widać wyraźnie, że metoda MVF przewyższa pozostałe metody. W szczególności uzyskane za jej pomocą wyniki są znacznie dokładniejsze od wyników uzyskanych za pomocą metody Lohnera. Zwłaszcza duże różnice można zauważyć w obliczonych oszacowaniach na macierz Jacobiego odwzorowania Poincarégo. Metoda Lohnera zmniejsza wpływ efektu pakowania przy obliczaniu $P(\mathbf{x}_0)$. Rozwiązanie równania wariacyjnego jest w zasadzie obliczane jako iloczyn macierzy przedziałowych, czego skutkiem jest znaczne przeszacowanie macierzy Jacobiego.

Okazuje się zatem, że stosowanie wzorów analitycznych jest korzystniejsze niż użycie metody Lohnera. W celu otrzymania dobrych oszacowań należy stosować twierdzenie o wartości średniej do obliczania wyrażeń danych wzorami analitycznymi lub używać innych metod ograniczania wpływu efektu pakowania (np. metodę bisekcji).

3. Orbity okresowe

W rozdziale tym opiszemy metody analizy zbiorów granicznych wykorzystujące arytmetykę przedziałową. Zbiory graniczne są interesujące dla dynamiki układu, ponieważ reprezentują jego zachowanie długoterminowe, czyli tzw. *stan ustalony* układu. Trajektorie, które obserwujemy po zaniku składowych przejściowych, są położone na zbiorach granicznych.

Szczególnie dużo uwagi poświęcimy punktom stałym i orbitom okresowym, które są najprostszymi przykładami zbiorów granicznych. Niosą one wiele informacji na temat układu dynamicznego. W szczególności problem istnienia orbit okresowych jest istotny w analizie układów chaotycznych, które przy pewnych założeniach charakteryzują się istnieniem nieskończonej liczby orbit okresowych zanurzonych w atraktorze. Dziwny atraktor jest zbudowany na nieskończonym zbiorze niestabilnych orbit okresowych, uporządkowanych w sposób hierarchiczny. Krótsze orbity dają zgrubne przybliżenie atraktora, zaś dłuższe ujawniają bardziej szczegółowo jego strukturę [4, 18]. Problem istnienia orbit okresowych ma duże znaczenie w wielu zastosowaniach. W dziedzinie układów chaotycznych można wspomnieć sterowanie chaosem za pomocą stabilizacji jednej z niestabilnych orbit okresowych zanurzonych w atraktorze [100] lub używanie orbit okresowych jako alfabetu dla celów telekomunikacyjnych [58].

Zwykle orbity okresowe znajdowane są podczas symulacji komputerowych. Prosta metoda znajdowania orbit okresowych na podstawie szeregu czasowego została opisana w pracy [76]. W *metodzie bliskich powrotów* szuka się w szeregu czasowym trajektorii pseudookresowych (trajektoria wraca w pobliże punktu startowego). Metoda jest oparta na założeniu, że w otoczeniu takiego kawałka trajektorii istnieje orbita okresowa. Wiadomo jednak, że tak być nie musi. Przykładowo dla układu dynamicznego opisującego prawie okresową trajektorię na dwuwymiarowym torusie, metoda bliskich powrotów znajduje wiele orbit pseudookresowych, choć wiemy, że w przypadku tego układu nie istnieją orbity okresowe. Metodę bliskich powrotów będziemy stosować do znajdowania punktu startowego dla metod przedziałowych.

Podstawowa metoda numeryczna wykrywania orbit okresowych jest oparta na metodzie Newtona poszukiwania zer funkcji wielu zmiennych [110]. Załóżmy, że ξ jest zerem funkcji $g: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, x_0 jest przybliżeniem ξ oraz g jest różniczkowalna dla $x = x_0$. Wtedy z dokładnościa do pierwszego przybliżenia otrzymujemy

$$0 = g(\xi) \approx g(x_0) + g'(x_0)(\xi - x_0), \tag{3.1}$$

gdzie

$$g'(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_m} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial g_m}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}_{x=x_0}$$
(3.2)

jest macierzą Jacobiego odwzorowania g w punkcie x_0 . Jeśli $g'(x_0)$ jest nieosobliwa, to równanie $g(x_0) + g'(x_0)(x_1 - x_0) = 0$ można rozwiązać ze względu na x_1

$$x_1 = \mathcal{N}(x_0) = x_0 - g'(x_0)^{-1}g(x_0)$$
(3.3)

oraz można wybrać x_1 jako przybliżenie zera ξ . Iteracyjna metoda Newtona rozwiązywania układu równań g(x) = 0 wyraża się wzorem

$$x_{k+1} = \mathcal{N}(x_k) = x_k - g'(x_k)^{-1}g(x_k).$$
(3.4)

Przy założeniu, że punkt początkowy jest wybrany odpowiednio blisko punktu okresowego, metoda jest bardzo szybko zbieżna. Można pokazać, że metoda Newtona ma lokalnie co najmniej kwadratową zbieżność

$$||x_{k+1} - \xi|| \le C||x_k - \xi||^2, \tag{3.5}$$

tzn. w każdej iteracji podwajana jest liczba cyfr dokładnie określających położenie zera.

W celu znalezienia położenia orbity o okresie n odwzorowania f metodę Newtona stosuje się do odwzorowania $g(x) = x - f^n(x)$. Proces poszukiwania orbity okresowej rozpoczyna się wyborem punktu startowego x_0 , a następnie oblicza się kolejne przybliżenia według wzoru (3.4). W celu znalezienia wszystkich orbit okresowych o ustalonym okresie stosuje się metodę Newtona dla wielu punktów startowych położonych na przykład na regularnej siatce. Nie ma jednak pewności, że znalezione zostaną wszystkie orbity okresowe.

Bardziej skomplikowanym problemem niż znalezienie przybliżonego położenia orbity okresowej jest udowodnienie, że w pobliżu trajektorii wygenerowanej przez komputer istnieje prawdziwa orbita okresowa. Ponieważ błędy zaokrągleń mogą w istotny sposób zmieniać dynamikę układu, to nie ma pewności, że w pobliżu znalezionej orbity istnieje prawdziwa orbita okresowa. Ten problem jest szczególnie ważny w przypadku układów chaotycznych. W wyniku błędów zaokrągleń oraz wrażliwości na zmianę warunków początkowych trajektoria wygenerowana przez komputer po pewnym czasie staje się nieskorelowana z rzeczywistą trajektorią punktu startowego.

Istnieje szereg metod, które mogą być użyte do udowodnienia istnienia orbity okresowej. Wiele z nich jest prostym wnioskiem z twierdzenia Brouwera o punkcie stałym, które mówi, że jeśli zwarty zbiór $X \subset \mathbb{R}^m$ jest odwzorowany przez ciągłą funkcję f w siebie, to f ma punkt stały w X, tzn. istnieje $x \in X$, takie że f(x) = x. Za pomocą tego twierdzenia można w prosty sposób udowodnić istnienie asymptotycznie stabilnej orbity okresowej. Dla dowolnego punktu z takiej orbity można znaleźć otoczenie U, spełniające warunek $f^n(U) \subset U$, dowodząc tym samym, że istnieje punkt okresowy o okresie n odwzorowania f wewnątrz U. Jeśli odwzorowanie f jest odwracalne, to w podobny sposób można udowodnić istnienie orbity niestabilnej we wszystkich kierunkach (staje się ona stabilna przy zmianie kierunku czasu). Metoda ta nie może być jednak bezpośrednio użyta do dowodu istnienia orbit okresowych typu siodłowego.

Inna klasa metod oparta jest na własnościach indeksu punktu stałego. W jednej z metod dowodzi się istnienia topologicznego sprzężenia między odwzorowaniem f a odwzorowaniem liniowym posiadającym punkt stały tego samego typu [83, 43]. W kolejnej metodzie oblicza się indeks punktu stałego, całkując pewną funkcję wzdłuż okręgu otaczającego punkt stały. Jeśli wynik jest niezerowy, to istnienie punktu stałego jest wnioskiem z własności indeksu [71]. Ta ostatnia metoda może być użyta dla odwzorowań wymiaru 2. Obie metody pozwalają na udowodnienie istnienia punktów stałych dowolnych typów (również siodłowych). Ich główną wadą jest duża złożoność obliczeniowa.

Rozwój metod dowodu istnienia i jednoznaczności zer odwzorowań nieliniowych wykorzystujących arytmetyke przedziałowa otworzył możliwość badania w sposób ścisły niestabilnych orbit okresowych układów dynamicznych. W podrozdziale 3.1 podane zostaną metody przedziałowe dowodu istnienia orbit okresowych. Przypomnimy definicje kilku operatorów przedziałowych oraz pokażemy, jak wykorzystać własności tych operatorów oraz algorytm bisekcji do znalezienia wszystkich orbit okresowych o ustalonym okresie. Przeprowadzimy testy metod opartych na przedziałowych operatorach Newtona, Krawczyka oraz Hansena-Sengupty. Głównym kryterium porównawczym będzie czas obliczeń niezbędny do znalezienia wszystkich orbit okresowych o ustalonym okresie zawartych w danym obszarze. Rozważymy również tzw. globalne wersje tych operatorów, gdzie problem istnienia orbity okresowej jest sprowadzony do problemu istnienia zera wyżej wymiarowego odwzorowania. Opiszemy kilka usprawnień algorytmu poszukiwania wszystkich orbit okresowych. Pokażemy, że za pomocą tych metod można znaleźć wszystkie orbity okresowe o stosunkowo dużych okresach. W podrozdziale 3.2.1 opisany zostanie prosty algorytm poszukiwania dla stabilnej orbity okresowej jej basenu przyciągania, czyli zbioru punktów, których zbiorem granicznym jest dana orbita okresowa.

Inne metody podejścia do problemu poszukiwania wszystkich orbit okresowych są również możliwe. Dzięki specjalnemu wyborowi zbioru warunków początkowych oraz macierzy w metodzie Newtona można szybko znaleźć wiele orbit okresowych [19]. Choć metoda nie jest ścisła, to w wielu przypadkach możliwe jest przy jej użyciu znalezienie wszystkich orbit okresowych. Metoda nadająca się do zastosowania w przypadku odwzorowań typu odwzorowania Hénona została opisana w pracy [11]. W innej metodzie zbiór zer (lub punktów okresowych) jest oszacowany poprzez jego nakrycie za pomocą kostek [23]. Znajdowane są możliwe przejścia między kostkami i usuwane są kostki nie należące do cykli o ustalonym okresie. Stopniowe ulepszanie nakrycia odbywa się za pomocą metody bisekcji.

Kolejną część pracy poświęcimy metodom, które można wykorzystać do otrzymania całościowego spojrzenia na dynamikę układu. Można do tego zastosować metodę prostych lub uogólnionych odwzorowań komórkowych (ang. *cell-mapping*) [60, 61]. Dynamika układu jest aproksymowana za pomocą odwzorowania dyskretnego pomiędzy komórkami, które z uwagi na ich kształt będziemy również nazywać kostkami, a następnie proste algorytmy są użyte do analizy zachowania układu.

W metodzie prostych odwzorowań komórkowych każda komórka jest odwzorowywana w dokładnie jedną komórkę. Zwykle przy analizie układów dynamicznych jako obraz komórki wybieramy komórkę zawierającą obraz środka badanej komórki. Ta metoda pozwala nam badać przybliżone zachowanie układu.

W uogólnionym odwzorowaniu komórkowym każda komórka może mieć kilka obrazów. Każdemu obrazowi przyporządkowujemy prawdopodobieństwo przejścia z komórki startowej do tego obrazu.

To podejście prowadzi w naturalny sposób do łańcuchów Markowa, które można badać w celu odtworzenia dynamiki układu. W większości przypadków nie jest jednak możliwe obliczenie dokładnych wartości prawdopodobieństw przejścia i dlatego metoda ta nie może być użyta bezpośrednio do ścisłych badań układu.

Metodę uogólnionych odwzorowań komórkowych można nieco zmodyfikować tak, aby otrzymane wyniki były ścisłe. Obszar przestrzeni stanu, w którym badana jest dynamika, dzielimy na kostki. Dla każdej kostki za pomocą arytmetyki przedziałowej wyznaczany jest zbiór kostek zawierający jej obraz. Nie interesuje nas przy tym prawdopodobieństwo przejścia, lecz jedynie taka możliwość. Dopuszczamy sytuację, że dozwolona liczba przejść będzie przeszacowana. Informacja ta jest reprezentowana w postaci grafu skierowanego, gdzie węzłami są kostki, zaś krawędzie odpowiadają dozwolonym przejściom między kostkami.

Na podstawie struktury grafu możemy uzyskać wiele informacji na temat dynamiki układu w sensie globalnym. Można za pomocą tej metody otrzymać ścisłe oszacowanie obszaru przestrzeni stanu, w którym występuje interesująca dynamika, oszacować położenie atraktora, orbit homoklinicznych i heteroklinicznych, niestabilnych podrozmaitości punktów stałych i okresowych. Można również na podstawie dozwolonych przejść między kostkami wyznaczyć pokrycie kostkowe zbioru punktów okresowych o ustalonym okresie, część niezmienniczą zbioru, itd. W podrozdziale 3.2 podane zostaną proste metody znajdowania nakrycia kostkowego części niezmienniczej oraz niewędrującej danego zbioru.

Algorytmy znajdowania nakrycia części niezmienniczej lub łańcuchowo rekurencyjnej są stosunkowo proste i były opisane w wielu artykułach. Kombinatoryczna procedura znajdowania części niezmienniczej, otoczeń izolujących oraz par indeksowych jest opisana w pracy [113]. Metoda konstrukcji skończonej aproksymacji układu dynamicznego oraz prosty algorytm lokalizujący składową łańcuchowo rekurencyjną danego zbioru są podane w pracy [99]. Technika bisekcji zastosowana do obliczania zbiorów niezmienniczych, miar niezmienniczych oraz podrozmaitości niestabilnych została opisana w pracach [21, 22].

W pracy [21] do obliczeń obrazu kostki używane są punkty testowe położone wewnątrz kostki i w związku z tym metoda nie jest ścisła. Drugim problemem jest używanie zwykłej (nieścisłej) metody całkowania. Obliczenia można uczynić ścisłymi poprzez użycie informacji na temat lokalnych stałych Lipschitza oraz zastosowanie ścisłej metody całkowania. W niniejszej pracy używamy prostszego podejścia opartego na arytmetyce przedziałowej. Obraz kostki jest obliczany w jednym kroku na wektorze przedziałowym odpowiadającym kostce. W ostatniej części tego rozdziału podamy przykłady analizy układów dyskretnych oraz ciągłych za pomocą opisanych metod. Znalezione zostaną wszystkie orbity okresowe o niskim okresie dla odwzorowań Hénona oraz Ikedy. Dla obu układów znalezione zostaną bardzo dokładne nakrycia części niezmienniczej oraz niewędrującej zbioru pułapki, wewnątrz którego obserwuje się zachowanie chaotyczne. Znalezione zostaną ścisłe oszacowania basenów przyciągania stabilnych punktów okresowych. Udowodnione zostanie również istnienie szeregu orbit okresowych dla układu Roesslera, obwodu Chuy oraz układu elektronicznego z gładką nieliniowością.

Rozpoczniemy od opisania przedziałowych metod dowodu istnienia orbit okresowych.

3.1. Metody przedziałowe dowodu istnienia orbit okresowych

Wprowadźmy definicje operatorów przedziałowych [2, 91], które pozwalają w prosty sposób stwierdzić istnienie zera funkcji wielu zmiennych wewnątrz zadanego wektora przedziałowego.

3.1.1. Przedziałowy operator Newtona

Rozważmy różniczkowalne odw
zorowanie $\mathbb{R}^m \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{R}^m$. W celu zbadania istnienia zer funkcji
 f wewnątrz wektora przedziałowego \mathbf{x} wymiar
umoblicza się przedziałowy operator Newtona na wektorz
e \mathbf{x}

$$N(\mathbf{x}) = \hat{x} - f'(\mathbf{x})^{-1} f(\hat{x}), \qquad (3.6)$$

gdzie $f'(\mathbf{x})$ jest macierzą przedziałową zawierającą macierze Jacobiego f'(x) dla $x \in \mathbf{x}$ oraz \hat{x} jest dowolnym punktem należącym do \mathbf{x} . Zwykle wybiera się \hat{x} jako środek \mathbf{x} .

Następujące twierdzenie [91, 2] może być użyte do dowodu istnienia i jednoznaczności zer funkcji wielu zmiennych.

Twierdzenie 3.1. Niech $f : \mathbb{R}^m \supset D \mapsto \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym. Niech $\mathbf{x} \subset D$ będzie wektorem przedziałowym i wybierzmy $\hat{x} \in \mathbf{x}$. Niech $f'(\mathbf{x})$ będzie macierzą przedziałową zawierającą macierz Jacobiego odwzorowania f na wektorze przedziałowym \mathbf{x} . Zakładamy, że $f'(\mathbf{x})^{-1}$ istnieje. Niech $N(\mathbf{x}) = \hat{x} - f'(\mathbf{x})^{-1} f(\hat{x})$. Wówczas

- (a) jeśli $N(\mathbf{x}) \cap \mathbf{x} = \emptyset$, to f nie posiada zer w \mathbf{x} ,
- (b) $jeśli N(\mathbf{x}) \subset \mathbf{x}$, to f posiada dokładnie jedno zero $w \mathbf{x}$.

Przedstawimy elementarny dowód powyższego twierdzenia, w celu zobrazowania, jakie własności arytmetyki przedziałowej są używane w celu ścisłego badania istnienia zer funkcji.

Dowód. Wybierzmy dwa punkty $x, y \in \mathbf{x}$ oraz oznaczmy g(t) = f(y + t(x - y)).

Jest oczywiste, że

$$f(x) - f(y) = g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t) dt =$$

= $\int_0^1 f'(y + t(x - y))(x - y) dt.$ (3.7)

Zatem

$$f(x) - f(y) = J(x, y)(x - y),$$
(3.8)

gdzie

$$J(x,y) = \int_0^1 f'(y+t(x-y)) dt.$$
 (3.9)

Jeśli $t \in [0, 1]$, to $y + t(x - y) \in \mathbf{x}$, jako że wektor przedziałowy \mathbf{x} jest wypukły oraz $x, y \in \mathbf{x}$. Zatem $J(x, y) \in f'(\mathbf{x})$. Z istnienia $f'(\mathbf{x})^{-1}$ wynika, że $f'(\mathbf{x})$ nie zawiera macierzy osobliwej, a zatem J(x, y) jest nieosobliwa dla każdego $x, y \in \mathbf{x}$.

Ad (a) Najpierw pokażemy, że jeśli f posiada zero $x^* \le \mathbf{x}$, to $x^* \in \mathbf{N}(\mathbf{x})$. Na podstawie (3.8)

$$J(x^{\star}, \hat{x})(x^{\star} - \hat{x}) = f(x^{\star}) - f(\hat{x}) = -f(\hat{x}).$$
(3.10)

Ponieważ $J(x^{\star}, \hat{x})$ jest nieosobliwa, to

$$x^{\star} = \hat{x} - J(x^{\star}, \hat{x})^{-1} f(\hat{x}) \in \hat{x} - f'(\mathbf{x})^{-1} f(\hat{x}) = \mathbf{N}(\mathbf{x}).$$
(3.11)

Jest zatem oczywiste, że jeśli $\mathbf{x} \cap N(\mathbf{x}) = \emptyset$, to \mathbf{x} nie zawiera zer odwzorowania f. Ad (b) Zdefiniujmy

$$p(x) = \hat{x} - J(x, \hat{x})^{-1} f(\hat{x}).$$
(3.12)

Na podstawie definicji przedziałowego operatora Newtona oraz założeń części (b) twierdzenia mamy $p(x) = \hat{x} - J(x, \hat{x})^{-1} f(\hat{x}) \in \mathcal{N}(\mathbf{x}) \subset \mathbf{x}$ dla każdego $x \in \mathbf{x}$. Z twierdzenia Brouwera o punkcie stałym wynika zatem istnienie punktu stałego x^* odwzorowania p. Na podstawie (3.8) mamy

$$0 = x^{\star} - p(x^{\star}) = x^{\star} - \hat{x} + J(x^{\star}, \hat{x})^{-1} f(\hat{x}) = J(x^{\star}, \hat{x})^{-1} f(x^{\star}).$$
(3.13)

Ponieważ $J(x^{\star}, \hat{x})$ jest nieosobliwa, to $f(x^{\star}) = 0$.

Teraz udowodnimy, że istnieje dokładnie jedno zero w **x**. Załóżmy, że x^* i x^{**} są dwoma zerami odwzorowania f należącymi do **x**. Pokażemy, że z istnienia $f'(\mathbf{x})^{-1}$ wynika, że muszą one być równe. Z równania (3.8) otrzymujemy

$$J(x^{\star}, x^{\star\star})(x^{\star} - x^{\star\star}) = f(x^{\star}) - f(x^{\star\star}) = 0.$$
(3.14)

Ponieważ $J(x^{\star}, x^{\star \star})$ jest nieosobliwa, to $x^{\star} = x^{\star \star}$.

W praktyce, aby uniknąć konieczności obliczania macierzy odwrotnej do macierzy przedziałowej $f'(\mathbf{x})$, stosuje się nieco inną wersję Twierdzenia 3.1. Wykazuje się, że jeśli algorytm znajdowania rozwiązań przedziałowego równania liniowego $f(\mathbf{x})\mathbf{y} = f(\hat{x})$ wyznacza wektor przedziałowy **y** spełniający warunek

$$\{y \colon Ay = b \text{ dla pewnych } A \in f(\mathbf{x}), b \in f(\hat{x})\} \subset \mathbf{y},\tag{3.15}$$

tzn. w trakcie obliczeń nie wystąpiło dzielenie przez przedział zawierający zero, to $N(\mathbf{x}) \subset \hat{x} + \mathbf{y}$. Do wyznaczenia \mathbf{y} można zastosować przedziałową wersję algorytmu Gaussa.

Przedziałowy operator Newtona może być użyty do badania istnienia zer w przypadku, gdy macierz przedziałowa $f'(\mathbf{x})$ jest regularna, tzn. jest złożona z macierzy nieosobliwych. Pozostałe dwa operatory można użyć dla szerszej klasy układów.

3.1.2. Operator Krawczyka

Operator Krawczyka jest zdefiniowany jako

$$K(\mathbf{x}) = \hat{x} - Cf(\hat{x}) + (I - Cf'(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - \hat{x}), \qquad (3.16)$$

gdzie \hat{x} jest dowolnym punktem należącym do **x**, zaś C jest macierzą nieosobliwą. Zwykle jako C wybiera się odwrotność macierzy Jacobiego $f'(\hat{x})$. Operator Krawczyka uzyskuje się poprzez zastosowanie metody obliczania wyrażenia na podstawie twierdzenia o wartości średniej (porównaj inkluzję (2.5)) do zmodyfikowanego operatora Newtona N(x) = x - Cf(x). Przy założeniu, że $K(\mathbf{x}) \subset \mathbf{x}$, istnienie zera odwzorowania f uzyskuje się z twierdzenia Brouwera dla zmodyfikowanego operatora Newtona oraz z założenia o nieosobliwości macierzy C. W celu uzyskania jednoznaczności zera w **x** należy dodatkowo założyć, że $K(\mathbf{x}) \subset \text{Int } \mathbf{x}$. Można wtedy udowodnić, że N jest odwzorowaniem zwężającym. Własności operatora Krawczyka są zebrane w poniższym twierdzeniu (porównaj [91]).

Twierdzenie 3.2. Niech $f : \mathbb{R}^m \supset D \mapsto \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym. Niech $\mathbf{x} \subset D$ będzie wektorem przedzialowym i wybierzmy $\hat{x} \in \mathbf{x}$. Niech $f'(\mathbf{x})$ będzie macierzą przedzialową zawierającą macierz Jacobiego odwzorowania f na wektorze przedzialowym \mathbf{x} . Niech $\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \hat{x} - Cf(\hat{x}) + (I - Cf'(\mathbf{x}))(\mathbf{x} - \hat{x})$. Wówczas

- (a) $jeśli K(\mathbf{x}) \cap \mathbf{x} = \emptyset$, to f nie posiada zer $w \mathbf{x}$,
- (b) $jeśli K(\mathbf{x}) \subset Int \mathbf{x}$, to f posiada dokładnie jedno zero $w \mathbf{x}$.

3.1.3. Operator Hansena–Sengupty

Operator Hansena–Sengupty oparty jest na metodzie iteracyjnej Gaussa–Seidela (zobacz [110]) rozwiązywania układu równań liniowych Ax = b. W metodzie tej obliczamy kolejne przybliżenie rozwiązania $x^{(j+1)}$ na podstawie poprzedniego przybliżenia $x^{(j)}$ zgodnie z wzorem

$$\sum_{k < j} a_{ik} x_k^{(j+1)} + a_{ii} x_i^{(j+1)} + \sum_{k > j} a_{ik} x_k^{(j)} = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m.$$

Przedziałowy operator Gaussa–Seidela [91] wykorzystuje się do znalezienia obciętego zbioru rozwiązań przedziałowego równania liniowego

$$\{x \in \mathbf{x} \colon Ax = b \text{ dla pewnych } A \in \mathbf{A}, b \in \mathbf{b}\},\tag{3.17}$$

gdzie **A** jest macierzą przedziałową, zaś **b** oraz **x** są wektorami przedziałowymi. Interesują nas jedynie rozwiązania zawarte w wektorze przedziałowym **x**. W przypadku jednowymiarowym **a**, **b**, **x** są przedziałami i operator Gaussa–Seidela $\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x})$ jest zdefiniowany jako najmniejszy przedział zawierający zbiór

$$\{x \in \mathbf{x} \colon ax = b \text{ dla pewnych } a \in \mathbf{a}, b \in \mathbf{b}\}.$$
(3.18)

Przy poprawnej implementacji do wyznaczenia $\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x})$ wystarczają dwie operacje dzielenia liczb rzeczywistych. Należy również zauważyć, że zbiór $\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{x})$ może być pusty. W przypadku wielowymiarowym operator Gaussa–Seidela $\Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{x})$ jest zdefiniowany jako

$$\mathbf{y}_i = \Gamma(\mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{x})_i = \Gamma(\mathbf{a}_{ii}, b_i - \sum_{k < i} \mathbf{a}_{ik} \mathbf{y}_k - \sum_{k > i} \mathbf{a}_{ik} \mathbf{x}_k, \mathbf{x}_i). \quad (3.19)$$

Ponieważ obcięty zbiór rozwiązań jest ograniczony, to operator Gaussa–Seidela można również stosować, gdy A zawiera macierze osobliwe.

Operator Hansena–Sengupty otrzymujemy poprzez zastosowanie funkcji Γ do obliczenia przedziałowego operatora Newtona dla funkcji g(x) = Cf(x), gdzie C jest pewną macierzą nieosobliwą. Zera funkcji g pokrywają się z zerami funkcji f. Przedziałowy operator Newtona dla odwzorowania g ma postać $N(\mathbf{x}) = \hat{x} - (Cf'(\mathbf{x}))^{-1}Cf(\hat{x})$. Obliczając drugi składnik tego wzoru metodą Gaussa–Seidela otrzymujemy operator Hansena–Sengupty

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = \hat{x} + \Gamma(Cf'(\mathbf{x}), -Cf(\hat{x}), \mathbf{x} - \hat{x}).$$
(3.20)

Dla operatora Hansena–Sengupty twierdzenie dotyczące istnienia i jednoznaczności zer jest podobne jak dla operatora Krawczyka (porównaj [91]). Do udowodnienia istnienia trzeba dodatkowo założyć, że $H(\mathbf{x})$ nie jest zbiorem pustym.

Twierdzenie 3.3. Niech $f : \mathbb{R}^m \supset D \mapsto \mathbb{R}^m$ będzie odwzorowaniem różniczkowalnym. Niech $\mathbf{x} \subset D$ będzie wektorem przedziałowym i wybierzmy $\hat{x} \in \mathbf{x}$. Niech $f'(\mathbf{x})$ będzie macierzą przedziałową zawierającą macierz Jacobiego odwzorowania f na wektorze przedziałowym \mathbf{x} . Niech H będzie operatorem Hansena–Sengupty zdefiniowanym wzorem (3.20). Wówczas

- (a) $jeśli H(\mathbf{x}) \cap \mathbf{x} = \emptyset$, to f nie posiada zer $w \mathbf{x}$,
- (b) $jeśli \ \emptyset \neq H(\mathbf{x}) \subset Int \mathbf{x}$, to f posiada dokładnie jedno zero $w \mathbf{x}$.

3.1.4. Istnienie orbit okresowych

Opiszemy obecnie, jak można zastosować powyższe operatory przedziałowe do badania istnienia orbit okresowych. Opiszemy postępowanie w przypadku przedziałowego operatora Newtona. Dla pozostałych operatorów metoda obliczeń jest analogiczna.

Wersja standardowa i globalna

W celu dowodu istnienia orbity o okresie n funkcji f można zastosować operator przedziałowy do odwzorowania $g = id - f^n$. Tę wersję będziemy nazywać wersją standardową metody. Po obliczeniu operatora N(**x**) na wektorze przedziałowym **x** stosujemy Twierdzenie 3.1. Jeśli N(**x**) \subset Int **x**, to istnieje dokładnie jeden punkt stały odwzorowania f^n wewnątrz **x**.

Druga możliwość, którą będziemy nazywać wersją globalną, to zastosowanie operatora przedziałowego do odwzorowania $G: (\mathbb{R}^m)^n \mapsto (\mathbb{R}^m)^n$ zdefiniowanego przez

$$G(z) = G\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 - f(x_1) \\ x_3 - f(x_2) \\ \vdots \\ x_1 - f(x_n) \end{pmatrix},$$
(3.21)

gdzie $z = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^{\mathrm{T}}$. Zauważmy, że z jest zerem G wtedy i tylko wtedy, gdy x_1 jest punktem stałym odwzorowania f^n . W wersji globalnej problem istnienia orbit okresowych jest przekształcony na problem istnienia zer wyżej wymiarowego odwzorowania.

Zauważmy, że metoda opisana powyżej nie pozwala na udowodnienie istnienia punktu okresowego, w którym jacobian odwzorowania f^n ma wartość własną równą 1. Dla takiej orbity można zastosować metody czysto topologiczne oparte na pojęciu indeksu punktu stałego lub jego uproszczonej wersji przedstawionej w pracy [83] (porównaj również [91]).

Jeśli znajdziemy wektor przedziałowy zawierający punkt okresowy, to można znaleźć lepsze oszacowanie położenia tego punktu, iterując operator przedziałowy. Łatwo można również znaleźć macierz Jacobiego odwzorowania f^n w punkcie okresowym i rozstrzygnąć na tej podstawie rodzaj stabilności punktu okresowego. Jako wynik obliczeń otrzymujemy przedziały (pary przedziałów) zawierające rzeczywiste (zespolone) wartości własne macierzy Jacobiego. Może się zdarzyć, że któryś z tych przedziałów zawiera liczbę o wartości bezwzględnej równej 1. W takim przypadku nie jesteśmy w stanie stwierdzić rodzaju stabilności punktu okresowego.

3.1.5. Wszystkie orbity okresowe o krótkim okresie

Przypuśćmy, że jesteśmy zainteresowani znalezieniem wszystkich trajektorii okresowych o okresie n zawartych w obszarze A. W tym celu można zastosować połączenie metody opisanej powyżej i uogólnionej metody bisekcji (porównaj również [64]).

Najpierw obszar A pokrywany jest przez skończoną liczbę wektorów przedziałowych wymiaru m (zwykle ich liczba rośnie wraz z n). Następnie dla każdego wektora przedziałowego \mathbf{x} należącego do pokrycia obliczany jest operator przedziałowy $N(\mathbf{x})$ dla odwzorowania g i stosowane jest Twierdzenie 3.1. Jeśli spełnione są założenia części (b), to istnieje dokładnie jeden punkt stały $f^n \le \mathbf{x}$. Jeśli spełnione są założenia żadnej części (a), to nie ma punktów stałych $f^n \le \mathbf{x}$. Jeśli nie są spełnione założenia żadnej części twierdzenia, to dzielimy wektor przedziałowy \mathbf{x} na mniejsze części i obliczenia są powtarzane. Algorytm bisekcji znajdowania wszystkich punktów okresowych w kostce \mathbf{x} jest zapisany poniżej przy wykorzystaniu prostego języka o jasnym znaczeniu składni.

```
procedure AllPeriodicPointsStandard(x)

wyznacz N(x);

if N(x) \subset x then begin

Q \leftarrow Q + 1;

zapamiętaj x;

return;

end

if N(x) \cap x = \emptyset then return;

podziel x na y_1, \dots, y_{2^m};

for i = 1 to 2^m do AllPeriodicPointsStandard(y_i);

end of AllPeriodicPointsStandard
```

Q jest globalną zmienną, której na początku obliczeń przypisywana jest wartość 0. Na koniec obliczeń Q jest równe liczbie znalezionych punktów stałych odwzorowania f^n należących do zbioru **x**.

Dla operatorów Krawczyka i Hansena–Sengupty metoda powyższa pozwala na znalezienie wszystkich orbit okresowych o okresie n zawartych w zbiorze A.

W przypadku operatora Newtona musimy użyć innego kryterium nieistnienia. Powodem jest niemożność obliczenia przedziałowego operatora Newtona dla wektora przedziałowego zawierającego punkt, w którym macierz Jacobiego odwzorowania f^n jest osobliwa. Jako kryterium nieistnienia można użyć warunek $N(\mathbf{x}) \cap \mathbf{x} = \emptyset$ lub $f^n(\mathbf{x}) \cap \mathbf{x} = \emptyset$. Druga część warunku pozwala wykluczyć obszary, w których obliczenie $N(\mathbf{x})$ jest niemożliwe. Takie postępowanie nie jest konieczne dla pozostałych dwóch operatorów, jako że do ich obliczenia nie jest niezbędne odwracanie macierzy przedziałowej.

Niekiedy metoda bisekcji zawodzi. Może się tak zdarzyć w przypadku istnienia nieizolowanego punktu okresowego o okresie n wewnątrz zbioru A. Powodem może być również przeszacowanie wyniku przy obliczaniu $f(\hat{x})$ lub $f'(\mathbf{x})$. Ma to miejsce zwłaszcza w przypadkach, gdy nie dysponujemy wzorem odwzorowania f, lecz jest ono na przykład odwzorowaniem powrotu dla ciągłego układu dynamicznego. Stosowanie metody bisekcji prowadzi w takich sytuacjach do podziału na wektory przedziałowe o malejącej średnicy, aż zostanie osiągnięty poziom precyzji maszynowej komputera. W praktyce, po wykonaniu pewnej z góry ustalonej liczby podziałów metoda bisekcji jest przerywana. W takim przypadku obliczany jest również zbiór wektorów przedziałowych, dla których problem istnienia punktów okresowych pozostaje nierozwiązany.

Redukcja wymiaru dla wersji globalnej

W przypadku stosowania wersji globalnej w pierwszym etapie należy dokonać pokrycia zbioru $A \times A \times \cdots \times A$ za pomocą kostek wymiaru mn. Napotykamy wówczas problem wysokiego wymiaru (zwłaszcza dla dużych n) przestrzeni, w której poszukiwane są orbity okresowe. W celu znalezienia wszystkich orbit okresowych długości nodwzorowania zdefiniowanego na \mathbb{R}^m trzeba przeszukać przestrzeń o wymiarze mn. Przykłady obliczeń pokazują, że taka metoda obliczeń jest bardzo nieefektywna. W celu zwiększenia szybkości działania algorytmu można użyć \mathbb{R}^m jako przestrzeni poszukiwań. W tym celu dla wektora przedziałowego $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ najpierw obliczamy $(\mathbf{x}_i)_{i=1}^n$, gdzie $\mathbf{x}_i = f^{i-1}(\mathbf{x})$ i definiujemy $\mathbf{z} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$. Następnie obliczamy operator przedziałowy w wersji globalnej na wektorze \mathbf{z} . W przypadku gdy konieczny jest podział, dzielimy niskowymiarowy wektor \mathbf{x} zamiast wektora \mathbf{z} . Chociaż niektóre elementy wektora \mathbf{z} wygenerowanego z wektora \mathbf{x} mogą być duże (na skutek efektu pakowania i ewentualnie dodatniego wykładnika Lapunowa odwzorowania f), to okazuje się, że metoda ta jest szybsza od innych wersji.

Poniżej zapisany jest algorytm znajdowania wszystkich orbit okresowych zawartych z kostce \mathbf{x} za pomocą wersji globalnej ze zredukowaną przestrzenią poszukiwań.

procedure FindAllPeriodicPointsGlobal(x)

```
\begin{array}{l} \mathbf{x}_{1} \leftarrow \mathbf{x};\\ \text{for } i=2 \text{ to } n \text{ do } \mathbf{x}_{i} \leftarrow f(\mathbf{x}_{i-1});\\ \mathbf{z} \leftarrow (\mathbf{x}_{1}, \mathbf{x}_{2}, \ldots, \mathbf{x}_{n}),\\ \text{oblicz } \mathbf{N}(\mathbf{z});\\ \text{if } \mathbf{N}(\mathbf{z}) \subset \mathbf{z} \text{ then begin}\\ Q \leftarrow Q+1;\\ \text{zapamiętaj } \mathbf{x};\\ \text{return};\\ \text{end}\\ \text{if } \mathbf{N}(\mathbf{z}) \cap \mathbf{z} = \emptyset \text{ then return};\\ \text{podziel } \mathbf{x} \text{ na } \mathbf{y}_{1}, \ldots, \mathbf{y}_{2^{m}};\\ \text{for } i \in \{1, \ldots, 2^{m}\} \text{ do FindAllPeriodicPointsGlobal}(\mathbf{y}_{i});\\ \text{end of FindAllPeriodicPointsGlobal} \end{array}
```

Dalsze usprawnienia

W celu dalszego przyspieszenia algorytmu można zastosować szereg modyfikacji. Pierwsze usprawnienie wykorzystuje fakt, że poszukiwane są rozwiązania okresowe zawarte w zbiorze A. Dla wektora przedziałowego \mathbf{x} obliczamy kilka iteracji w przód i w tył (o ile istnieje odwzorowanie odwrotne do f). Jeśli dla pewnego dodatniego *i* obraz $f^i(\mathbf{x})$ lub przeciwobraz $f^{-i}(\mathbf{x})$ leżą poza A, to jest oczywiste, że nie ma w \mathbf{x} punktu okresowego, którego cała trajektoria byłaby zawarta w A. Można zatem kostkę \mathbf{x} wykluczyć z dalszych poszukiwań. W przypadku gdy zbiór A jest zbiorem pułapką $(f(A) \subset A)$, nie ma sensu sprawdzać iteracji w przód, ponieważ jeśli $\mathbf{x} \cap A \neq \emptyset$, to $f^i(\mathbf{x}) \cap A \neq \emptyset$ dla każdego i > 0.

Powyższa modyfikacja usuwa kostki, dla których stwierdzono, że są położone poza częścią niezmienniczą zbioru A. Można wykorzystać ten pomysł bardziej systematycznie i znaleźć część niezmienniczą zbioru A przed rozpoczęciem poszukiwań orbit okresowych o dowolnym okresie. Jeszcze bardziej korzystne wydaje się wyznaczenie część niewędrującej, która jest zwykle mniejsza niż część niezmiennicza, i również zawiera wszystkie orbity okresowe. Po wyznaczeniu pokrycia kostkowego części niewędrującej zbioru A można do tego pokrycia ograniczyć poszukiwania punktów okresowych. Algorytmy poszukiwania nakrycia części niezmienniczej i niewędrującej są przedstawione w podrozdziale 3.2. W procesie wyznaczania pokrycia kostkowego części niezmienniczej lub niewędrującej wyznacza się dozwolone przejścia między kostkami. Tę informację można wykorzystać do dalszego ograniczenia obszaru poszukiwań orbit okresowych. Wiadomo, że punkty okresowe o okresie *n* są zawarte w zbiorze kostek, tworzących cykle o długości *n*. Okazuje się jednak, że ta ostatnia modyfikacja nie daje oczekiwanej poprawy szybkości działania algorytmu.

Następne usprawnienie jest możliwe, ponieważ poszukiwane są orbity okresowe. Podobnie jak poprzednio obliczamy kilka iteracji $f^i(\mathbf{x})$ dla dodatnich i ujemnych *i*. Jeśli któraś z tych iteracji jest zawarta w obszarze, który został już sprawdzony, to można pominąć wektor \mathbf{x} , jako że nie ma w nim żadych nowych orbit okresowych.

3.1.6. Długie orbity okresowe

Opiszemy obecnie technikę dowodu istnienia orbit okresowych w pobliżu długich trajektorii pseudookresowych wygenerowanych przez komputer. Metoda ta jest oparta na połączeniu przedziałowej metody Newtona oraz metody strzałów. Może być ona wykorzystana do dowodu istnienia bardzo długich orbit okresowych dla odwzorowań $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Możliwe jest również zastosowanie tej metody w przypadku wybranych odwzorowań wyżejwymiarowych.

Przedziałowa metoda Newtona może być zastosowana do dowodu istnienia orbity okresowej dla układów dyskretnych [35, 38] lub ciągłych [36, 37]. Kiedy próbujemy użyć tej metody do dowodu istnienia długiej orbity okresowej, napotykamy problem efektywnego obliczania operatora przedziałowego.

Przedstawimy, w jaki sposób za pomocą metody strzałów można wyznaczyć przedziałowy operator Newtona dla odwzorowań wymiaru 1, tak aby dało się zastosować metodę Newtona do dowodu istnienia bardzo długich orbit okresowych. Metoda strzałów jest standardową techniką analizy numerycznej [110] i była używana w kontekście znajdowania orbit okresowych śledzących trajektorie wygenerowane przez komputer [17]. Tutaj przedstawimy zastosowanie tej metody do efektywnego wyznaczenia operatora Newtona.

Rozważmy odwzorowanie $f \colon \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Jak wspomniano wcześniej w celu udowodnienia istnienia orbity okresowej o okresie n można zastosować operator Newtona do odwzorowania $g(x) = x - f^n(x)$. Sposób ten jest użyteczny tylko dla małych n. Dla większych n przedziały $g(\hat{x})$ oraz $g'(\mathbf{x})$ mają dużą średnicę, co jest spowodowane efektem pakowania oraz dla orbit niestabilnych dodatkowo dodatnim wykładnikiem Lapunowa. W efekcie warunek $N(\mathbf{x}) \subset \mathbf{x}$ nie jest spełniony bez względu na wybór \mathbf{x} .

Do dowodu istnienia dłuższych orbit okresowych można zastosować odwzorowanie $G: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ zdefiniowane wzorem (3.21). Macierz Jacobiego odwzorowania Gw punkcie $z = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ jest równa

$$G'(z) = \begin{pmatrix} -f'(x_1) & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -f'(x_2) & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f'(x_{n-1}) & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -f'(x_n) \end{pmatrix}.$$
 (3.22)

W celu dowodu istnienia orbity okresowej w $\mathbf{z} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$ wybieramy $\hat{z} \in \mathbf{z}$ i pokazujemy, że

$$N(\mathbf{z}) = \hat{z} - G'(\mathbf{z})^{-1}G(\hat{z}) \subset \mathbf{z}.$$
(3.23)

Z powyższej inkluzji na podstawie Twierdzenia 3.1 wynika istnienie dokładnie jednej orbity okresowej w z.

Głównym problemem, który napotykamy, jest konieczność obliczenia wyrażenia $G'(\mathbf{z})^{-1}G(\hat{z})$. Obliczenie macierzy odwrotnej do macierzy przedziałowej $G'(\mathbf{z})$ można wykonać tylko dla małego n. Ponieważ jednak macierz $G'(\mathbf{z})$ ma specjalną postać, możliwe jest wykorzystanie metody podanej poniżej do obliczenia N(\mathbf{z}).

Metoda strzałów

Najpierw opiszemy metodę obliczenia $h = G'(z)^{-1}G(\hat{z})$, gdzie z i \hat{z} są wektorami (rzeczywistymi) wymiaru n. Jest to równoważne rozwiązaniu równania $G'(z)h = G(\hat{z})$. Korzystając z wzoru (3.22) równanie to można zapisać w postaci

$$-f'(x_1)h_1 + h_2 = \hat{x}_2 - f(\hat{x}_1),$$

$$-f'(x_2)h_2 + h_3 = \hat{x}_3 - f(\hat{x}_2),$$

...
(3.24)

$$-f'(x_n)h_n + h_1 = \hat{x}_1 - f(\hat{x}_n),$$

Oznaczmy $a_k = f'(x_k)$ i $g_k = f(\hat{x}_k) - \hat{x}_{(k \mod n)+1}$. Zakładając, że $a_k \neq 0$, równanie (3.24) można zapisać jako

$$h_{1} = a_{1}^{-1}(h_{2} + g_{1}),$$

$$h_{2} = a_{2}^{-1}(h_{3} + g_{2}),$$

$$\dots$$

$$h_{n} = a_{n}^{-1}(h_{1} + g_{n}).$$
(3.25)

W celu wyznaczenia h_1 podstawiamy h_i z *i*-tego równania do równania o numerze (i-1), rozpoczynając od ostatniego równania. Po n-1 podstawieniach otrzymujemy

$$h_1 = a_1^{-1}(a_2^{-1}(\dots a_{n-1}^{-1}(a_n^{-1}(h_1 + g_n) + g_{n-1})\dots) + g_2) + g_1). \quad (3.26)$$

Zatem h_1 można obliczyć jako

$$h_1 = \left(1 - a_1^{-1} a_2^{-1} \dots a_n^{-1}\right)^{-1} \sum_{i=1}^n a_1^{-1} \dots a_i^{-1} g_i.$$
(3.27)

Elementy $h_n, h_{n-1}, \ldots, h_2$ można znaleźć za pomocą rekursji w tył przy użyciu wzoru (3.25).

Metoda strzałów może zostać zmodyfikowana w celu znajdowania zbioru h
 zawierającego $G'(\mathbf{z})^{-1}G(\hat{z})$ i do ścisłego wyznaczenia przedziałowego operatora Newtona. Służy do tego następujące twierdzenie:

Twierdzenie 3.4. Niech $\mathbf{z} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n), \ \hat{z} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \dots, \hat{x}_n) \in \mathbf{z}$. Załóżmy, że przedziały $\mathbf{a}_k, \mathbf{g}_k, i \mathbf{h}_k \ dla \ k = 1, 2, \dots, n \ spełniają \ następujące \ warunki$

$$0 \notin \mathbf{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{3.28a}$$

$$f'(\mathbf{x}_k) \subset \mathbf{a}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$
 (3.28b)

$$f(\hat{x}_k) - \hat{x}_{(k \mod n)+1} \in \mathbf{g}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$
 (3.28c)

$$\left(1 - \mathbf{a}_{1}^{-1} \mathbf{a}_{2}^{-1} \cdots \mathbf{a}_{n}^{-1}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_{1}^{-1} \cdots \mathbf{a}_{i}^{-1} \mathbf{g}_{i} \subset \mathbf{h}_{1}, \qquad (3.28d)$$

$$\mathbf{a}_k^{-1}(\mathbf{h}_{(k \mod n)+1} + \mathbf{g}_k) \subset \mathbf{h}_k, \quad k = 2, 3, \dots, n.$$
(3.28e)

Wówczas $G'(\mathbf{z})^{-1}G(\hat{z}) \subset \mathbf{h}$ oraz $\hat{z} - \mathbf{h}$ zawiera $N(\mathbf{z})$.

Dowód. Wybierzmy dowolny punkt $z = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{z}$. Ponieważ $f'(x_k) \in \mathbf{a}_k$ i $0 \notin \mathbf{a}_k$, to $a_k = f'(x_k) \neq 0$ dla $1 \leq k \leq n$. Zatem $h = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ obliczone za pomocą wzorów (3.27) i (3.25) spełniają równanie $h = G'(z)^{-1}G(\hat{z})$.

Z założeń (3.28b)–(3.28e) wynika, że $h \in \mathbf{h} = (\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \dots, \mathbf{h}_n)$. Jest oczywiste, że $G'(\mathbf{z})^{-1}G(\hat{z}) \subset \mathbf{h}$. Zatem $N(\mathbf{z}) = \hat{z} - G'(\mathbf{z})^{-1}G(\hat{z}) \subset \hat{z} - \mathbf{h}$.

Powyższe twierdzenie może zostać użyte do wyznaczania operatora Newtona za pomocą metody strzałów. Najpierw znajdujemy przedziały \mathbf{a}_k , \mathbf{g}_k , i \mathbf{h}_k takie, że założenia twierdzenia są spełnione. Jeśli zachodzi warunek $\hat{z} - \mathbf{h} \subset \mathbf{z}$, to z Twierdzenia 3.1 wynika, że istnieje dokładnie jedna orbita okresowa o okresie $n \le \mathbf{z}$.

W praktyce przedział
y $\mathbf{a}_k,\,\mathbf{g}_k$ oraz \mathbf{h}_k są obliczane w arytmetyce przedziałowej za pomoc
ą następujących wzorów

$$\mathbf{a}_k = f'(\mathbf{x}_k), \quad k = 1, 2, \dots, n, \tag{3.29a}$$

$$\mathbf{g}_k = f(\hat{x}_k) - \hat{x}_{(k \mod n)+1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$
 (3.29b)

$$\mathbf{h}_{1} = \left(1 - \mathbf{a}_{1}^{-1} \mathbf{a}_{2}^{-1} \cdots \mathbf{a}_{n}^{-1}\right)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_{1}^{-1} \cdots \mathbf{a}_{i}^{-1} \mathbf{g}_{i}, \qquad (3.29c)$$

$$\mathbf{h}_k = \mathbf{a}_k^{-1} (\mathbf{h}_{(k \mod n)+1} + \mathbf{g}_k), \quad k = n, n - 1, \dots, 2.$$
 (3.29d)

Z własności inkluzji dla obliczeń w arytmetyce przedziałowej [3] wynika, że warunki (3.28b)–(3.28e) są spełnione w sposób automatyczny. Zatem, aby operator Newtona był obliczony poprawnie za pomocą metody strzałów, wystarczy sprawdzić, że 0 nie należy do \mathbf{a}_k dla żadnego k.

Obliczenie operatora Newtona za pomocą metody strzałów jest bardzo efektywne. Dla niestabilnej orbity okresowej oczekujemy, że typowo $a_k = f'(x_k)$ jest większe od 1 co do wartości bezwzględnej. W takim przypadku mnożenie przez \mathbf{a}_k^{-1} zmniejsza średnicę iloczynu. Za pomocą wzoru (3.29c) otrzymujemy bardzo dobre oszacowanie przedziału \mathbf{h}_1 . Również pozostałe elementy wektora \mathbf{h} są obliczone z dużą dokładnością z uwagi na istnienie czynnika \mathbf{a}_k^{-1} we wzorze (3.29d). Ilość pamięci niezbędna do implementacji metody oraz czas obliczeń zależą w sposób liniowy od długości orbity okresowej. Nie ma zatem problemów z orbitami o długości rzędu n = 1000000.

Wybór z

Pierwszym krokiem, który należy wykonać w celu udowodnienia istnienia długiej orbity okresowej, jest znalezienie dobrego kandydata na z. Zwykle używa się do tego celu trajektorii pseudookresowej wygenerowanej przez komputer, która po ulepszeniu służy jako środek wektora przedziałowego o tej samej szerokości każdej składowej.

Mówimy, że ciąg (x_1, x_2, \ldots, x_n) jest δ -pseudoorbitą dla f, jeśli $|f(x_i) - x_{i+1}| \leq \delta$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Jeśli dodatkowo $|f(x_n) - x_1| \leq \delta$, to δ -pseudoorbitę nazywamy orbitą δ -pseudookresową.

Ciągi generowane przez komputer są pseudoorbitami z błędem $|f(x_i) - x_{i+1}|$ obliczenia iteracji bliskim precyzji maszynowej. Aby znaleźć orbitę δ -pseudookresową, obserwujemy trajektorię do momentu, gdy spełniony jest warunek $|f(x_n) - x_1| < \delta$. Wyznaczona w ten sposób orbita pseudookresowa $z = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ zwykle nie może służyć jako środek **z**, ponieważ odległość między $f(x_n)$ i x_1 jest znacznie większa niż precyzja obliczeń.

Aby otrzymać orbitę pseudookresową z mniejszym błędem

$$\delta = \max_{i=1,\dots,n} |f(x_i) - x_{(i \mod n)+1}|$$
(3.30)

można zastosować operator Newtona na wektorze $z = (x_1, x_2..., x_n)$. Ponieważ na tym etapie nie dowodzimy istnienia orbity okresowej, można użyć standardowego operatora Newtona lub przedziałowego operatora z punktowym wektorem przedziałowym. Jeśli położenie początkowe z jest wystarczająco dobre, to metoda Newtona jest zbieżna i $\hat{z} = N(z)$ jest lepszą aproksymacją położenia prawdziwej orbity okresowej. Można kilkakrotnie iterować operator Newtona w celu dalszej poprawy aproksymacji. Zwykle po 3 do 5 iteracjach wektor \hat{z} stabilizuje się. Ostatecznie jako **z** wybieramy wektor przedziałowy $\mathbf{z} = (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n) = ([\hat{x}_1 - \varepsilon, \hat{x}_1 + \varepsilon], \ldots, [\hat{x}_n - \varepsilon, \hat{x}_n + \varepsilon])$ wycentrowany wokół orbity pseudookresowej, gdzie $\hat{z} = (\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ jest aproksymacją obliczoną za pomocą (rzeczywistego) operatora Newtona. Promień ε musi zostać wybrany w taki sposób, aby $0 \notin f'(\mathbf{x}_i)$ dla wszystkich *i*. W przypadku odwzorowania logistycznego z jednym maksimum w punkcie c = 0.5 musimy wybrać

$$\varepsilon < \varepsilon_{\max} = \min_{i=1,\dots,n} |\hat{x}_i - c|. \tag{3.31}$$

Wielkość ε dobiera się zwykle metodą prób i błędów.

Obliczanie wykładnika Lapunowa orbity okresowej

Zachowanie układu w pobliżu hiperbolicznej orbity okresowej jest określone przez wykładniki charakterystyczne (wykładniki Lapunowa) orbity okresowej [53]. Jeśli jeden z wykładników Lapunowa jest dodatni, to orbita okresowa jest niestabilna i typowa trajektoria startująca z otoczenia orbity okresowej jest od niej odpychana. Wykładnik Lapunowa orbity okresowej (x_1, x_2, \ldots, x_n) dla odwzorowania f wymiaru 1 jest zdefiniowany przez

$$\lambda = \frac{1}{n} \log |(f^n)'(x_1)|.$$
(3.32)

Stosując wzór na pochodną złożenia otrzymujemy

$$\lambda = \frac{1}{n} \log |f'(x_n) \dots f'(x_2) f'(x_1)|, \qquad (3.33)$$

$$\lambda = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log |f'(x_i)|.$$
(3.34)

Jeśli wiemy, że x_i należy do przedziału \mathbf{x}_i , to możemy łatwo znaleźć przedział zawierający wykładnik Lapunowa za pomocą ostatniego równania. Warto zauważyć, że choć wzory (3.33) i (3.34) są równoważne z matematycznego punktu widzenia, to drugi jest znacznie bardziej użyteczny do obliczania wykładnika Lapunowa. Pierwszy wzór zawiera iloczyn *n* przedziałów, co jak wiemy może prowadzić do znacznego przeszacowania wyniku na skutek efektu pakowania.

3.2. Basen przyciągania, część niezmiennicza i niewędrująca

Algorytmy opisane w tym podrozdziale będą operowały na obiektach zwanych $\varepsilon\text{-kostkami.}$

Rozpoczniemy od zdefiniowania pojęcia ε -kostki. Wybierzmy dodatnie liczby rzeczywiste $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m$, gdzie *m* jest wymiarem układu. Oznaczmy $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_m)$. ε -kostką nazywamy zbiór postaci

$$\mathbf{v} = [k_1 \varepsilon_1, (k_1 + 1) \varepsilon_1] \times \dots \times [k_m \varepsilon_m, (k_m + 1) \varepsilon_m], \tag{3.35}$$

gdzie k_i są liczbami całkowitymi. ε -kostka **v** jest wektorem przedziałowym o wierzchołkach położonych na regularnej siatce.

Niech $V = {\mathbf{v}_i}$ będzie zbiorem ε -kostek. Przez |V| będziemy oznaczać sumę mnogościową wszystkich kostek należących do V, tzn. $|V| = \bigcup \mathbf{v}_i$.

Kostki postaci (3.35) bardzo dobrze nadają się do ścisłych obliczeń komputerowych. Zmieniając ε można uzyskać dowolną dokładność reprezentacji danego zbioru za pomocą zbioru ε -kostek. Kiedy ε jest ustalone, ε -kostka jest wyznaczona jednoznacznie przez ciąg liczb całkowitych (k_1, k_2, \ldots, k_m) . Taka reprezentacja czyni łatwiejszym sprawdzenie, czy dana ε -kostka należy do zbioru kostek.

3.2.1. Wyznaczanie basenu przyciągania

Rozpoczniemy od podania ogólnego algorytmu, który dla danego zbioru U znajduje punkty, których dodatnie trajektorie mają niepuste przecięcie z U, a następnie pokażemy, jak zastosować tę procedurę do znajdowania basenu przyciągania zbioru pułapki i stabilnej orbity okresowej. Niech U i A będą dowolnymi zbiorami. Procedura FindBasin, przedstawiona poniżej, wyznacza zbiór ε -kostek V o tej własności, że trajektorie startujące z |V| trafiają po pewnym czasie do U

$$|V| \subset \{x \colon \exists n \ge 0 \quad f^n(x) \in U\}.$$

$$(3.36)$$

Poszukiwania są ograniczone do zbioru A, tzn. sprawdzamy tylko te ε -kostki, które mają niepuste przecięcie ze zbiorem A.

Rozpoczynamy od pokrycia zbioru A za pomocą ε -kostek o ustalonym rozmiarze. Pokrycie składa się z dwóch części. Pierwsza część V, początkowo pusta, spełnia warunek (3.36). Pozostałe kostki pokrycia stanowią zbiór W. Kostka \mathbf{w}_i zostaje przesunięta ze zbioru W do V, jeśli ona sama lub jej obraz jest zawarty w $U \cup |V|$.

Ponieważ początkowo zbiór V jest pusty, to do V przenosimy tylko kostki zawarte w U. W trakcie obliczeń zbiór V rośnie i więcej kostek może być przeniesionych do V. Procedura jest kontynuowana, dopóki żadna kostka nie może być przeniesiona z W do V.

Jest oczywiste, że zbiór |V| otrzymany w ten sposób spełnia warunek (3.36). Dokładność reprezentacji zależy od ε . W celu poprawy dokładności dokonujemy rozdrobnienia kostek należących do W i procedura jest powtarzana. Zmniejszanie ε jest kontynuowane, dopóki nie zostanie osiągnięta z góry zadana dokładność podziału δ . Algorytm realizujący te obliczenia jest przedstawiony poniżej.

```
procedure FindBasin(U, A, V)
   V \leftarrow \emptyset;
   W \leftarrow \text{zbiór } \varepsilon\text{-kostek pokrywających } A;
   repeat
      repeat
          Done \leftarrow TRUE;
          for all \mathbf{w}_i \in W do begin
              if \mathbf{w}_i \subset U \cup |V| or f(\mathbf{w}_i) \subset U \cup |V| then
                 przesuń \mathbf{w}_i z W do V;
                 Done \leftarrow FALSE;
              end
          end
      until not Done;
      \varepsilon \leftarrow \varepsilon/2;
      W \leftarrow \text{zbiór } \varepsilon\text{-kostek pokrywających } W;
   until (\min(\varepsilon) < \delta);
end of FindBasin
```

Powyższa procedura stanowi implementację prostego pomysłu na znajdowanie podzbioru punktów zbioru A, które kiedyś odwiedzą zbiór U. Możliwych jest kilka usprawnień. Można przykładowo używać również wyższych iteracji odwzorowania fjako testu na przesuwanie kostki \mathbf{w}_i z W do V. Inna modyfikacja polega na zastosowaniu metody bisekcji do obliczania $f(\mathbf{w}_i)$. Takie postępowanie może pozwolić na zmniejszenie efektu pakowania. Jeśli zbiór U jest dodatnio niezmienniczy, to procedura FindBasin wyznacza zbiór punktów zawartych w basenie przyciągania zbioru U. Opiszemy, jak można wykorzystać ten algorytm do wyznaczania basenu przyciągania stabilnych orbit okresowych. Basenem przyciągania asymptotycznie stabilnej orbity okresowej $p = (x_k)_{k=1}^n$ o otoczeniu U punktów zbieżnych do p nazywamy zbiór punktów, które odwiedzają U (porównaj podrozdz. 1.1.3).

Załóżmy, że chcemy znaleźć przecięcie basenu przyciągania orbity okresowej p ze zbiorem A. Ponieważ orbita p jest asymptotycznie stabilna, można znaleźć otoczenie U orbity p, które jest zbiorem pułapką. Otoczenie to używamy jako parametr startowy dla procedury FindBasin, co pozwala nam otrzymać ścisłą aproksymację basenu przyciągania. Jest ono ścisłe w tym sensie, że wyznaczony zbiór |V| jest zawarty w basenie przyciągania orbity okresowej p.

W następnej części tego rozdziału wyznaczone zostaną baseny przyciągania stabilnych orbit okresowych dla odwzorowania Ikedy.

Informacja na temat basenu przyciągania może być również wykorzystana przy poszukiwaniu orbit okresowych dla przyspieszenia obliczeń. Jest oczywiste, że wewnątrz basenu przyciągania danej orbit okresowej nie istnieją inne orbity okresowe. Zatem po znalezieniu stabilnej orbity okresowej i wyznaczeniu jej basenu przyciągania można wykluczyć ten obszar z dalszych poszukiwań orbit okresowych.

3.2.2. Wyznaczanie części niezmienniczej zbioru

W tym podrozdziale opiszemy metodę znajdowania pokrycia części niezmienniczej zbioru. Jak wspomniano wcześniej, wyznaczenie części niezmienniczej zbioru pułapki jest ważnym krokiem w badaniu globalnej dynamiki układu. Pozwala na ograniczenie obszaru w przestrzeni stanu, gdzie występuje ciekawa dynamika, umożliwia ograniczenie obszaru poszukiwań orbit okresowych itd. Rozpocznijmy od zdefiniowania pojęcia części niezmienniczej zbioru.

Część niezmienniczą zbioru A pod działaniem f definiujemy jako

$$Inv(A) = \{ x \colon \exists (x_k)_{k=-\infty}^{\infty} \ x_0 = x, x_k \in A, x_{k+1} = f(x_k) \ \forall k \}.$$
(3.37)

Jeśli A jest zbiorem pułapką, to część niezmiennicza zbioru A jest równa

$$\operatorname{Inv}(A) = \bigcap_{n \ge 0} f^n(A).$$
(3.38)

Opiszemy obecnie prosty algorytm znajdujący dla danego zbioru A pokrycie jego części niezmienniczej za pomocą ε -kostek, porównaj [113, 21].

W celu wyznaczenia części niezmienniczej zbioru A wybieramy $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m)$ i pokrywamy zbiór A za pomocą ε -kostek. Następnie usuwane są z pokrycia te kostki, które mają puste przecięcie z Inv(A). Wygodne jest przedstawienie tego algorytmu w języku teorii grafów. Tworzymy graf skierowany G = (V, E), którego wierzchołki $\mathbf{v}_i \in V$ są ε -kostkami, natomiast krawędzie odpowiadają możliwości przejścia z jednej kostki do innej pod działaniem odwzorowania f. W celu wyznaczenia zbioru krawędzi należy dla każdej kostki \mathbf{v}_i obliczyć $f(\mathbf{v}_i)$ i dodać (i, j) do zbioru krawędzi, jeśli zachodzi warunek $f(\mathbf{v}_i) \cap \mathbf{v}_j \neq \emptyset$. Kostka \mathbf{v}_i zostaje usunięta z grafu, jeśli nie jest ona początkiem żadnej krawędzi grafu $(f(\mathbf{v}_i) \cap \mathbf{v}_j = \emptyset$ dla wszystkich j) lub jeśli nie jest końcem żadnej krawędzi grafu $(f(\mathbf{v}_j) \cap \mathbf{v}_i = \emptyset$ dla wszystkich j). Postępowanie takie jest kontynuowane, dopóki żadna kostka nie może zostać usunięta z grafu.

Następnie zmniejszamy dwukrotnie ε , co odpowiada podzieleniu każdej kostki na 2^m mniejszych kostek. Przy okazji usuwamy kostki mające puste przecięcie ze zbiorem A.

Dla nowego ε tworzymy zbiór krawędzi E i powtarzamy proces usuwania kostek. Postępujemy tak, dopóki nie osiągniemy zadanej dokładności podziału δ . Procedura wykonująca to zadanie jest przedstawiona poniżej.

```
procedure FindInvariantPart(A, V)
   V \leftarrow \text{zbiór } \varepsilon\text{-kostek pokrywających } A;
   repeat
      E \leftarrow \text{zbiór dozwolonych przejść; } \{(i,j) \in E \text{ jeśli } f(\mathbf{v}_i) \cap \mathbf{v}_j \neq \emptyset\}
      repeat
         Done \leftarrow TRUE;
         for all \mathbf{v}_i \in V do begin
             if (\forall j \ (i, j) \notin E) or (\forall j \ (j, i) \notin E) then begin
                usuń \mathbf{v}_i i wszystkie krawędzie incydentne z \mathbf{v}_i z grafu;
                Done \leftarrow FALSE;
             end
          end
      until Done;
      \varepsilon \leftarrow \varepsilon/2;
      V \leftarrow \text{zbiór } \varepsilon\text{-kostek pokrywających } |V| \cap A;
   until \min(\varepsilon) < \delta;
end of FindInvariantPart
```

Poniższy lemat mówi, że dla zadanego zbioru A procedura FindInvariantPart oblicza zbiór kostek pokrywający część niezmienniczą zbioru A.

Lemat 3.1. Zbiór kostek V obliczony przez procedurę FindInvariantPart spełnia warunek

$$\operatorname{Inv}(A) \subset |V|. \tag{3.39}$$

Dowód. Pokażemy, że warunek (3.39) pozostaje spełniony przez cały czas działania procedury FindInvariantPart. Z konstrukcji wynika, iż na początku $A \subset |V|$, a ponieważ Inv $(A) \subset A$, to warunek (3.39) jest prawdziwy. Kostka \mathbf{v}_i jest usuwana, jeśli $f(\mathbf{v}_i) \cap \mathbf{v}_j = \emptyset$ dla każdego $\mathbf{v}_j \in V$ lub $f(\mathbf{v}_j) \cap \mathbf{v}_i = \emptyset$ dla każdego $\mathbf{v}_j \in V$.

Rozważmy pierwszy przypadek, tzn. $f(\mathbf{v}_i) \cap \mathbf{v}_j = \emptyset$ dla każdego $\mathbf{v}_j \in V$. Wynika stąd, że dla każdego $x \in \mathbf{v}_i$ zachodzi $f(x) \cap |V| = \emptyset$. Ponieważ Inv $(A) \subset |V|$, to $f(x) \notin$ Inv(A). Z własności części niezmienniczej $(x \in \text{Inv}(A) \Rightarrow f(x) \in \text{Inv}(A))$ otrzymujemy $x \notin$ Inv(A). Ponieważ warunek ten zachodzi dla każdego $x \in \mathbf{v}_i$, to ostatecznie Inv $(A) \subset |V| \setminus \mathbf{v}_i$.

Teraz załóżmy, że $f(\mathbf{v}_j) \cap \mathbf{v}_i = \emptyset$ dla każdego $\mathbf{v}_j \in V$. Wynika stąd, że $x \notin f(|V|)$ dla każdego $x \in \mathbf{v}_i$, czyli $x \notin f(\text{Inv}(A))$ dla każdego $x \in \mathbf{v}_i$. Korzystając z ogólnej własności $x \in \text{Inv}(A) \Rightarrow x \in f(\text{Inv}(A))$, otrzymujemy $x \notin \text{Inv}(A)$ dla każdego $x \in \mathbf{v}_i$ i w konsekwencji $\text{Inv}(A) \subset |V| \setminus \mathbf{v}_i$.

Pokazaliśmy, że w obu przypadkach zachodzi warunek

$$\operatorname{Inv}(A) \subset |V| \setminus \mathbf{v}_i,$$

zatem po usunięciu \mathbf{v}_i ze zbioru V warunek (3.39) jest nadal spełniony.

Możliwa jest implementacja tej procedury w bardzo efektywny sposób. Najbardziej czasochłonną częścią algorytmu jest wyznaczenie dozwolonych przejść między kostkami, czyli wygenerowanie zbioru krawędzi E grafu. Ponieważ obliczenia są prowadzone w arytmetyce przedziałowej, to znaleziony zbiór E zawiera zbiór przejść dozwolonych, czyli inaczej to ujmując, E jest zbiorem przejść niezabronionych.

Przedstawiona powyżej metoda obliczeń jest znacznie skuteczniejsza niż pokrycie zbioru A kostkami o żądanej dokładności i usuwanie kostek z tego pokrycia. To ostatnie rozwiązanie prowadzi zwykle do bardzo dużej liczby wierzchołków w grafie, co w efekcie powoduje wolne działanie algorytmu.

Dzięki stopniowemu zwiększaniu precyzji pokrycia udaje się znacznie zmniejszyć rozmiar grafu. Gdy zbiór |V| jest bliski zbiorowi A do reprezentacji używamy dużych kostek. W miarę gdy zbiór |V| maleje, stopniowo używamy kostek coraz mniejszych. W efekcie udaje się osiągnąć znacznie większą precyzję pokrycia części niezmienniczej.

3.2.3. Wyznaczanie części niewędrującej zbioru

Punkty stałe i orbity okresowe reprezentują zachowania powtarzalne lub stan ustalony układu. Ich uogólnieniem jest pojęcie punktu niewędrującego (porównaj podrozdz. 1.1.3).

W przypadku dyskretnego układu dynamicznego zadanego odw
zorowaniem f punktx nazywam
yniewędrującym, jeśli dla dowolnego otoczenia<math display="inline">Upunkt
uxistniejen > 0takie, że
 $f^n(U) \cap U \neq \emptyset$. Zbiór punktów niewędrujących odw
zorowania f jest domknięty i zawiera domknięcie zbioru punktów stałych i okresowych. Dla zbioru A
definiujemy część niewędrując
ąAjako zbiór punktów niewędrujących odw
zorowania $f|\operatorname{Inv}(A).$

Można w prosty sposób zmodyfikować procedurę FindInvariantPart tak, aby usuwała ze zbioru kostek V również te kostki, które mają puste przecięcie z częścią niewędrującą zbioru A. Należy w tym celu wstawić dodatkowy warunek, przy którym kostka może zostać usunięta z grafu. Jeśli dla pewnej ε -kostki nie istnieje zamknięta droga w grafie prowadząca przez tę kostkę, to kostka ta zawiera wyłącznie punkty wędrujące i musi leżeć całkowicie poza częścią niewędrującą.

Problem szukania w grafie wierzchołków nie należących do żadnego cyklu jest równoważny szukaniu w grafie składowych silnie spójnych. Ten ostatni jest standardowym problemem w teorii grafów i posiada szybkie rozwiązania, które pracują w czasie liniowym [47]. Modyfikacja procedury FindInvariantPart w celu usuwania kostek leżących poza częścią niewędrującą jest przedstawiona poniżej.

procedure FindNonwanderingPart(A, V)

```
if (\forall j \ (i, j) \notin E) or (\forall j \ (j, i) \notin E)
or (\mathbf{v}_i \text{ nie należy do cyklu}) then begin
usuń \mathbf{v}_i i wszystkie krawędzie incydentne z \mathbf{v}_i z grafu;
Done \leftarrow FALSE;
end
...
end of FindNonwanderingPart
```

Zbiór |V| obliczony przez tę procedurę zawiera część niewędrującą A.

W następnej części tego rozdziału zastosujemy opisane algorytmy do analizy odwzorowań Hénona i Ikedy oraz odwzorowania Poincarégo dla obwodu Chuy. Pokażemy, że część niewędrująca może być istotnie mniejsza od części niezmienniczej. Dzięki wyznaczeniu części niezmienniczej niekiedy możemy zlokalizować podrozmaitości niestabilne punktów stałych lub okresowych.

3.3. Odwzorowanie Hénona

Jako pierwszy przykład zastosowania metod opisanych w pierwszej części tego rozdziału przeprowadzimy analizę dynamiki odwzorowania Hénona, zdefiniowanego równaniem (1.31). W naszych rozważaniach ograniczymy się do zbioru pułapki Ω .

3.3.1. Orbity okresowe o okresie $n \leq 30$

Rozpoczniemy od przedstawienia wyników testów metod przedziałowych do znajdowania orbit okresowych.

Porównamy działanie pięciu wersji przedziałowej metody Newtona

- wersja standardowa (metoda "Newton Standard"), operator Newtona jest wyznaczany dla odwzorowania $g = id - f^n$;
- ulepszona wersja standardowa (metoda "Newton Standard +"), modyfikacje polegają są na wykluczaniu kostek, których obraz w przód lub w tył leży poza obszarem Ω lub należy do obszaru, dla którego obliczenia zostały już zakończone (porównaj podrozdz. 3.1.5);
- wersja globalna z przestrzenią poszukiwań \mathbb{R}^{2n} (metoda "Newton Global N"), wymiar przestrzeni poszukiwań zależy od okresu *n*, operator Newtona jest stosowany do odwzorowania *G* danego wzorem (3.21);
- wersja globalna z przestrzenią poszukiwań \mathbb{R}^2 (metoda "Newton Global");
- ulepszona wersja globalna z przestrzenią poszukiwa
ń \mathbb{R}^2 (metoda "Newton Global +").

Na rysunku 3.1
a jest pokazany czas obliczeń niezbędny do znalezienia wszystkich orbit okresowych o okresi
enzawartych w $\Omega.$



Rys. 3.1. Czas obliczeń niezbędny do znalezienia wszystkich orbit okresowych o okresie n zawartych w zbiorze Ω : a) dla różnych wersji przedziałowej metody Newtona; b) dla różnych operatorów przedziałowych w wersji globalnej

Obliczenia przeprowadzono na komputerze Pentium III z zegarem 500 MHz. Stwierdzono, że dla $n \leq 3$ najszybszą metodą jest wersja standardowa. Dla $4 \leq n \leq 12$ najszybsza jest wersja standardowa z modyfikacjami. Okazuje się jednak, że nie jest możliwe zastosowanie tej metody do znalezienia wszystkich orbit okresowych o okresie n > 17. Dla n = 18 istnieją punkty okresowe odwzorowania h^n , dla których nie można sprawdzić założenia N(\mathbf{x}) $\subset \mathbf{x}$ dla żadnego otoczenia \mathbf{x} punktu okresowego. Jest to spowodowane efektem pakowania, który powoduje, że $(h^n)'(\mathbf{x})$ ma dużą średnicę (porównaj [32]). Dla $n \geq 13$ wersja globalna ze zredukowaną przestrzenią poszukiwań staje się najszybsza.

Warto zauważyć, że wersja globalna z przestrzenią poszukiwań \mathbb{R}^{2n} jest najwolniejsza. Choć wiele wektorów przedziałowych można wykluczyć przed obliczaniem przedziałowego operatora Newtona, algorytm jest bardzo wolny. Jest on wolniejszy niż algorytm oparty na wersji standardowej i jego użycie jest bardzo ograniczone.

Na rysunku 3.1b porównany został czas obliczeń dla metod Newtona, Krawczyka oraz Hansena–Sengupty w ulepszonej wersji globalnej ze zredukowaną przestrzenią poszukiwań.



Rys. 3.2. Punkty okresowe o okresi
e $n=1,2,\ldots,30$ położone wewnątrz obszaru pułapki Ω dla od
wzorowania Hénona

Można zauważyć, że nie ma zasadniczych różnic w czasie obliczeń dla tych metod. Ten dość nietypowy przypadek wynika z prostoty równań opisujących odwzorowanie Hénona. Dla większości odwzorowań metoda Newtona jest znacznie wolniejsza od pozostałych.

Używając metody Krawczyka, która jest nieznacznie szybsza niż pozostałe dwie metody, znalezione zostały wszystkie orbity okresowe o okresie $n \leq 30$. Są one pokazane na rysunku 3.2. Wykazano, że istnieją dokładnie 109 033 orbity okresowe o okresie $n \leq 30$ oraz że jest 3 065 317 punktów należących do tych orbit. W szczególności udowodniliśmy w ten sposób, że wewnątrz obszaru pułapki istnieje jeden punkt stały, jedna orbita o okresie 2, jedna orbita o okresie 4, nie ma żadnych orbit okresowych o okresie 3 i 5, oraz istnieją orbity okresowe o wszystkich pozostałych okresach $n \leq 30$.

Uzyskane wyniki zostały podsumowane w tabeli 3.1, gdzie zestawione są następujące dane: liczba Q_n orbit okresowych o okresie n, liczba P_n punktów stałych odwzorowania h^n , liczba $Q_{\leq n}$ orbit okresowych o okresie mniejszym lub równym n, liczba $P_{\leq n}$ punktów stałych h^i dla $i \leq n$, oszacowanie entropii topologicznej $H_n = n^{-1} \log(P_n)$ oparte na liczbie orbit okresowych oraz liczba kostek, na które został podzielony obszar poszukiwań w celu znalezienia wszystkich orbit okresowych o ustalonym okresie. Przykładowo, w celu wyznaczenia wszystkich orbit okresowych o okresie 30 dokonano pokrycia zbioru Ω za pomocą 21 058 121 kostek o różnych rozmiarach.

Znalezione orbity okresowe zostały przedstawione zbiorczo na rysunku 3.3. Dają one dobrą aproksymację atraktora Hénona. Można zauważyć niewielkie przerwy w porównaniu z atraktorem obserwowanym numerycznie (rys. 1.4).



Rys. 3.3. Orbity o okresi
e $n\leqslant 30$ położone wewnątrz zbioru Ω dla od
wzorowania Hénona

Tabela 3.1

Orbity okresowe dla odw
zorowania Hénona, \mathbf{Q}_n — liczba orbit okresowych o okresi
en, \mathbf{P}_n — liczba punktów stałych odw
zorowania $h^n,$ \mathbf{H}_n — oszacowanie entropii topologicznej

n	Q_n	\mathbf{P}_n	$Q_{\leqslant n}$	$P_{\leqslant n}$	H_n	Liczba kostek
1	1	1	1	1	0.00000	9
2	1	3	2	3	0.54931	21
3	0	1	2	3	0.00000	41
4	1	7	3	7	0.48648	101
5	0	1	3	7	0.00000	89
6	2	15	5	19	0.45134	205
7	4	29	9	47	0.48104	285
8	7	63	16	103	0.51789	569
9	6	55	22	157	0.44526	737
10	10	103	32	257	0.46347	1149
11	14	155	46	411	0.45849	1521
12	19	247	65	639	0.45912	2457
13	32	417	97	1055	0.46408	4093
14	44	647	141	1671	0.46231	5973
15	72	1081	213	2751	0.46571	9653
16	102	1695	315	4383	0.46471	16281
17	166	2823	481	7205	0.46739	26273
18	233	4263	714	11399	0.46432	43545
19	364	6917	1078	18315	0.46535	71657
20	535	10807	1613	29015	0.46440	121181
21	834	17543	2447	46529	0.46535	199889
22	1225	27107	3672	73479	0.46398	333625
23	1930	44391	5602	117869	0.46525	560725
24	2902	69951	8504	187517	0.46481	961981
25	4498	112451	13002	299967	0.46521	1584185
26	6806	177375	19808	476923	0.46485	2670517
27	10518	284041	30326	760909	0.46507	4346609
28	16031	449519	46357	1209777	0.46485	7346653
29	24740	717461	71097	1927237	0.46495	12264301
30	37936	1139275	109033	3065317	0.46486	21058121

Znając położenie orbit okresowych, można odpowiedzieć na pytanie, jak dobrze krótkie orbity okresowe wypełniają atraktor. W tabeli 3.2 zebrane zostały dane pozwalające odpowiedzieć na tak zadane pytanie.

Wielkości D_c i D_e opisują działanie metody. D_c jest minimalną średnicą wektora przedziałowego, dla którego została udowodniona jedyność orbity o okresie n. Chcemy, aby ta liczba była możliwie duża, tak aby nie był konieczny bardzo drobny podział obszaru poszukiwań. Oczywiście D_c nie może być większe niż najmniejsza odległość między punktami okresowymi o okresie n, gdyż metoda przedziałowa nie działa, jeśli wewnątrz wektora przedziałowego, dla którego zostało udowodnione istnienie. Ta liczba opisuje

dokładność, z jaką znamy położenie punktów okresowych. Dokładność pogarsza się wraz ze wzrostem n. Wielkości D_{\min} , D_{\max} oraz D_{aver} opisują, jak dobrze orbity okresowe wypełniają atraktor. W celu ich wyznaczenia dla każdego punktu o okresie n znaleziony został jego najbliższy sąsiad. D_{\min} , D_{\max} , i D_{aver} są zdefiniowane jako minimalna, maksymalna i przeciętna odległość od najbliższego sąsiada. Im mniejsza jest liczba D_{\min} , tym trudniej jest znaleźć wszystkie orbity okresowe o okresie n, gdyż rejon poszukiwań musi zostać tak podzielony, aby w każdym wektorze przedziałowym był tylko jeden punkt okresowy. Wartość $D_{\min} = 8.5 \cdot 10^{-8}$ dla n = 27 oznacza, że pewne punkty okresowe o okresie 27 znajdują się blisko siebie i niezbędny jest bardzo drobny podział obszaru poszukiwań w celu znalezienia wszystkich orbit okresowych.

Duża wartość D_{max} oznacza, że istnieją punkty okresowe o okresie n dobrze odseparowane od innych punktów okresowych o tym samym okresie, co oznacza w konsekwencji, że punkty okresowe nie wypełniają atraktora równomiernie.

Tabela 3.2

Krótkie orbity okresowe dla odw
zorowania Hénona, $D_{\rm c}$ — średnica przedziału, dla którego udowodni
ono jedyność, $D_{\rm e}$ — średnica przedziału, dla którego zostało udowodni
one istnienie, odległość od najbliższego sąsiada: minimalna
 $D_{\rm min}$, maksymalna $D_{\rm max}$, średni
a $D_{\rm aver}$

n	\mathbf{P}_n	$D_{\rm c}$	$D_{\rm e}$	D_{\min}	D_{\max}	$D_{\rm aver}$
1	1	$7.2 \cdot 10^{-1}$	$4.5 \cdot 10^{-16}$			
2	3	$9.1 \cdot 10^{-2}$	$7.8 \cdot 10^{-16}$	0.478	1.1120	0.69
3	1	$9.1 \cdot 10^{-2}$	$6.7 \cdot 10^{-16}$	—		
4	7	$1.2 \cdot 10^{-2}$	$1.2 \cdot 10^{-15}$	0.235	0.4136	0.31
5	1	$3.2 \cdot 10^{-2}$	$7.8 \cdot 10^{-16}$	—		
6	15	$3.8 \cdot 10^{-3}$	$1.4 \cdot 10^{-15}$	0.063	0.1770	0.11
7	29	$1.3 \cdot 10^{-3}$	$2.0 \cdot 10^{-15}$	0.016	0.1276	0.062
8	63	$2.9 \cdot 10^{-4}$	$5.4 \cdot 10^{-15}$	$5.4 \cdot 10^{-3}$	0.1032	0.041
9	55	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$1.1 \cdot 10^{-14}$	$1.7 \cdot 10^{-3}$	0.1110	0.033
10	103	$1.5 \cdot 10^{-4}$	$6.0 \cdot 10^{-15}$	$2.0 \cdot 10^{-3}$	0.1183	0.024
11	155	$4.9 \cdot 10^{-5}$	$7.5 \cdot 10^{-15}$	$9.6 \cdot 10^{-4}$	0.0699	0.017
12	247	$5.2 \cdot 10^{-5}$	$7.0 \cdot 10^{-15}$	$5.0 \cdot 10^{-4}$	0.0498	0.011
13	417	$7.5 \cdot 10^{-6}$	$2.7 \cdot 10^{-14}$	$3.8 \cdot 10^{-4}$	0.0519	0.0079
14	647	$6.0 \cdot 10^{-6}$	$6.9 \cdot 10^{-15}$	$2.4 \cdot 10^{-4}$	0.0299	0.0044
15	1081	$1.9 \cdot 10^{-6}$	$1.3 \cdot 10^{-14}$	$1.2 \cdot 10^{-4}$	0.0237	0.0034
16	1695	$7.4 \cdot 10^{-7}$	$2.9 \cdot 10^{-14}$	$8.6 \cdot 10^{-5}$	0.0235	0.0021
17	2823	$7.0 \cdot 10^{-7}$	$1.7 \cdot 10^{-14}$	$3.9 \cdot 10^{-5}$	0.0210	0.0015
18	4263	$7.8 \cdot 10^{-8}$	$1.2 \cdot 10^{-13}$	$8.9 \cdot 10^{-6}$	0.0214	0.0011
19	6917	$2.2 \cdot 10^{-7}$	$2.1 \cdot 10^{-14}$	$1.4 \cdot 10^{-5}$	0.0139	0.00077
20	10807	$1.6 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^{-13}$	$3.7 \cdot 10^{-6}$	0.0138	0.00053
21	17543	$9.9 \cdot 10^{-9}$	$5.2 \cdot 10^{-14}$	$4.9 \cdot 10^{-6}$	0.0077	0.00038
22	27107	$4.9 \cdot 10^{-9}$	$2.7 \cdot 10^{-13}$	$5.5 \cdot 10^{-7}$	0.0109	0.00026
23	44391	$3.2 \cdot 10^{-9}$	$6.4 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-6}$	0.0055	0.00018
24	69951	$1.4 \cdot 10^{-9}$	$1.4 \cdot 10^{-13}$	$3.2 \cdot 10^{-7}$	0.0047	0.00012
25	112451	$5.0 \cdot 10^{-10}$	$9.6 \cdot 10^{-14}$	$3.3 \cdot 10^{-7}$	0.0041	0.000086
26	177375	$2.2 \cdot 10^{-10}$	$9.2 \cdot 10^{-14}$	$1.2 \cdot 10^{-7}$	0.0026	0.000060
27	284041	$5.3 \cdot 10^{-11}$	$1.7 \cdot 10^{-13}$	$8.5 \cdot 10^{-8}$	0.0044	0.000041

Z przedstawionych danych wynika, że liczba D_{max} nie zachowuje się monotonicznie względem n. Ponadto nie maleje ona tak szybko ze wzrostem n, jak można by się spodziewać. Odpowiada to przerwom widocznym na rysunku 3.3.

3.3.2. Część niezmiennicza i część niewędrująca

W niniejszym podrozdziale przedstawimy wyniki obliczeń części niezmienniczej oraz niewędrującej zbioru $A = [-1.5, 1.5] \times [-0.5, 0.5]$. Prostokąt ten zawiera zbiór pułapkę Ω oraz niestabilny punkt stały x^- (porównaj rys. 1.4 oraz równanie (1.32)).

Wyznaczone zostały zbiory ε -kostek pokrywające część niezmienniczą i niewędrującą prostokąta A dla $\varepsilon = (1/2^n, 1/(3 \cdot 2^n))$, gdzie $n = 1, 2, \ldots, 11$. Na rysunku 3.4 za pomocą różnych odcieni przedstawiono wyniki uzyskane dla różnych wartości ε (kolor ciemniejszy oznacza dokładniejszy podział, tzn. większe n, kolor czarny przedstawia wyniki dla n = 11). Pokrycie części niezmienniczej zawiera atraktor chaotyczny, punkt stały x^- oraz jedną gałąź niestabilnej podrozmaitości punktu x^- , łączącą $x^$ z atraktorem.

Pokrycie części niewędrującej jest mniejsze i składa się z dwóch składowych spójnych. Jedna zawiera atraktor chaotyczny, zaś do drugiej (bardzo małej) należy niestabilny punkt stały x^- . W wyniku zastosowania algorytmu było możliwe przerwanie połączenia miedzy tymi dwoma zbiorami i usunięcie podrozmaitości niestabilnej punktu x^- z pokrycia części niewędrującej.

Tabela 3.3

Liczba oraz powierzchnia ε –kostek pokrywających część niezmienniczą i część niewędrującą prostokąta $[-1.5, 1.5] \times [-0.5, 0.5], \, \varepsilon = (1/2^n, 1/(3 \cdot 2^n))$

	Część niezmiennicza		Część niewędrująca	
n	Liczba kostek	Powierzchnia	Liczba kostek	Powierzchnia
1	22	1.83	20	1.67
2	51	1.06	48	1.00
3	137	0.714	118	0.615
4	325	0.423	278	0.362
5	776	0.253	660	0.215
6	1892	0.154	1531	0.125
7	4577	0.0931	3387	0.0689
8	10464	0.0532	7804	0.0397
9	24768	0.0315	18665	0.0237
10	59581	0.0189	44817	0.0142
11	141426	0.0112	107938	0.00858

Rezultaty obliczeń zostały zebrane w tabeli 3.3, gdzie podano liczbę elementów pokrycia oraz jego powierzchnię. Zbiór A ma powierzchnię równą 3, gdy tymczasem powierzchnia obszaru zawierającego część niewędrującą jest mniejsza niż 0.01. Dzięki posiadaniu tak dokładnej reprezentacji części niewędrującej można znacznie zredukować obszar poszukiwań orbit okresowych lub ogólniej — skomplikowanej dynamiki.


Rys. 3.4. Odwzorowanie Hénona: a) część niezmiennicza prostokąta $[-1.5, 1.5] \times [-0.5, 0.5]$, niestabilne punkty stałe $(+, \times)$; b) część niewędrująca prostokąta $[-1.5, 1.5] \times [-0.5, 0.5]$

3.4. Odwzorowanie Ikedy

Jako kolejny przykład rozważmy odwzorowanie Ikedy (1.34) z parametrami p = 1, B = 0.9, $\kappa = 0.4$. Rozważymy trzy przypadki: $\alpha = 3$, $\alpha = 6$ i $\alpha = 7$, dla których w symulacjach komputerowych obserwuje się różne typy zachowań (rys. 1.5). We wszystkich przypadkach punkt stały P_1 jest stabilny, zmienia się natomiast zachowanie układu w otoczeniu punktu stałego P_2 .

3.4.1. $\alpha = 3$, stabilny punkt stały

Dla tej wartości parametru α obserwuje się zbieżność trajektorii do jednego z dwóch punktów stałych P_1 lub P_2 . Istnieje również trzeci punkt stały P_3 , który jest niestabilny. Położenie punktów stałych zostało znalezione przy użyciu operatora Krawczyka

$$\begin{split} P_1 &\in (2.115590405128_{69}^{72}, 3.5398435033989_{52}^{76}), \\ P_2 &\in (0.562256442698_{598}^{603}, -0.5824076479740_{53}^{39}), \\ P_3 &\in (0.5918772297744_{48}^{54}, -0.7853725735868_{58}^{31}). \end{split}$$

Część niezmiennicza zbioru pułapki K (porównaj równanie (1.35)), znaleziona za pomocą metod opisanych w podrozdziale 3.2.2 jest przedstawiona na rysunku 3.5a. Część niezmiennicza zawiera trzy punkty stałe oraz orbity heterokliniczne łączące punkt stały typu siodłowego oraz dwa stabilne punkty stałe. Powierzchnia pokrycia części niezmienniczej jest równa 0.0465 i jest bardzo mała w porównaniu z powierzchnią zbioru pułapki K, równą $\pi 9^2 \approx 254.5$.

Znaleziona została również część niewędrująca zbioru K. Wykazano, że jest ona zawarta w zbiorze o powierzchni mniejszej niż $6 \cdot 10^{-7}$, złożonym z trzech składowych spójnych. Każda składowa zawiera jeden punkt stały. Można wykazać, że jeśli trajektoria trafia do dowolnej z tych części i pozostaje w niej za zawsze, to jest zbieżna do punktu stałego. Ponieważ wiadomo, że wszystkie orbity okresowe należą do części niewędrującej zbioru pułapki, to nie ma żadnych innych orbit okresowych dla $\alpha = 3$.

Aby lepiej zrozumieć dynamikę układu, wyznaczono baseny przyciągania B_1 , B_2 stabilnych punktów stałych P_1 oraz P_2 . W tym celu najpierw znaleziono zbiór pułapkę wokół każdego ze stabilnych punktów stałych.

Rozmiar i kształt basenu przyciągania są własnościami globalnymi układu dynamicznego i nie mogą być stwierdzone na podstawie macierzy Jacobiego odwzorowania w punkcie stałym. Macierz Jacobiego badanego odwzorowania w punkcie stałym pomaga nam w znalezieniu lokalnego zbioru pułapki. Blisko punktu stałego, kiedy aproksymacja liniowa jest wystarczająco dobra, można na jej podstawie znaleźć zbiór U, taki że $f(U) \subset U$. Dla algorytmu FindBasin zbiór U powinien być możliwie duży. Norma macierzowa macierzy Jacobiego indukowana przez normę euklidesową jest równa 1.753 > 1 w punkcie P_1 oraz 1.0527 dla P_2 . Oznacza to, że w liniowej aproksymacji koła nie są odwzorowywane w siebie. Musimy zatem jako zbioru U użyć elipsy o środku w punkcie stałym.



Rys. 3.5. Odwzorowanie Ikedy, $\alpha = 3$: a) część niezmiennicza zbioru pułapki, punkty stałe P_1, P_2, P_3 (×, +, *); b) baseny przyciągania stabilnych punktów stałych P_1 i P_2

Wykazano, że następujące elipsy są zbiorami pułapkami dla odwzorowania f

$$\left(\frac{\cos^2\varphi}{r_1^2} + \frac{\sin^2\varphi}{r_2^2}\right) (x - x_0)^2 + \left(\frac{\sin^2\varphi}{r_1^2} + \frac{\cos^2\varphi}{r_2^2}\right) (y - y_0)^2 + + \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) \sin 2\varphi (x - x_0) (y - y_0) \leqslant 1,$$
(3.40)

gdzie $x_0 = 2.11559$, $y_0 = 3.53984$, $r_1 = 2.3$, $r_2 = 1.4$, $\varphi = -0.3$ dla P_1 oraz $x_0 = 0.562256$, $y_0 = -0.582407$, $r_1 = 0.03$, $r_2 = 0.09$, $\varphi = 0.08$ dla P_2 .

Wykazano, że część niezmiennicza tych elips jest punktem stałym (wszystkie trajektorie startujące wewnątrz elips zmierzają do punktu stałego). Następnie używając algorytmu opisanego w podrozdziale 3.2.1, znaleziono obszary zawarte w basenach przyciągania punktów P_1 i P_2 (rys. 3.5b).

Ponieważ odwzorowanie Ikedy zmniejsza powierzchnię (wyznacznik macierzy Jacobiego jest stale równy det $f'(x) = B^2 = 0.81$, co oznacza, że powierzchnia zmniejsza się B^2 razy w każdej iteracji odwzorowania), to jasne jest, że każdy basen przyciągania musi mieć nieskończony obszar. Mimo iż wartości własne macierzy Jacobiego mają takie same wartości bezwzględne dla obu punktów stałych, to baseny przyciągania różnią się znacznie. Wykazano, że część kwadratu $[-10, 10] \times [-10, 10]$ o powierzchni 399.039 jest zawarta w B_1 , zaś część o powierzchni 0.075 jest zawarta w B_2 . Pozostała część zawiera granicę oddzielającą te dwa baseny przyciągania. Granicę basenów przyciągania tworzy niestabilny punkt stały i jego podrozmaitość stabilna.

Podsumowując, dla przypadku $\alpha = 3$ przeprowadziliśmy pełną analizę dynamiki. Pokazaliśmy, że istnieją trzy punkty stałe i nie ma żadnych innych orbit okresowych. Wykazano, że wszystkie trajektorie zmierzają do punktu stałego. Znaleziono bardzo dobre oszacowania heteroklinicznych połączeń między punktami stałymi oraz basenów przyciągania stabilnych punktów stałych.

Przykład ten pokazuje, że możliwe są przypadki, w których znalezienie wszystkich stabilnych orbit okresowych za pomocą obliczania trajektorii startujących z losowych warunków początkowych może być trudne. Szansa wyboru punktu początkowego należącego do basenu przyciągania B_2 z kwadratu $[-10, 10] \times [-10, 10]$ jest mniejsza niż 1/500 (większość trajektorii zmierza do drugiego punktu stałego).

3.4.2. $\alpha = 6$, zachowanie chaotyczne

Dla $\alpha = 6$ obserwowane jest zachowanie chaotyczne. Część trajektorii jest zbieżna do stabilnego punktu stałego P_1 , zaś inne wykazują skomplikowane nieokresowe oscylacje.

Orbity okresowe

W podrozdziale 1.4.3 pokazano, że kula K = B((p, 0), pB/(1 - B)) jest zbiorem pułapką dla odwzorowania Ikedy. Można również pokazać, że trajektoria dowolnego punktu $z \in \mathbb{C}$ po skończonym czasie trafia do K. Wynika stąd, że wszystkie punkty okresowe muszą należeć do zbioru K.

Istnieją trzy punkty stałe odw
zorowania Ikedy dla $\alpha=6,$ jeden stabilny i dwa niestabilne.

Należą one do następujących wektorów przedziałowych

 $P_1 \in (2.9721316179105_{38}^{71}, 4.145946421395_{87}^{91}),$ $P_2 \in (0.5327546229407_{88}^{93}, 0.24689677271101_{12}^{49}),$ $P_3 \in (1.114269614581_{39}^{43}, -2.2856944609861_{69}^{45}).$

Za pomocą metod przedziałowych zostały znalezione wszystkie orbity okresowe o okresie $n \leq 15$ należące do zbioru K. W przypadku wersji standardowej metoda oparta na operatorze Newtona jest 2–3 razy wolniejsza niż metody wykorzystujące operator Krawczyka lub Hansena–Sengupty. Dla operatora Hansena–Sengupty liczba podziałów w metodzie bisekcji jest najmniejsza. Wiadomo, że operator ten daje węższy wynik niż operator Krawczyka, tzn. $H(\mathbf{x}) \subset K(\mathbf{x})$ (porównaj [91]). Mimo to obliczenia prowadzone przy użyciu operatora Hansena–Sengupty są zwykle nieco dłuższe niż dla operatora Krawczyka z uwagi na większą liczbę operacji arytmetycznych niezbędnych do wyznaczenia $H(\mathbf{x})$. W przypadku wersji globalnej różnice między trzema operatorami w czasie obliczeń są nieznaczne.

Tabela 3.4 Odwzorowanie Ikedy, $\alpha = 6$, liczba orbit okresowych oraz oszacowanie entropii topologicznej

n	\mathbf{Q}_n	\mathbf{P}_n	$\mathbf{Q}_{\leqslant n}$	$\mathbf{P}_{\leqslant n}$	H_n
1	2	2	2	2	0.6931
2	1	4	3	4	0.6931
3	2	8	5	10	0.6931
4	3	16	8	22	0.6931
5	4	22	12	42	0.6182
6	7	52	19	84	0.6585
7	10	72	29	154	0.6110
8	14	128	43	266	0.6065
9	26	242	69	500	0.6099
10	46	484	115	960	0.6182
11	76	838	191	1796	0.6119
12	110	1384	301	3116	0.6027
13	194	2524	495	5638	0.6026
14	317	4512	812	10076	0.6010
15	566	8518	1378	18566	0.6033

Znalezione punkty okresowe są przedstawione na rysunkach 3.6 oraz 3.7a. Można zauważyć, że orbity okresowe o niskim okresie nie wypełniają atraktora równomiernie i powstaje interesująca struktura przypominająca zbiór Cantora. Wyniki poszukiwania orbit okresowych zostały zebrane w tabeli 3.4, gdzie podano liczbę Q_n orbit okresowych o okresie n, liczbę P_n punktów stałych f^n oraz oszacowanie entropii topologicznej $H_n = n^{-1} \log(P_n)$. W zestawieniu pominięty został punkt stały P_1 położony daleko od atraktora. Dla każdego punktu okresowego obliczono odległość od najbliższego sąsiada i przetworzone wyniki zebrano w tabeli 3.5.



Rys. 3.6. Odw
zorowanie Ikedy, $\alpha=6,$ punkty okresowe o okresi
e $n=1,2,\ldots 15$



Rys. 3.7. Odwzorowanie Ikedy, $\alpha = 6$, niestabilny punkt stały P_2 (+), niestabilny punkt stały P_3 (*): a) punkty okresowe o okresie $n \leq 15$; b) basen przyciągania P_1 (×), część niezmiennicza K (kolor czarny)

Tabela 3.5

Odw
zorowanie Ikedy, $\alpha=6,$ \mathbf{P}_n — liczba punktów stałych
 $f^n,$ $D_{\rm c}$ — średnica wektora przedziałowego, dla którego udowodniono jedyność
, $D_{\rm e}$ — średnica wektora przedziałowego, dla którego udowodniono istnienie, odległość od najbliższego sąsiada: wartość minimalna
 $D_{\rm min}$, maksymalna $D_{\rm max}$, średnia $D_{\rm aver}$

n	\mathbf{P}_n	$D_{\rm c}$	$D_{\rm e}$	D_{\min}	D_{\max}	$D_{\rm aver}$
1	2	$3.19 \cdot 10^{-2}$	$2.98 \cdot 10^{-14}$	2.599	2.599	2.599
2	4	$1.69 \cdot 10^{-3}$	$2.98 \cdot 10^{-14}$	0.370	1.783	0.8445
3	8	$6.37 \cdot 10^{-4}$	$3.38 \cdot 10^{-14}$	0.395	1.220	0.6442
4	16	$8.01 \cdot 10^{-5}$	$3.56 \cdot 10^{-14}$	0.175	0.956	0.3739
5	22	$8.01 \cdot 10^{-5}$	$3.85 \cdot 10^{-14}$	0.143	0.644	0.3033
6	52	$2.40 \cdot 10^{-5}$	$5.20 \cdot 10^{-14}$	$4.27 \cdot 10^{-2}$	0.495	0.1404
7	72	$3.48 \cdot 10^{-6}$	$6.89 \cdot 10^{-14}$	$1.98 \cdot 10^{-2}$	0.355	0.1057
8	128	$1.23 \cdot 10^{-6}$	$1.41 \cdot 10^{-13}$	$4.56 \cdot 10^{-2}$	0.264	0.0726
9	242	$7.80 \cdot 10^{-8}$	$5.89 \cdot 10^{-13}$	$7.39 \cdot 10^{-4}$	0.210	0.0456
10	484	$5.92 \cdot 10^{-8}$	$2.72 \cdot 10^{-13}$	$1.25 \cdot 10^{-3}$	0.143	0.0310
11	838	$1.26 \cdot 10^{-8}$	$3.25 \cdot 10^{-13}$	$7.22 \cdot 10^{-4}$	0.119	0.0226
12	1384	$5.25 \cdot 10^{-9}$	$2.92 \cdot 10^{-13}$	$4.11 \cdot 10^{-4}$	0.337	0.0160
13	2524	$2.06 \cdot 10^{-9}$	$3.12 \cdot 10^{-13}$	$2.55 \cdot 10^{-4}$	0.270	0.0109
14	4512	$4.13 \cdot 10^{-10}$	$8.36 \cdot 10^{-13}$	$7.01 \cdot 10^{-5}$	0.260	0.00753
15	8518	$8.08 \cdot 10^{-11}$	$5.14 \cdot 10^{-13}$	$1.02 \cdot 10^{-4}$	0.197	0.00515

Basen przyciągania stabilnego punktu stałego

Obecnie wyznaczymy basen przyciągania stabilnego punktu stałego P_1 . Sprawdzono, że elipsa określona wzorem (3.40) jest zbiorem pułapką dla $x_0 = 2.972132$, $y_0 = 4.145946$, $r_1 = 1.2$, $r_2 = 2.1$ oraz $\varphi = 1$. Można wykazać, że dodatnim zbiorem granicznym dla wszystkich punktów należących do tej elipsy jest punkt P_1 .

Następnie używając algorytmu FindBasin znaleziony został podzbiór prostokąta $[-10, 10] \times [-10, 10]$ zawarty w basenie przyciągania punktu P_1 (rys. 3.7b). Wyznaczony obszar ma powierzchnię 357.005. Z rysunku widać, że niestabilny punkt stały P_3 leży na granicy basenu przyciągania punktu P_1 .

Część niezmiennicza i niewędrująca

Wyznaczone zostały pokrycia części niezmienniczej i niewędrującej zbioru pułapki za pomocą ε -kostek. Wyniki zostały pokazane na rysunku 3.8 oraz zestawione w tabeli 3.6. Wyniki dla $\varepsilon = (1/2^n, 1/2^n)$, przy $n = 0, 1, \ldots, 8$ zostały przedstawione przy użyciu różnych odcieni (kolorem czarnym wydrukowano pokrycie uzyskane dla najdrobniejszego podziału n = 8).

Część niezmiennicza zawiera stabilny punkt stały P_1 , niestabilny punkt stały P_3 , atraktor chaotyczny oraz niestabilną podrozmaitość punktu P_3 łączącą P_3 ze stabilnym punktem stałym oraz chaotycznym atraktorem. Powierzchnia pokrycia jest mniejsza niż 2.22. Pokrycie części niewędrującej nie zawiera orbity heteroklinicznej łączącej P_3 z P_1 . Nie udało się natomiast przerwać połączenia pomiędzy punktem P_3 a obszarem, gdzie obserwowany jest atraktor chaotyczny. Na podstawie uzyskanych wyników nie można zatem stwierdzić, że punkt P_3 nie należy do atraktora.



Rys. 3.8. Odw
zorowanie Ikedy, $\alpha = 6$: a) część niezmiennicza zbior
uK, stabilny punkt stały P_1 (×) i niestabilne punkty stał
e P_2 i P_3 (+,*); b) część niewędrująca zbior
uK

Tabela 3.6

Odw
zorowanie Ikedy; liczba oraz powierzchnia ε –kostek pokrywających część niezmienniczą
 i niewędrującą zbioru K dla $\varepsilon = (1/2^n, 1/2^n)$

	Część niez	miennicza	Część niewędrująca			
n	Liczba kostek	Powierzchnia	Liczba kostek	Powierzchnia		
0	61	61.00	61	61.00		
1	155	38.80	69	17.20		
2	328	20.50	176	11.00		
3	789	12.30	368	5.75		
4	1971	7.70	1098	4.29		
5	5392	5.27	3597	3.51		
6	15399	3.76	11890	2.90		
7	46604	2.84	39660	2.42		
8	145346	2.22	131837	2.01		

Ponieważ część niewędrująca zbioru pułapki zawiera wszystkie orbity okresowe, to w poszukiwaniu orbit okresowych możemy ograniczyć się do jej pokrycia.

3.4.3. $\alpha = 7$, stabilna orbita o okresie 2

W symulacjach dla tej wartości parametru α obserwuje się dwa zbiory graniczne: stabilny punkt stały i stabilną orbitę o okresie 2. Ten przypadek jest podobny do pierwszej rozważanej sytuacji ($\alpha = 3$), gdzie również obserwowano dwa stabilne rozwiązania okresowe. Pokażemy, że istnieje wiele istotnych różnic między tymi dwoma przypadkami. Dla $\alpha = 7$ istnieje bardzo wiele niestabilnych orbit okresowych i z topologicznego punktu widzenia dynamika jest bardziej skomplikowana niż w przypadku $\alpha = 6$. Większa liczba orbit okresowych daje wyższą entropię topologiczną.

Również w tym przypadku istnieją trzy punkty stałe

 $P_1 \in (3.242600973758_{17}^{21}, 4.284276235174_{27}^{32}),$

 $P_2 \in (0.5419307253256_{16}^{23}, 0.38430085220722_{56}^{96}),$

 $P_3 \in (1.289330937029_{39}^{44}, -2.5780559420601_{57}^{27}).$

Pierwszy punkt stały jest stabilny, a pozostałe są niestabilne. Istnieje również stabilna orbita okresowa (Q_1, Q_2) o okresie 2

 $Q_1 \in (1.03884627029997_{25}^{62}, -0.0944284334089_{63}^{53}),$

 $Q_2 \in (0.0657477429499_{89}^{92}, -0.0924583425239_{58}^{47}),$

i dwie niestabilne orbity okresowe o okresie 2.

Znaleziono pokrycia części niezmienniczej i niewędrującej zbioru K. Część niewędrująca (rys. 3.9a) składa się z trzech części. Dwa małe obszary odpowiadają punktom stałym P_1 i P_3 . Trzeci obszar zawiera stabilną orbitę okresową o okresie 2 oraz nieskończenie wiele niestabilnych orbit okresowych. Część niezmiennicza zawiera dodatkowo podrozmaitości niestabilne punktu P_3 .



Rys. 3.9. Odw
zorowanie Ikedy, $\alpha = 7$: a) część niewędrując
aK, stabilny punkt stały (*), dwa niestabilne punkty stał
e (\times) , stabilna orbita o okresie 2 (+); b) baseny przyciągania stabilnych orbit okresowych

Warto zauważyć, że dla tego przypadku byliśmy w stanie rozbić część niewędrującą na trzy składowe spójne. Jest to możliwe, ponieważ niestabilny punkt stały jest położony dalej od zbioru chaotycznego niż dla $\alpha = 6$. Procedura wyznaczania pokrycia części niewędrującej nie przerwała jednak dużego obszaru na kawałki. Wiemy jednak, że w zasadzie powinno to być możliwe. Część niewędrująca basenu przyciągania stabilnej orbity o okresie 2 składa się z dwóch punktów i te punkty niewędrujące są odseparowane od pozostałych punktów niewędrujących — odległość stabilnej orbity o okresie 2 od zbioru chaotycznego zawierającego nieskończenie wiele niestabilnych orbit okresowych jest niezerowa.

Znaleziono również baseny przyciągania stabilnych orbit okresowych (rys. 3.9b). Część basenu przyciągania punktu P_1 zawarta w kwadracie $[-10, 10] \times [-10, 10]$ ma powierzchnię większą niż 347.8. Drugi basen przyciągania jest znacznie mniejszy. Powierzchnia kostek znalezionych przez procedurę FindBasin jest równa 0.023. Ten basen przyciągania jest silnie wymieszany ze zbiorem chaotycznym (rys. 3.10) i jego znalezienie w sposób ścisły jest skomplikowane obliczeniowo.



Rys. 3.10. Odw
zorowanie Ikedy, $\alpha = 7$, orbity okresowe o okresi
e $n \leq 12$, niestabilne punkty stałe (×), stabilna orbita o okresi
e2(+), zaznaczono również baseny przyciągania stabilnego punktu stałego oraz stabilnej orbity o okresie
 2

Jako ostatni etap analizy znaleziono wszystkie orbity okresowe o okresie $n \leq 12$. Zostały one przedstawione na rysunku 3.10.

3.5. Odwzorowanie logistyczne

W podrozdziale tym zastosujemy metodę dowodu istnienia bardzo długich orbit okresowych do odwzorowania logistycznego

$$f(x) = ax(1-x), (3.41)$$

dla a = 3.9.

Najpierw przedstawimy działanie metody dla krótkiej orbity okresowej. W tym przypadku założenia Twierdzenia 3.4 można sprawdzić ręcznie.

W symulacjach komputerowych obserwuje się następującą trajektorię pseudookresową: z = (0.44871, 0.96474, 0.13265). Wybierzmy wektor przedziałowy

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = ([0.44, 0.46], [0.95.97], [0.12, 0.14])$$

oraz punkt

$$\hat{z} = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) = (0.45, 0.96, 0.13) \in \mathbf{z},$$

dla których zastosujemy przedziałową metodę Newtona do udowodnienia istnienia orbity okresowej o okresie 3 w otoczeniu \hat{z} .

Następnie znajdujemy przedziały $\mathbf{a}_k,~\mathbf{g}_k,~\mathrm{oraz}~\mathbf{h}_k$ spełniające założenia Twierdzenia 3.4

$$\begin{aligned} f'(\mathbf{x}_1) &= a(1-2\mathbf{x}_1) = [0.312, 0.468] \subset \mathbf{a}_1 = [0.311, 0.469], \\ f'(\mathbf{x}_2) &= a(1-2\mathbf{x}_2) = [-3.666, -3.510] \subset \mathbf{a}_2 = [-3.667, -3.509], \\ f'(\mathbf{x}_3) &= a(1-2\mathbf{x}_3) = [2.808, 2.964] \subset \mathbf{a}_3 = [2.807, 2.965], \\ f(\hat{x}_1) - \hat{x}_2 &= 0.00525 \in \mathbf{g}_1 = [0.00524, 0.00526], \\ f(\hat{x}_2) - \hat{x}_3 &= 0.01976 \in \mathbf{g}_2 = [0.0195, 0.01977], \\ f(\hat{x}_3) - \hat{x}_1 &= -0.00891 \in \mathbf{g}_3 = [-0.00892, -0.00890], \\ \mathbf{a}_1^{-1}\mathbf{a}_2^{-1}\mathbf{a}_3^{-1} \subset \mathbf{a} = [-0.327, -0.196], \\ \mathbf{a}_1^{-1}\mathbf{g}_1 + \mathbf{a}_1^{-1}\mathbf{a}_2^{-1}\mathbf{g}_2 + \mathbf{a}_1^{-1}\mathbf{a}_2^{-1}\mathbf{a}_3^{-1}\mathbf{g}_3 \subset \mathbf{b} = [-0.01, 0.01], \\ (1 - \mathbf{a})^{-1}\mathbf{b} \subset \mathbf{h}_1 = [-0.009, 0.009], \\ \mathbf{a}_3^{-1}(\mathbf{h}_1 + \mathbf{g}_3) \subset \mathbf{h}_3 = [-0.008, 0.001], \\ \mathbf{a}_2^{-1}(\mathbf{h}_3 + \mathbf{g}_2) \subset \mathbf{h}_2 = [-0.006, -0.003], \\ \hat{z} - \mathbf{h} \subset \mathbf{R} = ([0.441, 0.459], [0.963, 0.966], [0.129, 0.138]). \end{aligned}$$

Można sprawdzić, że $\mathbf{R} \subset \mathbf{z}$. Z Twierdzenia 3.4 wynika, że $N(\mathbf{z}) \subset \mathbf{z}$, a zatem istnieje dokładnie jedna orbita okresowa w $N(\mathbf{z})$. Zauważmy, że wszystkie powyższe warunki mają postać nierówności i mogą być sprawdzone w sposób ścisły przy użyciu komputerowej implementacji arytmetyki przedziałowej.

Kiedy iterujemy przedziałowy operator Newtona, startując z $\mathbf{z}_0 = \mathbf{z}$, otrzymujemy ciąg wektorów przedziałowych $\mathbf{z}_{i+1} = N(\mathbf{z}_i)$ zawierających rozwiązanie.

$$\begin{aligned} \mathbf{z}_0 &= ([0.44, 0.46], [0.95.97], [0.12, 0.14]), \\ \mathbf{z}_1 &= (0.4_{431}^{543}, 0.96_{411}^{544}, 0.13_{669}^{669}), \\ \mathbf{z}_2 &= (0.448_{697}^{740}, 0.96474_{134}^{556}, 0.1326_{452}^{603}), \\ \mathbf{z}_3 &= (0.44871775_{282}^{356}, 0.964743511_{498}^{571}, 0.13265252_{696}^{723}), \\ \mathbf{z}_4 &= (0.4487177531952_{59}^{61}, 0.964743511534365_{21}^{33}, 0.132652527098158_{30}^{59}). \end{aligned}$$

Po czterech iteracjach ciąg stabilizuje się i otrzymujemy wąski wektor przedziałowy zawierający prawdziwą orbitę okresową. Środek ostatniego wektora przedziałowego jest przybliżonym położeniem prawdziwej orbity okresowej z błędem mniejszym niż $3 \cdot 10^{-16}$.

Znaleziona orbita została przedstawiona na rysunku 3.11
a ${\rm w}$ postaci wykresu schodkowego.



Rys. 3.11. Przykładowe orbity okresowe odwzorowania logistycznego przedstawione za pomocą wykresu schodkowego: a) orbita o okresie 3; b) orbita o okresie 701

3.5.1. Długie orbity okresowe

Obecnie przedstawimy przykład dowodu istnienia bardzo długiej orbity okresowej. Rozpoczynamy od znalezienia trajektorii pseudookresowej. Wybieramy $x_1 = 0.66$ jako punkt startowy. Po n = 5 480 633 iteracjach trajektoria wygenerowana przez komputer wraca w pobliże punktu początkowego

$$\delta_1 = |x_{5480634} - x_1| < 2.21 \cdot 10^{-7}.$$

122

Po dwóch iteracjach operatora Newtona otrzymujemy aproksymację $(\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n)$ orbity okresowej z błędem bliskim precyzji maszynowej

$$\delta_2 = \max_{i=1,\dots,n} |f(\hat{x}_i) - \hat{x}_{(i \mod n)+1}| < 4.16 \cdot 10^{-16}.$$

Odległość pomiędzy punktem c=0.5,w którym funkcja f przyjmuje maksimum, a orbitą pseudookresową jest równa

$$\varepsilon_{\max} = \min_{i=1,\dots,n} |\hat{x}_i - c| = 4.9 \cdot 10^{-8}.$$

Promień wektora przedziałowego \mathbf{z} musi być mniejszy niż ε_{max} . Następnie tworzymy wektor przedziałowy $\mathbf{z} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)$, gdzie $\mathbf{x}_i = [\hat{x}_i - \varepsilon, \hat{x}_i + \varepsilon]$ oraz $\varepsilon = 10^{-8} < \varepsilon_{\text{max}}$. Ostatecznie za pomocą metody strzałów obliczamy N(\mathbf{z}) i sprawdzamy, że zachodzi warunek N(\mathbf{z}) $\subset \mathbf{z}$.

W ten sposób udowodniliśmy istnienie dokładnie jednej orbity okresowej o okresie n wewnątrz **z**. Iterując dwukrotnie przedziałowy operator Newtona, obliczamy położenie prawdziwej orbity okresowej z błędem mniejszym niż $\delta_3 = 2.08 \cdot 10^{-10}$ w każdym punkcie orbity. Ponieważ n = 5 480 633 jest liczbą pierwszą, to mamy pewność, że jest to okres podstawowy. W ten sposób udowodniliśmy, że istnieje prawdziwa orbita okresowa w pobliżu trajektorii wygenerowanej przez komputer. W szczególności pokazaliśmy, że przedział

$\mathbf{x}_1 = [0.65999999999999998, 0.66000000000000026]$

zawiera punkt okresowy o okresie 5 480 633. Czas obliczeń wyniósł 87.14 s. Jego główną część stanowi czas niezbędny do obliczenia operatora Newtona. Obliczenia były wykonane na komputerze Pentium III z procesorem 500 MHz. W programie użyte zostały procedury do arytmetyki przedziałowej pochodzące z pakietów Bias i Profil [69].

W podobny sposób znaleziono kilka innych orbit okresowych. Orbita o okresie 701 jest przedstawiona na rysunku 3.11b. Dłuższe orbity wypełniają "gęsto" atraktor i na wydruku nie różnią się od całego atraktora. Wyniki obliczeń zebrano w tabeli 3.7.

Tabela 3.7

Przykłady długich orbit okresowych dla odwzorowania logistycznego, opis oznaczeń w tekście

lp.	n x_1 δ_1 p		δ_2	δ_2 ε		t [s]		
1	701	0.70	$4.20 \cdot 10^{-5}$	3	$3.05 \cdot 10^{-16}$	10^{-3}	$9.50 \cdot 10^{-15}$	0.01
2	11348	0.70	$3.45 \cdot 10^{-6}$	2	$3.89 \cdot 10^{-16}$	10^{-6}	$3.38 \cdot 10^{-12}$	0.12
3	723543	0.70	$2.23 \cdot 10^{-7}$	2	$4.02 \cdot 10^{-16}$	10^{-6}	$1.15 \cdot 10^{-11}$	7.96
4	1921687	0.60	$1.56 \cdot 10^{-7}$	2	$4.16 \cdot 10^{-16}$	10^{-7}	$1.61 \cdot 10^{-11}$	20.95
5	2444017	0.64	$2.56 \cdot 10^{-7}$	3	$4.16 \cdot 10^{-16}$	10^{-8}	$2.08 \cdot 10^{-10}$	27.29
6	5480633	0.66	$2.21 \cdot 10^{-7}$	2	$4.16 \cdot 10^{-16}$	10^{-8}	$2.08 \cdot 10^{-10}$	87.14
7	8076157	0.62	$8.18 \cdot 10^{-8}$	2	$4.16 \cdot 10^{-16}$	10^{-8}	$7.03 \cdot 10^{-10}$	166.00

Liczba *n* oznacza okres orbity, x_1 jest punktem startowym δ_1 -pseudookresowej trajektorii $(x_k)_{k=1}^n$, $|f(x_n) - x_1| < \delta_1$. Po *p* iteracjach operatora Newtona otrzymujemy lepszą aproksymację położenia orbity okresowej spełniającą dla $k = 1, \ldots, n$ warunek $|f(\hat{x}_{k \mod n+1}) - \hat{x}_k| < \delta_2$. Wielkość ε jest promieniem wektora przedziałowego $\mathbf{z} = ([\hat{x}_1 - \varepsilon, \hat{x}_1 + \varepsilon], [\hat{x}_2 - \varepsilon, \hat{x}_2 + \varepsilon], \ldots, [\hat{x}_n - \varepsilon, \hat{x}_n + \varepsilon])$, na którym obliczany jest przedziałowy operator Newtona, zaś δ_3 jest maksymalnym promieniem przedziału, dla którego istnienie zostało udowodnione. Wielkość δ_3 odpowiada precyzji, z jaką znamy położenie orbity okresowej. W ostatniej kolumnie podany został czas obliczeń niezbędny do przeprowadzenia dowodu istnienia orbity okresowej.

 Tabela 3.8

 Własności długich orbit okresowych odwzorowania logistycznego

-			
lp.	λ	d_{\max}	d_{\min}
1	0.503042830386^9_7	0.014	$2.83 \cdot 10^{-7}$
2	0.4983757464_4^7	0.0012	$2.08 \cdot 10^{-9}$
3	0.496148838_4^6	$2.75 \cdot 10^{-5}$	$2.02 \cdot 10^{-13}$
4	0.495602678_4^6	$1.11 \cdot 10^{-5}$	$7.92 \cdot 10^{-14}$
5	0.49553530_5^9	$9.11 \cdot 10^{-6}$	$1.40 \cdot 10^{-14}$
6	0.49589456_5^9	$4.70 \cdot 10^{-6}$	$1.75 \cdot 10^{-14}$
7	0.496142_{49}^{51}	$3.15 \cdot 10^{-6}$	$2.78 \cdot 10^{-15}$

W tabeli 3.8 podanych jest kilka parametrów orbity okresowej. Za pomocą równania (3.34) obliczono wykładnik Lapunowa λ orbity okresowej. W celu sprawdzenia, jak gęsto orbita okresowa wypełnia atraktor, obliczono dwie liczby. Wartość d_{max} jest równa maksymalnej przerwie między punktami należącymi do orbity okresowej. Daje ona globalną informację na temat badanego układu dynamicznego. Na jej podstawie można wywnioskować, że jeśli istnieje przyciągająca orbita okresowa, to jej basen przyciągania nie zawiera przedziałów o średnicy większej niż d_{max} .

Wielkość d_{\min} jest minimalną odległością między środkami przedziałów \mathbf{x}_i . Można zauważyć, że dla orbit o numerach 3,4,...,7 odległość ta jest znacznie mniejsza niż maksymalny promień tych przedziałów (δ_3 w tab. 3.7). Oznacza to, że przedziały \mathbf{x}_i mogą zachodzić na siebie.

3.5.2. Krótkie orbity okresowe

Dokonano również porównania metody przedziałowej Newtona i jej wersji opartej na metodzie strzałów zastosowanych do szukania wszystkich orbit okresowych o niskim okresie. W celu znalezienia wszystkich orbit okresowych zastosowano metodę bisekcji.

Wyniki obliczeń są przedstawione w tabeli 3.9. Q_n i P_n oznaczają liczbę orbit okresowych o okresie *n* oraz liczbę punktów stałych odwzorowania f^n . W tabeli podana jest liczba wywołań *R* procedury do obliczania operatora Newtona oraz czas obliczeń (rys. 3.12).

Tabela 3.9

Porównanie działania globalnej wersji metody Newtona i jej modyfikacji opartej na metodzie strzałów przy szukaniu wszystkich orbit okresowych

	_		metoda l	Newtona	metoda strzałów		
n	\mathbf{Q}_n	\mathbf{P}_n	R	t [s]	R	t [s]	
1	2	2	9	0.01	15	0.00	
2	1	4	47	0.03	41	0.01	
3	2	8	137	0.09	129	0.02	
4	1	8	381	0.23	269	0.03	
5	2	12	1043	0.69	759	0.07	
6	3	28	3121	2.49	2143	0.25	
$\overline{7}$	6	44	10197	9.03	6589	0.79	
8	9	80	36301	37.03	22789	3.04	
9	14	134	119519	141.71	72447	10.55	
10	21	224	433467	578.35	255247	40.93	
11	34	376	1588405	2442.86	940733	163.47	
12	52	656	5970917	10619.64	3519917	652.01	
13	86	1120	23321301	46500.98	13599583	2670.59	
14	133	1908	—		48137901	10001.56	

Można zauważyć, że liczba wywołań jest niemal dwukrotnie mniejsza dla wersji wykorzystującej metodę strzałów. Różnice w czasie obliczeń są jeszcze większe. Wersja ulepszona jest ok. 17 razy szybsza dla n = 13.

Obliczanie $N(\mathbf{x})$ za pomocą wersji wykorzystującej metodę strzałów jest znacznie szybsze i różnica rośnie wraz z n. Wynika to z faktu, że wersja standardowa używa do obliczeń macierzy wymiaru $n \times n$, natomiast wersja ulepszona stosuje wyłącznie skończoną liczbę wektorów o długości n.

W konsekwencji za pomocą metody strzałów jesteśmy w stanie znaleźć w tym samym czasie wszystkie orbity okresowe dla okresu n większego o 2.



Rys. 3.12. Czas niezbędny do znalezienia wszystkich orbit okresowych o okresie *n* za pomocą metody Newtona ("Newton Global") oraz metody strzałów (*"backward shooting*")

3.6. Układ Roesslera

W celu zastosowania metod przedziałowych dowodu istnienia orbit okresowych dla ciągłych układów dynamicznych stosuje się technikę odwzorowania Poincarégo. Po redukcji problemu do odwzorowania dyskretnego stosuje się operator przedziałowy w celu udowodnienia istnienia orbity okresowej odwzorowania powrotu, która odpowiada orbicie okresowej układu ciągłego.

Koncepcyjnie metoda jest dość prosta, natomiast zastosowanie jej w praktyce wiąże się ze znacznymi komplikacjami obliczeniowymi w porównaniu z układami dyskretnymi. Odwzorowanie Poincarégo zwykle nie jest dane w sposób jawny i w celu zastosowania operatora przedziałowego niezbędne jest całkowanie numeryczne równania różniczkowego oraz równania wariacyjnego w sposób ścisły. Szczególnie istotny staje się wybór metody całkowania dający niewielkie przeszacowania wyniku.

Procedurę dowodu istnienia orbit okresowych ciągłych układów dynamicznych prześledzimy na kilku przykładach. Rozpoczniemy od układu Roesslera opisanego równaniem (1.44). Do dowodu istnienia orbit okresowych wykorzystano odwzorowanie Poincarégo zdefiniowane przez półpłaszczyznę $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 = 0, \dot{x}_1 > 0\}$. Dla punktów należących do Σ będziemy używać lokalnego układu współrzędnych odziedziczonego z \mathbb{R}^3 , tzn. punkt $(0, x_2, x_3) \in \Sigma \subset \mathbb{R}^3$ będziemy utożsamiać z punktem $(x_2, x_3) \in \Sigma$.

3.6.1. Orbita okresowa o okresie 1

Opiszemy szczegółowo dowód istnienia najkrótszej orbity okresowej pokazanej na rysunku 3.13a. Startując z punktu $x^{(0)} = (-9, 0.03)$ znaleziono dobre przybliżenie orbity o okresie 1 za pomocą (nieprzedziałowej) metody Newtona. Kolejne iteracje metody Newtona dały następujący ciąg punktów

$$\begin{split} x^{(1)} &= (-8.39646070709811, 0.0295385806079791), \\ x^{(2)} &= (-8.38089669546695, 0.0295916679699520), \\ x^{(3)} &= (-8.38091629213300, 0.0295906964822757), \\ x^{(4)} &= (-8.38091641824353, 0.0295906933812734), \\ x^{(5)} &= (-8.38091641905916, 0.0295906933612231), \\ x^{(6)} &= (-8.38091641906444, 0.0295906933610934), \\ x^{(7)} &= (-8.38091641906447, 0.0295906933610926), \\ \hat{x} &= (-8.38091641906447, 0.0295906933610926). \end{split}$$

Widać, że po pewnej liczbie iteracji położenie stabilizuje się. W tym momencie można przerwać iterowanie operatora Newtona. W następnym kroku metodą prób i błędów skonstruowano wokół obliczonego punktu \hat{x} wektor przedziałowy

$$\mathbf{x} = ([-8.392, -8.377], [0.0294, 0.0305])$$

126

o wymiarach (0.015, 0.0011) oraz obliczono

$$N(\mathbf{x}) = ([-8.39151, -8.37988], [0.029556, 0.030376]).$$

Łatwo można sprawdzić, że spełniony jest warunek $N(\mathbf{x}) \subset \mathbf{x}$. Z własności operatora Newtona wynika istnienie dokładnie jednego punktu stałego odwzorowania Poincarégo wewnątrz kostki \mathbf{x} . Szerokość wyznaczonego wektora przedziałowego wynosi Diam $(N(\mathbf{x})) = (0.01163, 0.00082).$



Rys. 3.13. Orbity okresowe układu Roesslera: a) o okresie 1; b) o okresie 2

Do wyznaczenia N(\mathbf{x}) użyto metodę Lohnera (wersja IE) obliczania trajektorii układu ciągłego. Stosowano krok czasowy t = 0.02 i metodę Taylora czwartego rzędu.

W obliczeniach stosowano stały krok czasowy. Jeśli w pobliżu przecięcia z płaszczyzną Poincarégo dopuścimy zmianę kroku czasowego, to możemy uzyskać wektor przedziałowy o znacznie mniejszych wymiarach. Dopuszczając dziesięciokrotny podział kroku czasowego, uzyskano wynik

 $N(\mathbf{x}) = ([-8.381215, -8.380675], [0.0295826, 0.0295980])$

o szerokości $\text{Diam}(N(\mathbf{x})) = (0.00054, 1.54 \cdot 10^{-5}).$

Iterowanie operatora Newtona pozwala na znalezienie wąskiego wektora przedziałowego zawierającego orbitę okresową

$$\mathbf{x} = ([-8.380946, -8.380938], [0.0295899, 0.0295902])$$

o szerokości ${\rm Diam}({\bf x})=(8\cdot 10^{-6},3\cdot 10^{-7}).$ Jacobian odw
zorowania Poincarégo jest równy

$$P'(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} [-2.4051, -2.4041] & [1.96719, 1.96742] \\ [-0.001092, -0.001088] & [0.0008912, 0.0008929] \end{pmatrix}.$$

Macierz ta posiada rzeczywiste wartości własne. Wartości własne macierzy Jacobiego odwzorowania Poincarégo w punkcie stałym należą do następujących przedziałów

 $\lambda_1 \in [-2.40412, -2.40379], \quad \lambda_2 \in [-0.0001631, 0.0001632].$

127

Orbita okresowa ma zatem jeden kierunek stabilny i jeden niestabilny. Długość orbity okresowej układu ciągłego należy do przedziału $\mathbf{t} = 5.8810_{74}^{94}$.

 Tabela 3.10

 Porównanie operatorów przedziałowych dla $\mathbf{x} = ([-8.392, -8.377], [0.0294, 0.0305])$

Operator	Rozmiar obrazu
Newton (stały krok czasowy)	(0.01163, 0.00082)
Newton	$(0.00054, 1.54 \cdot 10^{-5})$
Krawczyk	$(0.00103, 2.94 \cdot 10^{-5})$
Hansen–Sengupta	$(0.000526, 1.532 \cdot 10^{-5})$

W tabeli 3.10 przedstawiono porównanie działania różnych operatorów przedziałowych. Widać, że dopuszczenie zmiany kroku czasowego daje znaczną poprawę wyników. Operator Krawczyka daje gorsze rezultaty niż pozostałe dwa operatory, których efekt działania jest porównywalny. Operator Hansena–Sengupty daje wynik o nieznacznie mniejszej szerokości niż operator Newtona.

Dalsze zmniejszenie szerokości przedziałów określających położenie orbity okresowej i jej parametrów można uzyskać, zmniejszając krok całkowania lub zwiększając rząd metody numerycznej.

3.6.2. Orbita okresowa o okresie 2

W przypadku pozostałych orbit okresowych przybliżone położenie orbity okresowej zostało znalezione za pomocą metody bliskich powrotów. Ta aproksymacja została następnie poprawiona przy użyciu metody Newtona.

W przypadku orbity o okresie 1 wielkość kostki \mathbf{x} , będącej otoczeniem aproksymacji \hat{x} , dobierano ręcznie metodą prób i błędów. Polega ona na tym, że startujemy najpierw z małego otoczenia punktu \hat{x} i obliczamy na tym otoczeniu przedziałowy operator Newtona N(\mathbf{x}). Nie zmieniamy wielkości kostki dla zmiennych, gdzie warunek zawierania jest spełniony (N_i(\mathbf{x}) $\subset \mathbf{x}_i$), natomiast pozostałe zmienne zwiększamy tak, aby dla nowego \mathbf{x}_i spełniony był warunek N_i(\mathbf{x}^{old}) $\subset \mathbf{x}_i^{\text{new}}$. Modyfikacja wektora przedziałowego \mathbf{x} jest kontynuowana, dopóki warunek N_i(\mathbf{x}) $\subset \mathbf{x}_i$ nie jest spełniony dla każdego *i*.

Aby uniknąć konieczności ręcznego dobierania wektora przedziałowego \mathbf{x} wokół znalezionej aproksymacji położenia orbity okresowej, zastosowano następującą zautomatyzowaną wersję obliczeń. Startujemy z punktowego wektora przedziałowego $\mathbf{x} = \hat{x}$ i obliczamy $\mathbf{y} = N(\mathbf{x})$.

Oczywiście warunek $\mathbf{y} \subset \mathbf{x}$ nie może być spełniony, ponieważ \mathbf{x} jest wektorem punktowym, zaś \mathbf{y} ma niezerowy wymiar z uwagi na błędy zaokrągleń, błędy numerycznej metody całkowania itd. Następnie obliczamy \mathbf{x} zgodnie z wzorem

$$\mathbf{x} = (1+\varepsilon)\mathbf{y} - \varepsilon\mathbf{y},\tag{3.42}$$

wyznaczamy $\mathbf{y} = N(\mathbf{x})$ i sprawdzamy warunek $\mathbf{y} \subset \mathbf{x}$. Jeśli jest on spełniony, to udowodniliśmy istnienie orbity okresowej w \mathbf{y} . W przeciwnym wypadku wybieramy

nowe **x** zgodnie z wzorem (3.42) i powtarzamy powyższe kroki. Obliczenia te kontynuujemy do momentu, gdy spełniony jest warunek $\mathbf{y} \subset \mathbf{x}$ lub też **x** jest tak duży, że nie udaje się obliczyć N(**x**). W drugim przypadku obliczenia zakończyły się porażką. W celu udowodnienia istnienia orbity okresowej można spróbować zmienić metodę wyznaczania N(**x**), krok całkowania lub rząd metody numerycznej.

Za pomocą procedury opisanej powyżej udowodniono istnienie orbity okresowej o okresie 2 (rys. 3.13b). Orbita okresowa $(x^{(1)}, x^{(2)})$ odwzorowania Poincarégo należy do następujących wektorów przedziałowych

$$\begin{aligned} x^{(1)} &\in \mathbf{x}^{(1)} = (-9.5198^{76}_{45}, 0.0290921^{59}_{29}), \\ x^{(2)} &\in \mathbf{x}^{(2)} = (-5.4240^{85}_{62}, 0.03108^{161}_{081}). \end{aligned}$$

Macierz Jacobiego odw
zorowania \mathbb{P}^2 obliczona na wektorze przedziałowym zawierającym orbitę okresową jest równa

$$(P^2)'(\mathbf{x}^{(1)}) = \begin{pmatrix} -3.51_{21}^{51} & 3.7_{294}^{322} \\ -0.00148_{07}^{25} & 0.00157_{23}^{41} \end{pmatrix}$$

Wartości własne macierzy Jacobiego w punkcie okresowym należą do następujących przedziałów $\lambda_1 \in [-3.5135, -3.5105], \lambda_2 \in [-0.001428, 0.001428]$. Znaleziona orbita okresowa jest orbitą hiperboliczną typu siodłowego.

Tabela 3.11

Porównanie zastosowania operatorów przedziałowych do dowodu istnienia orbity okresowej o okresie 2, $\mathbf{x}^{(1)} = (-9.519_8^9, 0.02909_1^3), \mathbf{x}^{(2)} = (-5.424_0^1, 0.03108_0^2)$

Metoda	$\operatorname{Diam}(\operatorname{N}(\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)}))$
Newton Standard	$(3.9581 \cdot 10^{-5}, 1.5261 \cdot 10^{-6})$
Krawczyk Standard	$(3.9663 \cdot 10^{-5}; 1.5245 \cdot 10^{-6})$
Hansen–Sengupta Standard	$(3.9580 \cdot 10^{-5}, 1.5230 \cdot 10^{-6})$
Newton Global	$(2.9737 \cdot 10^{-5}, 2.8738 \cdot 10^{-8}, 2.2034 \cdot 10^{-5}, 7.9674 \cdot 10^{-7})$
Krawczyk Global	$(2.9774 \cdot 10^{-5}, 2.8768 \cdot 10^{-8}, 2.2062 \cdot 10^{-5}, 7.9771 \cdot 10^{-7})$
Hansen–Sengupta Global	$(2.9723 \cdot 10^{-5}, 2.8753 \cdot 10^{-8}, 2.2033 \cdot 10^{-5}, 7.9673 \cdot 10^{-7})$

W przypadku orbit okresowych o okresie większym od 1 mamy możliwość użycia wersji standardowej lub globalnej operatorów przedziałowych. W tabeli 3.11 prezentujemy porównanie operatorów Newtona, Krawczyka oraz Hansena–Sengupty w wersji standardowej i globalnej. Widać wyraźnie, że wersja standardowa jest gorsza od wersji globalnej, zwłaszcza dla zmiennej x_3 . Różnice między wersją globalną i standardową rosną w miarę wzrostu długości orbity. Przy pewnej długości orbity dla wersji standardowej staje się niemożliwe wyznaczenie obrazu \mathbf{x} przez operator przedziałowy, nawet jeśli \mathbf{x} jest zbiorem punktowym. W konsekwencji sprawdzenie warunków istnienia orbity okresowej jest niemożliwe. Problemów tych pozbawiona jest wersja globalna, w której wystarczające jest obliczanie pierwszej iteracji kostki przez odwzorowanie Poincarégo.

3.6.3. Inne orbity okresowe

Używając tej samej metody, udowodniono również istnienie dłuższych orbit okresowych. Do dowodu istnienia stosowano wyłącznie wersję globalną operatorów przedziałowych, z uwagi na jej lepsze działanie.

Znalezione orbity okresowe o okresach 5, 7, 17 i 31 są przedstawione na rysunku 3.14. Są to hiperboliczne orbity okresowe typu siodłowego.



Rys. 3.14. Przykładowe orbity okresowe dla układu Roesslera

3.7. Obwód z gładką nieliniowością

Jako kolejny przykład rozważmy obwód elektroniczny z gładką nieliniowością opisany równaniem (1.39) dla wartości parametrów (1.41), dla których obserwowany jest atraktor typu *double–scroll*.

Wybrano odw
zorowanie Poincarégo wyznaczone przez płaszczyznę $x_2=0, \dot{x}_2>0.$ W
 obliczeniach stosowano krok czasowy $\tau=0,005,$ oraz metodę Lohnera (wersja IE) dla metody Taylora rzędu czwartego.

Za pomocą metody Newtona udowodniono istnienie trzech orbit okresowych o okresie 1:

- stabilna orbita okresowa położona na zewnątrz atraktora (rys. 3.15a),
- niestabilna orbita okresowa położona na zewnątrz atraktora (rys. 3.15b),
- niestabilna orbita okresowa położona wewnątrz atraktora (rys. 3.15c).

Należy zwrócić uwagę, że rysunki 3.15
a,
b są sporządzone w innej skali niż rysunki 3.15
c–f.



Rys. 3.15. Orbity okresowe obwodu z gładką nieliniowością położone na zewnątrz atraktora: a) stabilna orbita okresowa; b) niestabilna orbita okresowa; orbity okresowe położone wewnątrz atraktora: orbita o okresie c) p = 1; d) p = 3; e) p = 8; f) p = 12

Szczegóły obliczeń przedstawiono w tabeli 3.12. Podano wektor przedziałowy **x** zawierający punkt stały odwzorowania P, wyznaczony obraz $N(\mathbf{x})$, szerokości tych wektorów przedziałowych, okres orbity, macierz Jacobiego oraz jej wartości własne w punkcie stałym. Na podstawie obliczonych wartości własnych λ_1, λ_2 widać, że faktycznie pierwsza orbita okresowa jest stabilna, pozostałe zaś są niestabilne.

Tabela 3.12

Wielkości obliczone w trakcie dowodu istnienia orbit okresowych o okresie 1

	stabilna orbita okresowa na zewnątrz atraktora
x	([-3.232784113, -3.232781235], [8.260567025, 8.26056891])
$Diam(\mathbf{x})$	$(2.878 \cdot 10^{-6}, 1.885 \cdot 10^{-6})$
$N(\mathbf{x})$	([-3.232786335, -3.232783457], [8.260567121, 8.26056901])
$Diam(N(\mathbf{x}))$	$(2.878 \cdot 10^{-6}, 1.889 \cdot 10^{-6})$
t	[26.72621582, 26.726225586]
D'()	$\left(\left[-0.007055, -0.007045 \right] \left[-0.049529, -0.049511 \right] \right)$
$P(\mathbf{X})$	$\left(\left[0.0976720, 0.0976762 \right] \left[0.6860628, 0.6860706 \right] \right)$
λ_1, λ_2	$[-1.439 \cdot 10^{-5}, 1.441 \cdot 10^{-5}], [0.679, 0.679031]$
	niestabilna orbita okresowa na zewnątrz atraktora
x	([-2.56015231, -2.56015127], [2.57232381, 2.57232424])
$Diam(\mathbf{x})$	$(1.04 \cdot 10^{-6}, 4.3 \cdot 10^{-7})$
$N(\mathbf{x})$	([-2.56015252, -2.56015149]; [2.57232388, 2.57232431])
$Diam(N(\mathbf{x}))$	$(1.03 \cdot 10^{-6}, 4.3 \cdot 10^{-7})$
t	[36.4289599, 36.42897461]
D'()	([-0.16415921, -0.164046018] [-0.68293136, -0.68255108])
$P(\mathbf{x})$	[0.70554424, 0.70559801] $[2.93538452, 2.93556142]$
λ_1,λ_2	[-0.0002639, 0.0002667], [2.77110, 2.77164]
	niestabilna orbita okresowa wewnątrz atraktora
x	([-2.37149010, -2.37148945], [1.83995299, 1.83995314])
$Diam(\mathbf{x})$	$(6.5 \cdot 10^{-7}, 1.5 \cdot 10^{-7})$
$N(\mathbf{x})$	([-2.37149030, -2.37148971], [1.83995305, 1.83995318])
$Diam(N(\mathbf{x}))$	$(5.9 \cdot 10^{-7}, 1.3 \cdot 10^{-7})$
t	[36.25729980, 36.25733887]
D'()	$\left(\begin{bmatrix} 0.4873474, 0.48818916 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.04778205, 2.05142850 \end{bmatrix} \right)$
r (X)	$\left(\left[-1.49078981, -1.49053692 \right] \left[-6.26146385, -6.26036943 \right] \right)$
λ_1,λ_2	[-5.77489287, -5.77091987], [-0.00223, 0.00175]

Udowodniono również istnienie trzech orbit okresowych o wyższym okresie. Pokazane one zostały na rysunkach $3.15\rm d{-f}.$

W przypadku wszystkich orbit przybliżone położenie orbity okresowej uzyskano za pomocą standardowej metody Newtona startującej z losowych warunków początkowych.

Stwierdzono, że dla większości warunków początkowych metoda Newtona jest zbieżna do stabilnej orbity okresowej. W obliczeniach stosowano wersję globalną operatora Newtona oraz automatyczną metodę wyboru wektora przedziałowego \mathbf{x} .

3.8. Obwód Chuy

Jako kolejny przykład ciągłego układu dynamicznego rozważymy obwód Chuy opisany równaniem (1.36). Przeprowadzimy analizę uogólnionego odwzorowania Poincarégo, określonego na zbiorze $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ (porównaj równanie (2.77)).

Postaramy się odpowiedzieć na pytanie, czy możliwa jest ścisła analiza odwzorowania Poincarégo. Przedyskutujemy problemy, które pojawiają się przy obliczaniu obrazu kostki pod działaniem odwzorowania Poincarégo. Znajdziemy obszar, gdzie odwzorowane to jest dobrze zdefiniowane i ciągłe, jego część niezmienniczą oraz wszystkie krótkie orbity okresowe należące do tego obszaru. Pokażemy również, w jaki sposób można przeprowadzić dowód istnienia wielu orbit okresowych za pomocą kombinacji metody powrotów oraz przedziałowej metody Newtona.

3.8.1. Analiza uogólnionego odwzorowania Poincarégo

Obraz danego zbioru może być obliczony w sposób ścisły za pomocą metod opisanych w podrozdziale 2.6 tylko wtedy, gdy odwzorowanie Poincarégo jest ciągłe na tym zbiorze. Zwykle odwzorowanie Poincarégo nie jest wszędzie zdefiniowane. Nie jest ono zdefiniowane w punktach $x \in \Sigma$, które nigdy nie powracają do zbioru Σ . Przykładem może być punkt należący do przecięcia stabilnej podrozmaitości punktu stałego oraz zbioru Σ — jego trajektoria zmierza do punktu stałego i nigdy nie powraca do Σ . Nawet jeśli w punkcie x odwzorowanie Poincarégo P(x) jest dobrze zdefiniowane, niekoniecznie musi ono być ciągłe. Sytuacja taka może mieć miejsce, jeśli w punkcie x lub P(x) pole wektorowe jest równoległe do Σ (porównaj Twierdzenie 1.4).

W pobliżu punktów nieciągłości ścisłe obliczenie obrazu staje się bardzo skomplikowane. Im bliżej punktu nieciągłości, tym mniejsze są zbiory, które musimy rozważać i czas obliczeń staje się dłuższy. Znajomość obszarów nieciągłości jest punktem wyjściowym do ścisłej analizy odwzorowania Poincarégo.

Na rysunku 3.16 pokazana jest trajektoria odwzorowania P, wygenerowana przez komputer. Ponieważ numerycznie obserwowany atraktor przecina Σ_1 w punktach $x_3 > 0$ oraz przecina Σ_2 w punktach $x_3 < 0$, to możliwe jest przedstawienie trajektorii P na jednym rysunku, mimo że zbiór Σ składa się z dwóch hiperpłaszczyzn.

Najpierw opiszemy działanie odwzorowania Poincarégo dla punktów należących do atraktora dla $x \in \Sigma_2$ (dolna część rys. 3.16). Przecięcie atraktora z płaszczyzną Σ_2 składa się z czterech części I_1, I_2, I_3 oraz I_4 . Zbiory I_1 oraz I_2 stanowią w przybliżeniu linię prostą. Trajektorie startujące z $I_1 \cup I_2$ wchodzą w centralny obszar liniowy U_2 . Punkty $x \in I_1$ osiągają płaszczyznę Σ_1 , zaś ich obraz tworzy mniejszą spiralę w górnej półpłaszczyźnie ($P(x) \in J_3$). Punkty $x \in I_2$ wracają do Σ_2 i ich obraz tworzy większą spiralę w dolnej półpłaszczyźnie ($P(x) \in I_4$). Prawa część rysunku jest złożona z dwóch spiral (I_3 oraz I_4). Trajektorie startujące ze spiral wchodzą do obszaru U_3 i wracają do Σ_2 . Ich obrazy tworzą lewą część rysunku ($P(x) \in I_1 \cup I_2$). Przejścia te mogą zostać zapisane w następujący sposób $I_1 \to J_3, I_2 \to I_4, I_3 \cup I_4 \to I_1 \cup I_2$. Symetrycznie dla płaszczyzny Σ_1 mamy $J_1 \to I_3, J_2 \to J_4, J_3 \cup J_4 \to J_1 \cup J_2$.

Na podstawie dyskusji przedstawionej wcześniej łatwo można zidentyfikować obszar w Σ_2 , gdzie ścisłe obliczenie odwzorowania Poincarégo może być niemożliwe.



Rys. 3.16. Trajektoria odw
zorowania Poincarégo $P, x_3 > 0 \Rightarrow x \in \Sigma_1, x_3 < 0 \Rightarrow x \in \Sigma_2$

Granicę między zbiorami I_1 oraz I_2 stanowią punkty, których trajektorie są styczne do Σ_1 . W tych punktach ścisłe wyznaczenie odwzorowania Poincarégo nie jest możliwe. Zauważmy, że zbiór $I_1 \cup I_2$ jest spójny. Można się zatem spodziewać, że istnieją punkty należące do atraktora, dla których ścisłe obliczenia nie są możliwe.

Dla obwodu Chuy rozpoczynamy analizę od znalezienia części zbioru Σ , gdzie odwzorowanie P może być obliczone w sposób ścisły. Ponieważ pole wektorowe definiujące obwód Chuy jest symetryczne względem początku układu, to wystarczające jest przeprowadzenie analizy dla płaszczyzny Σ_2 .



Rys. 3.17. Odwzorowanie Poincarégo dla obwodu Chuy: a) zbiór V — kostki, dla których P może być obliczone w sposób ścisły; b) pozostałe kostki

Na Σ_2 będziemy używać układu współrzędnych odziedziczonego z \mathbb{R}^3 . Prostokąt $[-0.4, 0.3] \times [-5, 0] \subset \Sigma_2$ zawiera atraktor obserwowany numerycznie (rys. 3.16). Prostokąt ten został pokryty kostkami postaci $[i/400, (i + 1)/400] \times [j/40, (j + 1)/40]$, gdzie *i*, *j* są liczbami całkowitymi. Do obliczania obrazu kostki pod działaniem odwzorowania Poincarégo używano metody opisanej w podrozdziale 2.6. Kostki, dla których procedura wyznaczenia obrazu zakończyła się sukcesem, pokazane są na rysunku 3.17a. Zbiór tych kostek oznaczamy przez *V*.

Zbiór pozostałych kostek (obliczenia nie zostały zakończone powodzeniem) składa się z trzech części (rys. 3.17b).

Linia pionowa kostek zawiera punkty, dla których pole wektorowe jest równoległe do Σ_2 ($x_1 = 1$ oraz $\dot{x}_1 = 0$, tzn. $x_2 = 1 + G_a/G \approx -0.1383$).

Część w lewym dolnym rogu zawiera krzywą w Σ_2 złożoną z punktów x, dla których przecięcie trajektorii z płaszczyzną Σ_1 nie jest transwersalne. Ta krzywa oddziela punkty, dla których $P(x) \in \Sigma_2$, od punktów, dla których $P(x) \in \Sigma_1$. Odwzorowanie Poincarégo nie jest ciągłe na tej krzywej i obliczenie odwzorowania Poincarégo w sposób ścisły na tej krzywej nie jest możliwe.

Trzecią część stanowi spirala położona po prawej stronie. Zawiera ona punkty, dla których przecięcie trajektorii z płaszczyzną Σ_2 nie jest transwersalne w P(x) (spirala jest przeciwobrazem pionowej linii w Σ_2 , dla której $\dot{x}_1 = 0$). Obszar w środku spirali zawiera przecięcie stabilnej podrozmaitości punktu równowagi zawartego w obszarze U_3 z płaszczyzną Σ_2 . Odwzorowanie Poincarégo nie jest zdefiniowane w tym punkcie. Wyznaczenie obrazu punktu przez odwzorowanie Poincarégo w otoczeniu tego punktu jest trudne, ponieważ trajektorie startujące blisko podrozmaitości stabilnej spędzają długi czas w otoczeniu punktu równowagi.

Można zauważyć, że dla obwodu Chuy występują różnego rodzaju zjawiska uniemożliwiające znalezienie obrazu punktu przez odwzorowanie Poincarégo w sposób ścisły. Pierwsza część zbioru kostek przedstawionych na rysunku 3.17b nie jest szczególnie istotna dla analizy dynamiki układu chaotycznego, ponieważ atraktor obserwowany numerycznie nie przecina linii pionowej. Pozostałe dwie części mają jednak niepuste przecięcie z numerycznie obserwowanym atraktorem. Wynika stąd, że nawet jeśli ograniczymy analizę do pewnego otoczenia atraktora, to pełna analiza odwzorowania Poincarégo w tym otoczeniu nie będzie możliwa.

3.8.2. Krótkie orbity okresowe

W podrozdziale tym opiszemy wyniki poszukiwań orbit okresowych odwzorowania Poincarégo, dla obwodu Chuy. Wiadomo, że kombinacja przedziałowej metody Newtona oraz metody bisekcji pozwala na efektywne znalezienie wszystkich krótkich orbit okresowych dla dyskretnych układów dynamicznych.

Ponieważ odwzorowanie Poincarégo nie jest wszędzie ciągłe, to znalezienie wszystkich orbit okresowych nie jest możliwe. Punkty nieciągłości pojawiają się na skutek nietranswersalnych przecięć trajektorii z płaszczyznami definiującymi odwzorowanie Poincarégo.

W miejscach nieciągłości zastosowanie twierdzenia o istnieniu orbit okresowych jest niemożliwe, zaś w pobliżu punktu nieciągłości metody ścisłego obliczania obrazu

punktu pod działaniem odwzorowania Poincarégo stają się bardzo nieefektywne. Nie ma jednak przeszkód dla znalezienia wszystkich orbit okresowych zawartych w obszarze, gdzie odwzorowanie Poincarégo daje się obliczyć.

Z definicji uogólnionego odwzorowania Poincarégo wynika, że wszystkie orbity okresowe muszą mieć parzysty okres. Używając uogólnionej metody bisekcji oraz przedziałowej metody Newtona, znaleziono wszystkie najkrótsze orbity odwzorowania Poincarégo (tzn. orbity o okresie 2) należące do obszaru V. Udowodniono, że jest tylko jedna taka orbita okresowa. Punkt okresowy należy do wektora przedziałowego

 $(-0.3331144821_0^2, -4.239895115_4^6).$

Długość orbity okresowej układu ciągłego należy do przedziału 7.38058439⁹₇. Orbita okresowa układu ciągłego została przedstawiona na rysunku 3.18. Symetrycznie, istnieje druga orbita o okresie 2 przecinająca płaszczyznę Σ_1 .



Rys. 3.18. Orbita okresowa układu ciągłego odpowiadająca orbicie okresowej o okresie 2 dla uogólnionego odwzorowania Poincarégo, projekcja na płaszczyznę (x_1, x_2)

Znalezienie wszystkich orbit okresowych o wyższych okresach dla całego zbioru W nie jest możliwe z powodu długiego czasu obliczeń. Nie udało się znaleźć wszystkich orbit okresowych o okresie 4. W celu zredukowania czasu obliczeń ograniczono poszukiwania do obszaru zawierającego atraktor obserwowany numerycznie.

W tym celu trajektoria wygenerowana przez komputer została pokryta przez 15 346 kostek o wymiarach 0.001×0.01 (rys. 3.19a). Dla 204 kostek należących do 16 spójnych obszarów wyznaczenie odwzorowania Poincarégo zakończyło się niepowodzeniem. Kostki te są położone blisko przecięcia badanej trajektorii chaotycznej układu ze zbiorem punktów, gdzie odwzorowanie Poincarégo nie jest ciągłe. Zbiór W jest zdefiniowany jako suma kostek z pokrycia, dla których wyznaczenie obrazu przez odwzorowanie Poincarégo zakończone zostało sukcesem.

Na rysunku 3.19b pokazana jest część niezmiennicza zbioru W. Została ona znaleziona poprzez usunięcie kostek, które mają puste przecięcie ze zbiorem P(W) oraz kostek, których obraz ma puste przecięcie z W. Procedura usuwania kostek jest kontynuowana do momentu, gdy żadna kostka nie może zostać usunięta. Otrzymujemy w ten sposób zbiór o znacznie zredukowanej liczbie kostek w porównaniu ze zbiorem V. Dla zbioru Inv(W) możliwe staje się znalezienie wszystkich orbit okresowych o wyższych okresach.



Rys. 3.19. Odw
zorowanie Poincarégo dla obwodu Chuy: a) pokrycie trajektorii za pomocą kostek; b) część niezmiennicza zbior
uW

3.8.3. Poszukiwanie orbit okresowych

Jak pokazano w poprzednim podrozdziale, w przypadku układów ciągłych znalezienie wszystkich orbit okresowych o krótkich okresach może być niemożliwe. Przy analizie układów ciągłych musimy często ograniczyć się do dowodu istnienia wybranych orbit okresowych, bez pewności, czy nie istnieją inne krótkie orbity okresowe.

Metoda szukania orbit

W celu udowodnienia istnienia wielu orbit okresowych można zastosować połączenie metody bliskich powrotów poszukiwania orbit okresowych [76] oraz przedziałowej metody Newtona. Najpierw w symulacjach komputerowych znajduje się orbity pseudookresowe, czyli fragmenty trajektorii powracające w pobliże punktu startowego. Następnie używając klasycznej metody Newtona, znajduje się dobre oszacowanie położenia orbity okresowej, oraz konstruuje się wektor przedziałowy \mathbf{x} o środku w znalezionym punkcie i ustalonej średnicy. Wyznacza się $N(\mathbf{x})$ i sprawdza warunek $N(\mathbf{x}) \subset \mathbf{x}$. Jeśli założenie to jest spełnione, to istnienie orbity okresowej zostało udowodnione. W przeciwnym wypadku można ponowić obliczenia dla innej średnicy wektora \mathbf{x} .

W celu udowodnienia istnienia orbity okresowej o okresie n odwzorowania Poincarégo można zastosować przedziałową metodę Newtona do odwzorowania id – P^n (wersja standardowa). Dla dłuższych orbit okresowych zwykle macierz Jacobiego $(P^n)'(\mathbf{x})$ ma dużą średnicę i nie można sprawdzić założeń twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności zer [33]. W celu pokonania tych problemów używa się wersji globalnej, tzn. obliczamy wektor przedziałowy dla odwzorowania (3.21).

Dowód istnienia wielu orbit okresowych dla obwodu Chuy

Obecnie podamy wyniki zastosowania techniki opisanej powyżej do znalezienia oraz przeprowadzenia dowodu istnienia wielu orbit okresowych dla obwodu Chuy. Najpierw została wygenerowana składająca się z 60 000 punktów trajektoria odwzorowania Poincarégo. Poszukiwania orbit okresowych zostały ograniczone do orbit o okresie mniejszym niż 150.

Zostały znalezione orbity pseudookresowe, powracające w otoczenie punktu początkowego na odległość poniżej 0.005 z czasem powrotu mniejszym niż 150. Dla większości orbit pseudookresowych udowodniono istnienie prawdziwej orbity okresowej w ich bliskim otoczeniu. W kilku przypadkach metoda dowodu zawiodła. Przypadki te dotyczyły orbit okresowych, które wiele czasu spędzały w jednym z obszarów liniowych (długi czasu powrotu dla odwzorowania Poincarégo). Aby udowodnić istnienie takich orbit okresowych, należałoby wybrać większą liczbę płaszczyzn Σ_i , tak aby czasy powrotu były mniejsze.

Przeprowadzono również badania orbit pod kątem ich symetrii względem początku układu. Orbita okresowa $(x_1, x_2, \ldots, x_{2l})$ jest symetryczna względem początku układu, jeśli $x_1 = -x_{l+1}$. Ponieważ pole wektorowe jest symetryczne, to dla każdej niesymetrycznej orbity okresowej istnieje druga orbita okresowa symetryczna do tej orbity.



Rys. 3.20. Przykładowe orbity okresowe dla obwodu Chuy, rzut na płaszczyznę (x_1, x_3)

Ogółem znaleziono 1354 różne orbity okresowe o okresie mniejszym niż 150. Większość z tych orbit jest niesymetryczna, co można łatwo sprawdzić za pomocą warunku $\mathbf{x}_0 \cap (-\mathbf{x}_l) = \emptyset$. Jeśli warunek ten nie jest spełniony, to można podejrzewać, że orbita okresowa jest symetryczna. Aby udowodnić zachodzenie warunku symetrii, rozważa się odwzorowanie $H : (\mathbb{R}^m)^l \mapsto (\mathbb{R}^m)^l$

$$[H(z)]_k = \begin{cases} x_{k+1} - P(x_k) & \text{dla } k < l, \\ x_1 + P(x_k) & \text{dla } k = l, \end{cases}$$
(3.43)

gdzie $z = (x_1, x_2, ..., x_l)$. Jest oczywiste, że H(z) = 0 wtedy i tylko wtedy, gdy $P^l(x_1) = -x_1$. Wynika stąd, że jeśli z jest zerem odwzorowania H to $P^{2l}(x_1) = x_1$, czyli x_1 jest punktem okresowym o okresie 2l. Stwierdzono, że 8 orbit okresowych spełnia warunek symetrii. Pozostałe orbity okresowe są niesymetryczne. Położenie każdej z orbit okresowych zostało obliczone z dokładnością większą niż 10^{-7} .

Niektóre ze znalezionych orbit okresowych zostały pokazane na rysunku 3.20. Narysowane są wszystkie orbity okresowe o okresie mniejszym niż 45 (orbity (1)–(26)) i wszystkie znalezione symetryczne orbity okresowe (orbity (11), (13), (24), (26)–(28), (30) oraz (31)). Ich parametry zostały zebrane w tabeli 3.13.

Tabela 3.13

Przykładowe orbity okresowe dla obwodu Chuy, N jest numerem kolejnym orbity na rysunku 3.20, M jest numerem orbity w liście znalezionych orbit (lista została posortowana według długości orbity układu ciągłego), n jest okresem orbity okresowej uogólnionego odwzorowania Poincarégo P, n' jest liczbą punktów przecięcia orbity okresowej z płaszczyzną Σ_2 , S w piątej kolumnie oznacza, że znaleziona orbita okresowa jest symetryczna

N	M	n	n'	S	Okres	N	M	n	n'	S	Okres
1	1	2	1		7.38058439_7^9	19	35	8	4		38.779715_3^{91}
2	3	4	2		14.38443804_1^5	20	37	10	2		41.00009_1^4
3	5	4	2		21.330218_2^4	21	39	10	2		41.79856_5^7
4	7	6	3		21.6768157_0^2	22	41	10	5		42.9797918_5^9
5	9	4	2		24.70392_7^9	23	43	10	5		43.3956623_2^6
6	11	6	3		28.6270866_2^6	24	45	8	2	S	43.9766674_4^{96}
7	13	4	2		28.68369_6^8	25	46	8	2		44.1795015_1^6
8	15	8	4		29.0841154_4^6	26	48	8	2	S	44.556774_5^7
9	17	4	2		29.52941_2^4	27	135	16	4	S	60.168288_4^6
10	19	6	3		31.062129_4^9	28	136	16	4	S	60.267690_0^2
11	21	8	2	S	32.83175_0^2	29	193	12	4		66.802198_0^3
12	22	8	2		32.99894_5^7	30	567	24	6	S	99.12916_3^8
13	24	8	2	S	33.73813_1^3	31	580	24	6	S	99.49633_4^9
14	25	8	4		35.72253_7^9	32		160	48		790.0381_{89}^{97}
15	27	8	4		36.021545_1^3	33		186	58		829.6924_5^7
16	29	10	5		36.0750610_2^4	34		204	57		893.61_{599}^{603}
17	31	10	5		36.4559967_7^9	35		246	58		1076.9431_6^{92}
18	33	8	4		38.731208_2^{93}						

Podjęto również próbę udowodnienia istnienia dłuższych orbit okresowych. Cztery z nich zostały przedstawione na rysunku 3.20 (orbity (32)–(35)). Najdłuższa znaleziona orbita okresowa ma okres $T \approx 1076.94$, który jest ponad 100 razy dłuższy niż okres najkrótszej znalezionej orbity (o okresie $T \approx 7.38$). Pokazuje to, że technika dowodu oparta na globalnej wersji operatora Newtona pozwala na udowodnienie istnienia również długich orbit okresowych.

4. Dynamika symboliczna, entropia topologiczna

Istnienie nietrywialnej dynamiki symbolicznej oraz dodatniość entropii topologicznej oznaczają, że układ dynamiczny jest chaotyczny w sensie topologicznym, czyli że istnieją trajektorie, których zachowanie jest chaotyczne.

Jedną z metod znalezienia skomplikowanej dynamiki symbolicznej jest wyznaczenie tzw. podziału generującego (ang. generating partition) [48]. Jest to podział przestrzeni stanu na rozłączne zbiory o tej własności, że podział ten wraz z wszystkimi swoimi obrazami oraz przeciwobrazami dzieli przestrzeń stanu z dowolną dokładnością. Taki podział przestrzeni stanu wraz z macierzą przejścia pozwala na wzajemnie jednoznaczną charakteryzację trajektorii za pomocą ciągów symboli. Dla odwzorowania Bernoulliego (porównaj podrozdz. 1.2.3) podział taki jest zdefiniowany przez wybór punktu c = 0.5 oddzielającego zbiory N_1 i N_2 . W pracy [48] opisano metodę wyboru podziału bliskiego podziałowi generującemu. W przypadku bardziej skomplikowanych układów dynamicznych wyznaczenie podziału generującego w sposób ścisły nie jest możliwe, a zatem wszystkie wyniki uzyskane na tej podstawie można traktować jedynie jako przybliżenie.

Jedną z najczęściej stosowanych metod dowodzenia istnienia chaosu i dynamiki symbolicznej jest metoda Szylnikowa [114]. Przykład jej zastosowania jest pokazany w pracy [80], gdzie udowodniono za pomocą komputera istnienie dla obwodu Chuy orbity homoklinicznej punktu stałego dla pewnych (nieznanych) wartości parametrów należących do niewielkiego przedziału. Z istnienia orbity homoklinicznej wynika istnienie dynamiki symbolicznej na pewnych zbiorach położonych w okolicy orbity homoklinicznej.

Stosunkowo prosta metoda dowodu istnienia dynamiki symbolicznej oparta na spójności jest podana w pracy [57]. W pracach [84, 85] wprowadzono metodę dowodzenia dynamiki symbolicznej z wykorzystaniem teorii dyskretnego indeksu Conleya. Metody opisane w pracach [119, 120] stosują do dowodu istnienia dynamiki symbolicznej oraz orbit okresowych teorię indeksu punktu stałego. W niniejszej pracy opiszemy szczegółowo tę metodę.

Należy również wymienić metodę dowodu istnienia atraktora chaotycznego, co jest znacznie bardziej skomplikowanym zagadnieniem niż udowodnienie istnienia dynamiki symbolicznej. Niestety z uwagi na wymaganie hiperboliczności układu metoda ta daje się zastosować tylko do pewnej klasy układów dynamicznych. Za jej pomocą przeprowadzono w pracy [115] dowód istnienia atraktora Lorenza. W rozdziale tym opiszemy metodę znalezienia dynamiki symbolicznej oraz przeprowadzenia dowodu jej istnienia. Pokażemy również, jak na tej podstawie można w sposób ścisły znaleźć oszacowanie od dołu entropii topologicznej układu dynamicznego. W pierwszym kroku metody wybierane są topologiczne prostokąty N_1, N_2, \ldots, N_p . W celu udowodnienia istnienia dynamiki symbolicznej używana jest metoda relacji nakrywających [120]. Jest to metoda czysto topologiczna, w której nie wykorzystuje się oszacowań macierzy Jacobiego odwzorowania, które są niezbędne do przeprowadzenia dowodu hiperboliczności obecnej w podkowie Smale'a [89]. Relacje nakrywające między zbiorami N_k sprawdzane są przy użyciu arytmetyki przedziałowej. Następnie konstruowana jest macierz przejścia odpowiadająca podprzesunięciu skończonego typu na p symbolach. Macierz przejścia jest używana do uzyskania oszacowania od dołu na entropię topologiczną badanego odwzorowania.

Opiszemy problem wyboru położenia zbiorów N_k , które prowadzą do skomplikowanej dynamiki symbolicznej, a tym samym do dobrego oszacowania entropii topologicznej. W celu optymalnego wyboru zbiorów N_k wykorzystuje się algorytmy do znajdowania pokrycia zbioru punktów niewędrujących wybranego obszaru. Wyznaczona część niewędrująca pomaga przy wyborze zbiorów N_k , których położenie jest następnie ręcznie zmieniane tak, aby uzyskać możliwie bogatą dynamikę symboliczną.

Jako przykład rozważymy dwa proste dyskretne układy dynamiczne: odwzorowanie Hénona i odwzorowanie Ikedy oraz dwa układy ciągłe: obwód Chuy i układ Lorenza. Wykażemy istnienie dynamiki symbolicznej dla tych układów oraz wyprowadzimy oszacowania od dołu na ich entropię topologiczną. Porównamy uzyskane wyniki z oszacowaniami entropii topologicznej opartymi na liczbie krótkich orbit okresowych.

4.1. Istnienie dynamiki symbolicznej

Metoda topologiczna, którą będziemy wykorzystywać do dowodu istnienia dynamiki symbolicznej, jest oparta na pojęciu relacji nakrywającej [119, 120].

4.1.1. Relacje nakrywające

Dla prostoty opiszemy tę metodę dla układów wymiaru 2, choć metodę można zastosować dla układów dowolnego wymiaru. Relacje nakrywające są szczególnym przypadkiem ε -*łańcuchów* zaproponowanych w pracach [24, 25].

Definicja 4.1. Załóżmy, że $f: \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ jest odwzorowaniem ciągłym. Wybierzmy czworokąty $N, M \subset \mathbb{R}^2$. W każdym z czworokątów wybieramy dwa przeciwległe boki i nazywamy je "poziomymi". Pozostałe są nazywane "pionowymi". Mówimy, że N f-nakrywa M i używamy oznaczenia $N \stackrel{\text{f}}{\Rightarrow} M$, jeśli

- a) obraz N pod działaniem f ma puste przecięcie z poziomymi krawędziami M,
- b) obraz pionowych krawędzi N ma puste przecięcie z M i są one położone geometrycznie po przeciwnych stronach M.

Przykład relacji nakrywających jest przedstawiony na rysunku 4.1. Prostokąt N_1 f–nakrywa N_2 , jego obraz nie zawadza o poziome krawędzie N_2 i obrazy pionowych krawędzi N_1 leżą po przeciwnych stronach N_2 . Ponieważ obraz jednej z pionowych krawędzi N_2 zawadza o N_1 , to nie zachodzi relacja $N_2 \stackrel{\text{f}}{\Rightarrow} N_1$. Łatwo jednak zauważyć, że można zmniejszyć zbiór N_2 tak, aby zachodziły obie relacje nakrywające.



Rys. 4.1. Przykłady położenia zbiorów $f(N_i)$ względem N_j , pionowe krawędzie i ich obrazy są oznaczone grubą linią, N_1 *f*-nakrywa N_2 , N_2 nie nakrywa N_1 — obrazy poziomych krawędzi N_2 nie leżą geometrycznie po przeciwnych stronach N_1

W Definicji 4.1 nie jest istotne, że zbiory N, M są czworokątami. Mogą to być tzw. topologiczne czworokąty, w których krawędzie są dowolnymi krzywymi. W przykładach przedstawionych poniżej krawędzie czworokątów będą łamanymi.

W celu udowodnienia istnienia dynamiki symbolicznej dla odwzorowania f wybieramy p parami rozłącznych czworokątów N_1, N_2, \ldots, N_p i sprawdzamy istnienie nakryć topologicznych pomiędzy tymi zbiorami przy użyciu metod arytmetyki przedziałowej. W celu udowodnienia relacji nakrywającej $N_i \stackrel{f}{\Rightarrow} N_j$ zbiór N_i pokrywa się kostkami określonego rozmiaru. Następnie znajduje się obrazy tych kostek pod działaniem odwzorowania f i sprawdza warunki a) oraz b).

Najistotniejsza dla nas własność relacji nakrywających jest ujęta w postaci następującego twierdzenia [120, 45]

Twierdzenie 4.1. Niech $f_i: N_i \mapsto \mathbb{R}^2$ dla $i = 1, 2, \ldots, p$ będą ciągle. Załóżmy, że

$$N_1 \stackrel{\mathbf{t}_1}{\Rightarrow} N_2 \stackrel{\mathbf{t}_2}{\Rightarrow} N_3 \stackrel{\mathbf{t}_3}{\Rightarrow} \cdots \stackrel{\mathbf{t}_p}{\Rightarrow} N_{p+1}. \tag{4.1}$$

Wówczas istnieje punkt $x^{\star} \in N_1$ taki, że

$$f_k \circ f_{k-1} \circ \dots \circ f_1(x^*) \in N_{k+1} \quad dla \quad k = 1, \dots, p.$$

$$(4.2)$$

Jeśli dodatkowo ciąg tworzy pętlę (tzn. $N_{p+1} = N_1$), to x^{\star} można wybrać tak, aby

$$f_p \circ f_{p-1} \circ \dots \circ f_1(x^*) = x^*. \tag{4.3}$$

Powyższe twierdzenie mówi, że z istnienia ciągu relacji nakrywających wynika istnienie trajektorii realizującej ten ciąg nakryć. W ogólnej sytuacji dopuszczamy, że relacje nakrywające zachodzą dla różnych odwzorowań. Będziemy jednak stosować tę metodę dla przypadku, gdy wszystkie relacje nakrywające dotyczą tego samego odwzorowania lub ewentualnie jego złożeń f^n . Istnienie dynamiki symbolicznej można stwierdzić na podstawie następującego twierdzenia [45]:

Twierdzenie 4.2. Załóżmy, że czworokąty N_1, N_2, \ldots, N_p są parami rozłączne. Zdefiniujmy macierz kwadratową $A = (a_{ij})$ wymiaru $p \times p$

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & jeśli \ N_i \stackrel{f}{\Rightarrow} N_j, \\ 0 & w \ przeciwnym \ wypadku. \end{cases}$$
(4.4)

Wówczas f jest semisprzężone z podprzesunięciem skończonego typu na p symbolach o macierzy przejścia A.

Samo istnienie zbiorów N_i oraz pewnych relacji nakrywających między nimi nie oznacza istnienia nietrywialnej dynamiki symbolicznej. Warunkiem koniecznym istnienia skomplikowanej dynamiki symbolicznej jest, aby zbiór Σ_A ciągów symboli dopuszczonych przez macierz przejścia A miał nieskończenie wiele elementów.

4.1.2. Znajdowanie zbiorów N_i

Nie ma żadnej w pełni automatycznej metody znajdowania zbiorów N_i , na których zdefiniowana jest skomplikowana dynamika symboliczna. Najczęściej zbiory N_i są znajdowane metodą prób i błędów, przy wykorzystaniu informacji o położeniu krótkich orbit okresowych i ich stabilnych i niestabilnych kierunków [120, 34, 45].

W przykładach rozważanych poniżej przy wyborze zbiorów N_i wykorzystamy informację na temat części niezmienniczej obszaru, w którym poszukujemy dynamiki symbolicznej. Procedura konstrukcji zbiorów N_i składa się z kilku kroków. Najpierw wybierany jest zbiór zawierający interesującą dynamikę. Może to być zbiór pułapka dla danego układu dynamicznego. Jeśli nie potrafimy znaleźć zbioru dodatnio niezmienniczego, to możemy wybrać zbiór zawierający atraktor obserwowany numerycznie lub dowolny zbiór, w którym podejrzewamy istnienie skomplikowanych trajektorii. Następnie znajdujemy część niewędrującą tego zbioru za pomocą metody opisanej w podrozdziale 3.2.3. Zwykle znaleziony zbiór jest spójny i jego kształt nie pomaga w wyborze zbiorów N_i . Aby rozbić część niewędrującą na kilka kawałków, usuwamy część kostek i znajdujemy część niewędrującą tego, co pozostało. Często wynikiem tej procedury jest zbiór składający się z niewielkiej liczby spójnych kawałków, które po niewielkich modyfikacjach mogą służyć jako czworokąty N_i .

Jeśli dokonamy podziału pokrycia części niewędrującej na mniejsze kostki, to otrzymamy dokładniejsze oszacowanie zbioru punktów niewędrujących. Zwykle jest ono zbudowane z większej ilości składowych spójnych, co pozwala na znalezienie bardziej skomplikowanej dynamiki symbolicznej.

4.1.3. Istnienie orbit homoklinicznych i heteroklinicznych

W przypadku gdy pierwszy i ostatni element skończonego ciągu nakryć są samonakryciami (tzn. zbiór nakrywa sam siebie, $N \stackrel{\text{f}}{\Rightarrow} N$), to łatwo możemy skonstruować ciągi relacji nakrywających nieskończonej długości.
Z twierdzenia 4.1 wynika wówczas istnienie ciągu punktów realizującego ten nieskończony ciąg nakryć. Mówi o tym następujące twierdzenie [45]:

Twierdzenie 4.3. Jeśli

$$N_1 \stackrel{\mathrm{f}}{\Rightarrow} N_1 \stackrel{\mathrm{f}_1}{\Rightarrow} N_2 \stackrel{\mathrm{f}_2}{\Rightarrow} N_3 \stackrel{\mathrm{f}_3}{\Rightarrow} \cdots \stackrel{\mathrm{f}_m}{\Rightarrow} N_{m+1} \stackrel{\mathrm{g}}{\Rightarrow} N_{m+1}, \tag{4.5}$$

to istnieje ciąg $(x_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ taki, że

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k) \in N_1 & dla \quad k \leq 0, \\ x_{k+1} &= f_k(x_k) \in N_{k+1} & dla \quad k = 1, \dots, m, \\ x_{k+1} &= g(x_k) \in N_{m+1} & dla \quad k > m. \end{aligned}$$

Przy założeniach powyższego twierdzenia z zachodzenia pierwszej relacji nakrywającej $(N_1 \stackrel{f}{\Rightarrow} N_1)$ wynika istnienie punktu stałego odwzorowania f wewnątrz zbioru N_1 . Na podstawie ostatniej relacji nakrywającej $(N_{m+1} \stackrel{g}{\Rightarrow} N_{m+1})$ wiemy również, że istnieje punkt stały odwzorowania g wewnątrz zbioru N_{m+1} . Nie mamy jednak pewności, czy ciąg, którego istnienie jest tezą twierdzenia 4.3, jest zbieżny do tych punktów stałych. Nie wiemy zatem, czy uzyskana trajektoria jest trajektorią heterokliniczną (lub homokliniczną, jeśli $N_1 = N_{m+1}$ oraz f = g).

W celu udowodnienia istnienia orbity homoklinicznej lub heteroklinicznej musimy dodatkowo udowodnić, że jeśli dana trajektoria pozostaje nieskończenie długo wewnątrz zbioru N_{m+1} , to jest ona zbieżna do punktu stałego oraz że trajektoria, która nieskończenie długo przebywała w zbiorze N_1 , ma zbiór α -graniczny równy punktowi stałemu.

Okazuje się, że można to stwierdzić, wybierając zbiory N_1 oraz N_{m+1} w odpowiedni sposób i badając macierz Jacobiego odwzorowania f na tym zbiorze. Krawędzie czworokątów N_1 , N_{m+1} mają kierunki zgodne z wektorami własnymi macierzy f'w odpowiednim punkcie stałym. Na każdym z tych zbiorów wprowadzamy układ współrzędnych, w którym osie pokrywają się z wektorami własnymi, zaś początek układu jest w punkcie stałym. W tym układzie współrzędnych obliczamy macierz Jacobiego odwzorowania f, co daje zaburzoną macierz diagonalną postaci

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 & \mathbf{a}_2 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Aby metoda działała, zaburzenie musi być małe. W szczególności nie mogą być naruszone warunki hiperboliczności $|\mathbf{a}_2| < 1 < |\mathbf{a}_1|$.

Udowodnienie hiperboliczności równoległoboku ${\cal N}_k$ sprowadza się do sprawdzenia warunku

$$\varepsilon_1 \varepsilon_2 < (1 - \lambda_2)(\lambda_1 - 1),$$
(4.7)

gdzie $\lambda_1 = \inf\{|a_1|: a_1 \in \mathbf{a}_1\}, \lambda_2 = \sup\{|a_2|: a_2 \in \mathbf{a}_2\}, zas \varepsilon_1, \varepsilon_2$ są ograniczeniami od góry wartości bezwzględnych elementów niediagonalnych macierzy **A**.

Szczegóły są podane w pracy [45]. Znaleziono tam równoległoboki hiperboliczne dla punktów stałych x^{\pm} oraz dla orbity o okresie 2 odwzorowania Hénona. Udowodniono istnienie orbity heteroklinicznej łączącej punkt stały x^- z punktem stałym x^+ , nieskończenie wielu orbit homoklinicznych punktu x^+ oraz orbit homoklinicznych orbity okresowej o okresie 2.

Jeśli tylko pierwsza lub tylko ostatnia relacja nakrywająca jest samonakryciem, to w podobny sposób można udowodnić istnienie trajektorii, których zbiorem α lub ω -granicznym jest punkt stały.

4.2. Entropia topologiczna

Ścisłe oszacowanie entropii topologicznej układu dynamicznego jest skomplikowanym zagadnieniem. Jest to konsekwencją faktu, że standardowe definicje entropii topologicznej używające otwartych pokryć lub zbiorów ε -rozdzielonych nie nadają się dobrze do zaprojektowania ścisłych procedur numerycznych. Większość ścisłych wyników odnosi się do odwzorowań wymiaru 1. Część nieścisłych metod dla wyższych wymiarów jest rozszerzeniem metod dla układów jednowymiarowych [92]. Inne nieścisłe podejścia są oparte na zliczaniu orbit okresowych o ustalonym okresie lub konstruowaniu przybliżenia podziału Markowa. W pracy [30] podana jest ścisła metoda otrzymywania oszacowania od góry entropii topologicznej odwzorowania dla ustalonego skończonego podziału. Jest jednak trudne wyciągnięcie na tej podstawie jakichś wniosków na temat entropii topologicznej odwzorowania dla dowolnego podziału.

W niniejszym rozdziale przedstawimy metodę otrzymywania ścisłych oszacowań od dołu na entropię topologiczną na podstawie istnienia dynamiki symbolicznej dla badanego układu dynamicznego.

4.2.1. Oszacowania na podstawie istnienia dynamiki symbolicznej

Z faktu, że f jest semisprzężone z podprzesunięciem skończonego typu, można wyciągnąć wnioski na temat entropii topologicznej odwzorowania f.

Entropia topologiczna podprzesunięcia skończonego typu o macierzy przejścia A jest równa logarytmowi dominującej wartości własnej λ_1 macierzy A, tj. wartości własnej takiej, że $\lambda_1 \ge |\lambda_j|$ dla wszystkich wartości własnych macierzy A [103].

Entropia topologiczna odwzorowania semisprzężonego z podprzesunięciem jest nie mniejsza niż entropia topologiczna podprzesunięcia. Wynika to z faktu, że dla każdej dopuszczalnej sekwencji symboli o długości n istnieje trajektoria realizująca tę sekwencję. Trajektorie takie mogą służyć jako zbiory (n, ε) -rozdzielone, dla każdego ε mniejszego niż minimalna odległość między zbiorami N_i . Mamy zatem twierdzenie:

Twierdzenie 4.4. Niech zbiory N_i oraz macierz A będą takie jak w Twierdzeniu 4.2. Wówczas entropia topologiczna f jest nie mniejsza niż logarytm dominującej wartości własnej λ_1 macierzy A.

$$\mathbf{H}(f) \ge \log \lambda_1. \tag{4.8}$$

146

Twierdzenie 4.4 pozwala na oszacowanie entropii topologicznej w przypadku, gdy wszystkie nakrycia dotyczą tej samej iteracji odwzorowania f. Jeśli relacje nakrywające są określone dla różnych iteracji f, to można, wprowadzając pomocnicze zbiory M_k , przeliczyć wszystkie nakrycia na nakrycia dla pierwszej iteracji.

Otrzymany w ten sposób zbiór relacji nakrywających dla pierwszej iteracji daje macierz przejścia A. Jeśli zbiory pomocnicze M_k i zbiory N_i są parami rozłączne to mamy pewność, że trajektorie realizujące różne ciągi symboli są różne i wówczas dominująca wartość własna macierzy A szacuje od dołu entropię topologiczną f.

Jeśli zbiory N_i i M_k nie są parami rozłączne, to można niekiedy udowodnić, że dominująca wartość własna macierzy A jest oszacowaniem od dołu entropii topologicznej f. Technika dowodu oraz przykład dla odwzorowania Hénona podane są w pracy [45].

4.2.2. Oszacowania na podstawie liczby orbit okresowych

Liczba orbit okresowych jest ściśle związana z entropią topologiczną. Najbardziej znanym rezultatem w tym kontekście jest pochodzący od Bowena [12, 13] wynik dotyczący dyfeomorfizmów spełniających aksjomat A. Mówimy, że dyfeomorfizm f określony na rozmaitości X spełnia aksjomat A jeśli zbiór punktów niewędrujących Ω jest zbiorem hiperbolicznym oraz punkty okresowe f są gęste w Ω . Entropia topologiczna dyfeomorfizmu spełniającego aksjomat A jest równa [112, Twierdzenie 5.9.7, str. 258]

$$\mathbf{H}(f) = \limsup_{n \to \infty} \frac{\log \mathbf{P}_n}{n},\tag{4.9}$$

gdzie P_n oznacza liczbę punktów stałych odwzorowania f^n .

Do oszacowania entropii topologicznej na podstawie liczby orbit okresowych będziemy używać wzoru

$$\mathbf{H}_n(f) = \frac{\log \mathbf{P}_n}{n}.\tag{4.10}$$

Wykażemy, że w wielu przypadkach ciąg $H_n(f)$ jest dość szybko zbieżny i może służyć jako oszacowanie rzeczywistej entropii topologicznej układu. Na podstawie tak uzyskanej przybliżonej wartości entropii topologicznej będziemy oceniać jakość oszacowań ścisłych uzyskanych na podstawie istnienia dynamiki symbolicznej.

4.3. Odwzorowanie Hénona

Jako pierwszy przykład rozważymy odwzorowanie Hénona (1.31). Dla klasycznych wartości parametrów a = 1.4, b = 0.3 udowodnimy za pomocą metod opisanych w poprzednim podrozdziale istnienie różnych rodzajów dynamiki symbolicznej.

Problem istnienia dynamiki symbolicznej dla odwzorowania Hénona jest przedmiotem wielu prac naukowych. Przypomnijmy niektóre z wyników uzyskanych w sposób ścisły. W pracy [86] wykazano analitycznie, że podrozmaitości stabilna i niestabilna punktu stałego x^+ (zobacz (1.32)) przecinają się transwersalnie, co prowadzi do pełnej dynamiki symbolicznej na dwóch symbolach dla pewnej (nieznanej) iteracji odwzorowania h. W pracy [120] udowodniono za pomocą metody relacji nakrywających istnienie pełnej dynamiki symbolicznej dla h^7 . W pracy [113] przy użyciu teorii indeksu Conleya wykazano z pomocą komputera istnienie orbit okresowych o wszystkich okresach poza 3 i 5. Ten sam wynik udowodniono później za pomocą metody relacji nakrywających [34], kiedy wykazano istnienie dynamiki symbolicznej (przesunięcie złotego podziału) dla h^2 . Komputerowo wspierany dowód istnienia dynamiki podkowy dla 25 iteracji odwzorowania h przedstawiono w pracy [111]. Dowód oparty jest na własności śledzenia pseudoorbit. W pracy [45] udowodniono istnienie dynamiki symbolicznej na pięciu symbolach dla różnych iteracji odwzorowania h. W pracy [39] udowodniono istnienie różnych rodzajów dynamiki symbolicznej.

Przedstawimy obecnie wyniki uzyskane za pomocą metody relacji nakrywających.

4.3.1. Dynamika symboliczna

W pracy [120] udowodniono istnienie pełnego przesunięcia na dwóch symbolach dla odwzorowania h^7 (zobacz również [34]). Pełne przesunięcie odpowiada macierzy przejścia, której wszystkie elementy są niezerowe (nie ma przejść zabronionych)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4.11}$$

Dominująca wartość własna powyższej macierzy jest równa 2 i stąd otrzymujemy oszacowanie na entropię topologiczną dla odw
zorowania h

$$\mathcal{H}(h) \ge \frac{1}{7} \log 2 > 0.099. \tag{4.12}$$

W pracy [34] udowodnione zostało istnienie dynamiki symbolicznej na dwóch symbolach dla drugiej iteracji odwzorowania Hénona. Czworokąty N_1, N_2 są przedstawione na rysunku 4.2. Zachodzą następujące relacje nakrywające: $N_1 \stackrel{h^2}{\Rightarrow} N_1, N_1 \stackrel{h^2}{\Rightarrow} N_2$ oraz $N_2 \stackrel{h^2}{\Rightarrow} N_1$. Na tej podstawie konstruujemy macierz przejścia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

opisującą tzw. przesunięcie *zlotego podzialu*. Ponieważ dominująca wartość własna powyższej macierzy jest równa $\lambda_1 = 0.5 \cdot (\sqrt{5} + 1)$ (stąd nazwa przesunięcia), to mamy następujące oszacowanie na entropię topologiczną odwzorowania Hénona

$$\mathbf{H}(h) \ge \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{5} + 1}{2} > 0.24. \tag{4.14}$$

Czynnik $\frac{1}{2}$ bierze się z faktu, że relacje nakrywające dotyczą drugiej iteracji odwzorowania Hénona. W powyższych dwóch przykładach zbiory N_i zostały znalezione metodą prób i błędów na podstawie położenia punktów stałych i orbit o okresie 2.



Rys. 4.2. Dynamika symboliczna dla przekształcenia h^2 , czworokąty N_1 , N_2 oraz ich obrazy

W celu udowodnienia istnienia bardziej skomplikowanej dynamiki symbolicznej znaleziono pokrycie części niewędrującej zbioru $[-2, 2] \times [-2, 2]$ zawierającego numerycznie obserwowany atraktor. Pokrycie to przedstawione jest na rysunku 4.3a.



Rys. 4.3. Wybór zbiorów N_i do dowodu istnienia dynamiki symbolicznej dla odwzorowania Hénona: a) część niewędrująca zbioru $[-2, 2] \times [-2, 2]$, usunięte kostki oznaczono kolorem zielonym; b) część niewędrująca zbioru pozostałych kostek

Z pokrycia usunięto kostki położone na lewo od prostej $x_1 = -1$ (na rys. 4.3a są one zaznaczone kolorem zielonym) i znaleziono część niewędrującą powstałego w ten sposób zbioru. Wynik jest przedstawiony na rysunku 4.3b. Zbiór ten został użyty do konstrukcji zbiorów N_i . Ponieważ część niewędrująca składa się z 8 spójnych kawałków, to wybrano 8 czworokątów (rys. 4.4a). Dla tak wybranych zbiorów istnieją tylko cztery relacje nakrywające odpowiadające czterem niezerowym elementom w macierzy przejścia



Macierz przejścia jest niemal pusta, a zatem nie ma żadnej interesującej dynamiki symbolicznej zdefiniowanej na tych zbiorach. Widać jednak, że dla wielu par zbiorów N_i relacje nakrywające "prawie" zachodzą. Okazuje się, że można ręcznie poprawić położenie zbiorów N_i w taki sposób, aby zachodziło znacznie więcej relacji nakrywających. Poprawione zbiory N_i oraz ich obrazy pod działaniem odwzorowania h zostały przedstawione na rysunku 4.4b.

W ostatnim kroku udowodnione zostało zachodzenie relacji nakrywających pomiędzy wybranymi zbiorami. Odpowiadają one istnieniu dynamiki symbolicznej na ośmiu symbolach z następującą macierzą przejścia

Wynika stąd, że odw
zorowanie h jest semisprzężone z przesunięciem skończonego typu o macierzy przejścia (4.16) oraz że entropia topologiczna odw
zorowania Hénona jest ograniczona przez

$$H(h) > 0.382.$$
 (4.17)

Ten wynik jest lepszy niż oszacowanie

$$H(h) > 0.338,$$
 (4.18)

uzyskane na podstawie relacji nakrywających dla różnych iteracji odwzorowania h [45].



Rys. 4.4. Dynamika symboliczna na 8 symbolach, zbiory N_i (n=1,...,8) i ich obrazy $h(N_i)$: a) początkowe czworokąty; b) ulepszone czworokąty

Przeprowadzono wiele prób konstrukcji zbiorów N_i dla odw
zorowania Hénona, przy użyciu dokładniejszego rozdrobnienia części niewędrującej na kostki. Przykłady zbiorów, na podstawie których dokonywano wyboru czworokątów N_i , są przedstawione na rysunku 4.5. Najlepsze oszacowanie na entropię topologiczną otrzymano dla zbiorów przedstawionych na rysunku 4.6.



Rys. 4.5. Efekt pokrycia części niezmienniczej zbioru $[-1,2]\times[-2,2]$ za pomocą kostek o mniejszym rozmiarze

Udowodniono istnienie 46 relacji nakrywających między tymi zbiorami. Odpowiadają one następującej macierzy przejścia





Rys. 4.6. Dynamika symboliczna na 29 symbolach: a) zbiory N_i ; b) obrazy zbiorów N_i

153

W reprezentacji (4.19) macierzy o elementach ze zbioru $\{0,1\}$ zaczerniony kwadrat odpowiada elementowi niezerowemu. Obliczając dominującą wartość własną powyższej macierzy, dostajemy oszacowanie na entropię topologiczną

$$H(h) > 0.430.$$
 (4.20)

4.3.2. Oszacowanie entropii topologicznej na podstawie liczby orbit okresowych

Problem wartości entropii topologicznej odwzorowania Hénona dyskutowany był w wielu pracach [48, 49, 92]. Najczęściej w celu obliczenia przybliżonej wartości entropii topologicznej znajduje się podział przestrzeni stanu na zbiory odpowiadające różnym symbolom oraz konstruuje w sposób przybliżony zestaw dozwolonych przejść między tymi zbiorami. Pierwsze ścisłe oszacowanie entropii topologicznej pojawiło się wkrótce po ukazaniu się pracy Hénona [59]. Z istnienia orbity homoklinicznej punktu stałego [86] wynika, że entropia topologiczna odwzorowania Hénona jest dodatnia, co zgodnie z definicją oznacza, że odwzorowanie to jest chaotyczne w sensie topologicznym. Z istnienia dynamiki symbolicznej uzyskano różne dodatnie oszacowania od dołu entropii topologicznej [120, 34, 111, 45, 39]. Najlepsze z nich jest podane wzorem (4.20).

Obecnie użyjemy liczby wszystkich orbit okresowych o niskim okresie, wyznaczonej w rozdziale 3, do oszacowania rzeczywistej wartości entropii topologicznej. Na tej podstawie ocenimy jakość ścisłych oszacowań uzyskanych w poprzednim podrozdziale.



Rys. 4.7. Entropia topologiczna odwzorowania Hénona: a) liczba P_n punktów stałych h^n ; b) oszacowanie $H_n(h)$ entropii topologicznej na podstawie liczby krótkich orbit okresowych

Do obliczeń używamy danych z tabeli 3.1. Na rysunku 4.7a przedstawiona została w skali logarytmicznej liczba P_n punktów stałych odwzorowania h^n w funkcji n. Można zauważyć, że dla n > 10 wykres jest prawie liniowy. Jako oszacowania entropii topologicznej używamy wzoru (4.10). Wyniki zostały przedstawione na rysunku 4.7b (porównaj również tab. 3.1). Wielkość $H_n(h)$ ulega bardzo niewielkim zmianom dla $n \ge 10$. To pozwala nam postawić hipotezę, że entropia topologiczna odwzorowania Hénona jest bliska

$$H(h) \approx 0.465.$$
 (4.21)

Należy podkreślić, że oszacowanie to nie jest z żaden sposób ścisłe. Jest ono oparte na ścisłych wynikach dotyczących liczby orbit okresowych o niskim okresie. Nie wiemy jednak, jak zmienia się $H_n(h)$ dla większych *n* oraz czy w granicy $H_n(h)$ zmierza do entropii topologicznej H(h) (odwzorowanie Hénona nie spełnia aksjomatu A). Oszacowanie to stanowi jednak cenną wskazówkę przy szukaniu ścisłych oszacowań.

Na podstawie powyższych uwag możemy stwierdzić, że ścisłe oszacowanie (4.20) uzyskane ze skonstruowanej dynamiki symbolicznej jest bliskie rzeczywistej entropii odwzorowania Hénona. Znaleziona dynamika symboliczna odtwarza stosunkowo wiernie skomplikowaną dynamikę odwzorowania h.

4.4. Odwzorowanie Ikedy

Jako drugi przykład rozważmy odwzorowanie Ikedy opisane równaniem (1.33) dla parametrów o wartościach $p = 1, B = 0.9, \kappa = 0.4$.

Ponieważ dla $\alpha = 3$ wszystkie trajektorie zmierzają do jednego z punktów stałych, to nie istnieje żadna interesująca dynamika symboliczna dla tego przypadku. Poniżej przedstawimy analizę dla przypadku $\alpha = 6$. Dla $\alpha = 7$ można użyć tych samych metod w celu dowodu istnienia dynamiki symbolicznej oraz otrzymania ścisłych oszacowań od dołu na entropię topologiczną.

Dla rozważanego przypadku udowodnimy istnienie relacji nakrywających o różnym stopniu skomplikowania. Będą się one różniły liczbą zbiorów (liczbą symboli) oraz macierzami przejścia. Wyprowadzimy oszacowania na entropię topologiczną wynikające z istnienia poszczególnych dynamik symbolicznych oraz porównamy te wyniki z oszacowaniem entropii topologicznej na podstawie liczby krótkich orbit okresowych.

4.4.1. Dynamika symboliczna

Do znalezienia zbiorów N_i , na których jest zdefiniowana dynamika symboliczna, została użyta część niewędrująca obszaru pułapki (rys. 3.8). W celu rozbicia części niewędrującej na kawałki usunięto kostki, dla których y - x > 1 lub y - x < -2, i znaleziono część niezmienniczą tego, co pozostało. Zbiór ten został następnie użyty przy wyborze zbiorów N_i . Położenie zbiorów N_i było ręcznie modyfikowane, tak aby możliwie zachodziła możliwie duża ilość relacji nakrywających.

W ostatnim kroku sprawdzono w sposób ścisły zachodzenie relacji nakrywających, skonstruowano na tej podstawie macierz przejścia A oraz obliczono entropię topologiczną otrzymanej w ten sposób dynamiki symbolicznej.

Postępując według procedury opisanej powyżej, znaleziono kilka przykładów dynamiki symbolicznej dla odwzorowania Ikedy.



Rys. 4.8. Odwzorowanie Ikedy, $\alpha = 6$, zbiory N_i oraz ich obrazy $f(N_i)$: a) dynamika symboliczna na 4 symbolach; b) dynamika symboliczna na 7 symbolach

Dla dynamiki symbolicznej na czterech symbolach (rys. 4.8
a) macierz przejścia ma postać

$$A = \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ 1 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$
 (4.22)

Obliczając dominującą wartość własną macierzy przejścia otrzymujemy następujące oszacowanie na entropię topologiczną H(f) > 0.199.

Przykład z siedmioma zbiorami ${\cal N}_i$ jest pokazany jest na rysunku 4.8
b. Na podstawie macierzy przejścia

można otrzymać oszacowanie na entropię topologiczną H(f) > 0.401.

Najlepsze oszacowanie od dołu na entropię topologiczną uzyskano dla dynamiki symbolicznej na 18 symbolach przy liczbie relacji nakrywających równej 29. Odpowiadające jej zbiory N_i przedstawione są na rysunku 4.9.

Macierz przejścia ma postać



a entropię topologiczną na tej podstawie można oszacować przez

$$H(f) > 0.485.$$
 (4.25)

Uzyskane oszacowanie jest najlepszym znanym ścisłym oszacowaniem entropii topologicznej tego odwzorowania.



Rys. 4.9. Odwzorowanie Ikedy, $\alpha = 6$, dynamika symboliczna na 18 symbolach: a) zbiory N_i ; b) obrazy $f(N_i)$

4.4.2. Oszacowanie entropii topologicznej na podstawie liczby orbit okresowych

W poprzednim podrozdziale uzyskano oszacowanie entropii topologicznej dla odwzorowania Ikedy na podstawie istnienia dynamiki symbolicznej zanurzonej w tym odwzorowaniu. Porównamy obecnie ten wynik z nieścisłym oszacowaniem entropii topologicznej uzyskanym na podstawie liczby krótkich orbit okresowych.

Podobnie jak dla odwzorowania Hénona używamy wzoru (4.10) do oszacowania entropii topologicznej. Wyniki dotyczące liczby znalezionych orbit okresowych i oszacowania na tej podstawie entropii topologicznej $H_n(f) = \log(P_n)/n$ dla $\alpha = 3, 6, 7$ są zebrane w tabeli 4.1 i przedstawione na rysunku 4.10.

Tabela 4.1

Odw
zorowanie Ikedy. Q_n — liczba orbit okresowych o okresi
en, P_n — liczba punktów stałych odw
zorowania $f^n,$ H_n = $n^{-1} \log(\mathbf{P}_n)$ — oszacowanie entropii topologicznej

	$\alpha = 3$		$\alpha = 6$			$\alpha = 7$			
n	\mathbf{Q}_n	\mathbf{P}_n	H_n	Q_n	\mathbf{P}_n	H_n	\mathbf{Q}_n	\mathbf{P}_n	H_n
1	3	3	1.0986	3	3	1.0986	3	3	1.0986
2	0	3	0.5493	1	5	0.8047	3	9	1.0986
3	0	3	0.3662	2	9	0.7324	2	9	0.7324
4	0	3	0.2747	3	17	0.7083	3	21	0.7611
5	0	3	0.2197	4	23	0.6271	4	23	0.6271
6	0	3	0.1831	7	53	0.6617	7	57	0.6738
7	0	3	0.1569	10	73	0.6129	14	101	0.6593
8	0	3	0.1373	14	129	0.6075	20	181	0.6498
9	0	3	0.1221	26	243	0.6103	40	369	0.6568
10	0	3	0.1099	46	485	0.6184	66	689	0.6535
11	0	3	0.0999	76	839	0.6120	104	1147	0.6404
12	0	3	0.0916	110	1385	0.6028	216	2661	0.6572
13	0	3	0.0845	194	2525	0.6026			
14	0	3	0.0785	317	4513	0.6011			
15	0	3	0.0732	566	8519	0.6033			

Dla $\alpha = 3$ mamy tylko trzy punkty stałe i żadnych innych orbit okresowych. Wszystkie inne trajektorie zmierzają do jednego z punktów stałych. Jasne jest, że entropia topologiczna odwzorowania Ikedy dla $\alpha = 3$ jest równa zero. Aproksymacja entropii topologicznej na podstawie liczby punktów stałych f^n zmierza do 0.

Dla $\alpha=6$ aproksymacja ${\rm H}_n(f)$ stabilizuje się. To pozwala na postawienie hipotezy, że entropia topologiczna odwzorowania Ikedy dla $\alpha=6$ jest w przybliżeniu równa

$$\mathbf{H}(f) \approx 0.6. \tag{4.26}$$

Dla $\alpha = 7$ mamy więcej orbit okresowych niż dla $\alpha = 6$. W związku z tym otrzymujemy wyższe oszacowania na entropię topologiczną.



Rys. 4.10. Odwzorowanie Ikedy. Oszacowanie entropii topologicznej na podstawie liczby krótkich orbit okresowych dla $\alpha=3,6,7$

Aproksymacja stabilizuje się wokół $H(f) \approx 0.65$. Okazuje się, że choć w symulacjach obserwuje się jedynie okresowe zbiory graniczne, to dynamika z topologicznego punktu widzenia jest bardziej skomplikowana niż dla przypadku $\alpha = 6$. Ta skomplikowana dynamika jest skoncentrowana na zbiorze, który odpycha trajektorie (zbiór chaotyczny jest repelerem).

4.5. Obwód Chuy

Opublikowano wiele prac dotyczących dynamiki obwodu Chuy oraz dowodu istnienia chaosu w tym obwodzie. Geometryczna struktura atraktora została opisana w pracy [81]. Pierwsze próby dowodu istnienia chaosu pojawiły się w pracy [82]. Po wprowadzeniu przybliżenia dotyczącego odwzorowania powrotu udowodniono istnienie orbity homoklinicznej. Pełny dowód istnienia chaosu w sensie Szylnikowa został przeprowadzony w pracy [80]. Wykazano istnienie orbity homoklinicznej dla pewnych wartości parametrów należących do niewielkiego przedziału.

W pracy [31] wykazano istnienie dynamiki symbolicznej dla obwodu Chuy. Przedstawimy obecnie skrótowo ten rezultat.

4.5.1. Istnienie dynamiki symbolicznej

Na płaszczyźnie Σ_2 wybieramy osiem punktów

$$\begin{split} &A_1 = (-0.1950, -2.6942956550), \ &A_2 = (-0.1761, -2.2243882059), \\ &A_3 = (-0.2376, -2.9659317744), \ &A_4 = (-0.2410, -3.2489461290), \\ &A_5 = (-0.3181, -4.1785885539), \ &A_6 = (-0.3315, -4.0981421985), \\ &A_7 = (-0.3597, -4.4381670543), \ &A_8 = (-0.3472, -4.5294652668), \end{split}$$

160

leżących na dwóch prostych równoległych

$$x_3 = (x_2 \cdot 1.253 - 0.0105) \cdot 9.623, \tag{4.27a}$$

$$x_3 = (x_2 \cdot 1.253 - 0.03565) \cdot 9.623. \tag{4.27b}$$

Zbiory N_1 i N_2 definiujemy jako czworokąty $A_5A_6A_7A_8$ oraz $A_1A_2A_3A_4$. Są one przedstawione na rysunku 4.11. Krawędzie czworokątów N_1 oraz N_2 zawarte w prostych (4.27) nazywamy "poziomymi", pozostałe zaś "pionowymi". Proste (4.27) definiują pas, który określamy literą S.



Rys. 4.11. Czworokąty N_1 , N_2 , dla których udowodniono zachodzenie relacji nakrywających

Oznaczmy przez \overline{P} odwzorowanie powrotu zdefiniowane przez półpłaszczyznę $\Sigma_2^- = \{x \colon x_1 = 1, \dot{x}_1 < 0\}.$

W pracy [31] wykazano, że odwzorowanie \overline{P} jest ciągłe na zbiorze $N_1 \cup N_2$ oraz że obrazy krawędzi N_1 i N_2 są zawarte we wnętrzu pasa S. Wykazano również, że obrazy pionowych boków N_1 leżą po przeciwnych stronach zbioru $N_1 \cup N_2$, zaś obrazy pionowych boków N_2 po przeciwnych stronach N_1 .

W ten sposób udowodniono, że pod działaniem \bar{P} czworokąt N_1 nakrywa N_2 i samego siebie, zaś N_2 nakrywa N_1 . Wynika stąd, że podprzesunięcie skończonego typu o macierzy przejścia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.28}$$

jest zanurzone w \overline{P} .

4.5.2. Oszacowanie entropii topologicznej odwzorowania Poincarégo

Ponieważ na zbiorze $N_1 \cup N_2$ odwzorowanie \overline{P} jest równe dwukrotnemu złożeniu odwzorowania powrotu P wyznaczonego przez zbiór $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ (zobacz podrozdz. 2.9), to z istnienia dynamiki symbolicznej wynika, że entropia topologiczna odwzorowania P jest oszacowana od dołu przez

$$\mathcal{H}(P) \ge \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sqrt{5}}{2} > 0.24. \tag{4.29}$$

Obecnie przedstawimy oszacowanie entropii topologicznej odw
zorowania ${\cal P}$ na podstawie liczby orbit okresowych.

Z istnienia dynamiki symbolicznej na zbiorach N_1 , N_2 wynika, że dla każdego skończonego ciągu symboli $(a_1, a_2 \ldots, a_n)$, $a_k \in \{0, 1\}$, który po zamknięciu w cykl nie zawiera podciągu (1, 1), istnieje orbita okresowa (x_1, x_2, \ldots, x_n) taka, że $x_i \in N_{a_i+1}$ dla $i = 1, \ldots, n$. Można udowodnić, że liczba dozwolonych ciągów o długości n (każdemu z nich odpowiada inny punkt okresowy) jest równa

$$\mathbf{P}_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n + (1-\sqrt{5})^n}{2^n}.$$
(4.30)

Liczba orbit okresowych o okresie n oraz liczba punktów stałych odwzorowania \bar{P}^n wynikająca z istnienia dynamiki symbolicznej jest podana w tabeli 4.2. Podano również wszystkie (z dokładnością do permutacji) dozwolone okresowe ciągi symboli o długości n.

Tabela 4.2

Liczba \mathbf{Q}_n orbit okresowych o okresi
enoraz liczba \mathbf{P}_n punktów stałych odw
zorowania \bar{P}^n wynikających z istnienia dynamiki symbolicznej

n	\mathbf{Q}_n	\mathbf{P}_n	Dozwolone okresowe ciągi symboli o długości n
1	1	1	(0)
2	1	3	(0,1)
3	1	4	(0, 0, 1)
4	1	7	(0, 0, 0, 1)
5	2	11	(0,0,0,0,1), (0,1,0,0,1)
6	2	18	(0, 0, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 0, 1)
7	4	29	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 0, 0, 1),
			(0, 0, 1, 0, 1, 0, 1)
8	5	47	(0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 1),
			(0, 1, 0, 1, 0, 0, 0, 1), (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1)
9	8	76	
10	11	123	
11	18	199	
12	25	322	

Opiszemy, w jaki sposób można przeliczyć liczbę punktów okresowych odwzorowania \overline{P} na liczbę odpowiadających im punktów okresowych odwzorowania P. Orbita okresowa o okresie n odwzorowania \overline{P} odpowiada orbicie okresowej o okresie 2n odwzorowania P. Dla każdej orbity okresowej odwzorowania \overline{P} istnieje symetryczna orbita okresowa przecinająca płaszczyznę Σ_1 . Zatem jeśli liczba punktów okresowych o okresie n odwzorowania \overline{P} wynosi k, to odpowiada jej liczba 4k punktów okresowych o okresie 2n dla odwzorowania P. Dane dotyczące liczby orbit okresowych odwzorowania P wynikające z istnienia dynamiki symbolicznej są zestawione w tabeli 4.3.

Tabela 4.3

Liczba Q_n orbit okresowych odwzorowania P, liczba P_n punktów stałych P^n oraz oszacowanie H_n entropii topologicznej odwzorowania P na podstawie liczby orbit okresowych: wynikających z istnienia dynamiki symbolicznej ("DS"), znalezionych za pomocą metody bliskich powrotów ("BP")

n		DS	BP			
	\mathbf{Q}_n	\mathbf{P}_n	H_n	\mathbf{Q}_n	\mathbf{P}_n	H_n
2	2	4	0.6931	2	4	0.6931
4	2	12	0.6212	10	44	0.9460
6	2	16	0.4621	6	40	0.6148
8	2	28	0.4165	30	284	0.7061
10	4	44	0.3784	24	244	0.5497
12	4	72	0.3564	90	1160	0.5880
14	8	116	0.3395	62	872	0.4836
16	10	188	0.3273	124	2268	0.4829
18	16	304	0.3176	74	1372	0.4013
20	22	492	0.3099	164	3564	0.4089
22	36	796	0.3036	98	2160	0.3490
24	50	1288	0.2984	172	5528	0.3591
26	80	2084	0.2939	102	2656	0.3033
28	116	3372	0.2901	140	4832	0.3030
30	180	5456	0.2868	94	3100	0.2680
32	270	8828	0.2839	100	5468	0.2690
34	420	14284	0.2814	36	1228	0.2092
36	632	23112	0.2791	20	3212	0.2243
38	984	37396	0.2771	4	156	0.1329
40	1500	60508	0.2753	2	3884	0.2066
42	2328	97904	0.2736	0	908	0.1622
44	3582	158412	0.2721	0	2200	0.1749
46	5572	256316	0.2707	0	4	0.0301
48	8610	414728	0.2695	0	7512	0.1859
50	13420	671044	0.2683	0	244	0.1099

Ponieważ odwzorowanie P ma orbity okresowe wyłącznie o parzystych okresach, to wypisane są wyniki jedynie dla parzystych n. Podano liczbę orbit okresowych o okresie n, liczbę punktów stałych odwzorowania P^n wynikających z istnienia dynamiki symbolicznej oraz oszacowanie entropii topologicznej na podstawie wzoru (4.10). W tej samej tabeli zestawiono również wyniki uzyskane na podstawie liczby orbit okresowych znalezionych w podrozdziale 3.8.3 za pomocą metody bliskich powrotów. Oszacowanie entropii topologicznej w funkcji n dla obu przypadków jest przedstawione również na rysunku 4.12.

Można zauważyć, że $Q_2^{(SD)} = Q_2^{(BP)}$, co odpowiada faktowi, że dwie najkrótsze orbity okresowe są wykryte przez obie metody. Widać, że dla małych *n* liczba znalezionych orbit okresowych jest znacznie większa niż liczba orbit okresowych wynikająca z istnienia dynamiki symbolicznej, $Q_n^{(SD)} < Q_n^{(BP)}$ dla $n = 4, 6, \ldots, 28$. Różnica jest szczególnie duża dla małych *n* (rys. 4.12). Jest to zrozumiałe, jeśli weźmiemy pod uwagę fakt, iż zbiory N_1 i N_2 obejmują jedynie niewielką część atraktora. W szczególności nie leżą w nich żadne orbity okresowe, które przecinają równocześnie obie płaszczyzny Σ_1 i Σ_2 . Należy się zatem spodziewać, że entropia topologiczna odwzorowania *P* jest znacznie większa niż ścisłe oszacowanie H(P) > 0.24 uzyskane na podstawie istnienia dynamiki symbolicznej.



Rys. 4.12. Oszacowanie entropii topologicznej odwzorowania P na podstawie liczby orbit okresowych: wynikających z istnienia dynamiki symbolicznej (DS), znalezionych za pomocą metody bliskich powrotów (BP)

Oszacowanie $H_n(P)^{(DS)}$ stabilizuje się w okolicy 0.24, natomiast oszacowanie $H_n(P)^{(BP)}$ maleje znacznie szybciej wraz ze wzrostem n. Dla $n \ge 30$ zachodzi warunek $Q_n^{(SD)} > Q_n^{(BP)}$, tzn. znaleziono mniej orbit okresowych niż to wynika z istnienia dynamiki symbolicznej. Jest to spowodowane dwoma faktami.

Po pierwsze w poszukiwaniach ograniczono się do orbit okresowych układu ciągłego krótszych niż 150. Po drugie nie znaleziono wszystkich orbit okresowych o okresie mniejszym niż 150. W metodzie bliskich powrotów szanse na znalezienie dłuższej orbity okresowej są małe, zwłaszcza jeśli ta orbita jest położona w pobliżu krótkiej orbity okresowej.

Jest również interesujące, że liczba $P_2^{(BP)}$ znalezionych punktów okresowych wykazuje naprzemienne oscylacje. W efekcie oszacowanie $H_n(P)^{(BP)}$ dla *n* podzielnych przez 4 jest większe niż dla n-2 oraz n+2. Wydaje się prawdopodobne, że supremum we wzorze (4.9) jest osiągane w granicy przy k = 4n.

4.6. Układ Lorenza

Pierwsze ścisłe wyniki dotyczące istnienia chaosu w sensie topologicznym w równaniu Lorenza pochodzą z pracy [57], gdzie układ Lorenza jest rozważany dla wartości parametrów s = 10, r = 76, q = 9 oraz [84] dla s = 45, r = 54, q = 10. Autorzy udowodnili w tych pracach istnienie pewnego rodzaju dynamiki symbolicznej.

W pracy [44] udowodnono istnienie dynamiki symbolicznej dla odwzorowania Poincarégo w układzie Lorenza (1.46) dla standardowych wartości. Wykorzystano do tego metodę ścisłego całkowania równania różniczkowego opartą na normach logarytmicznych. W niniejszym rozdziale wykażemy ten fakt za pomocą metody Lohnera oraz dokonamy porównania różnych metod obliczania w sposób ścisły trajektorii ciągłego układu dynamicznego.

Najbardziej kompletne wyniki na temat układu Lorenza dla standardowych wartości parametrów zostały przedstawione w pracy [115]. Wykazano tam istnienie atraktora chaotycznego dla układu Lorenza.

4.6.1. Istnienie dynamiki symbolicznej

Rozważmy podzbiór płaszczyzny

$$\Sigma = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \colon x_3 = r - 1, \dot{x}_3 < 0 \}.$$

Niech P będzie odwzorowaniem powrotu wyznaczonym przez zbiór Σ . W zbiorze Σ wybieramy cztery prostokąty N_1 , N_2 , N_3 , N_4 przedstawione na rysunku 4.13a, dla których wykażemy istnienie dynamiki symbolicznej. Zbiory N_i są formalnie zdefiniowane jako prostokąty o współrzędnych

$$\begin{split} N_1 &= \overline{o(0.4,6)o(1.6,6)o(1.6,-6)o(0.4,-6)}, \\ N_2 &= \overline{o(0.9,6)o(3.3,6)o(3.3,-6)o(0.9,-6)}, \\ N_3 &= \overline{o(-0.4,6)o(-1.6,6)o(-1.6,-6)o(-0.4,-6)}, \\ N_4 &= \overline{o(-0.9,6)o(-3.3,6)o(-3.3,-6)o(-0.9,-6)}, \end{split}$$

gdzie *o* jest obrotem o kąt $\theta = 7\pi/18$

$$o(x_1, x_2) = (x_1 \cos \theta - x_2 \sin \theta, x_1 \sin \theta + x_2 \cos \theta).$$

$$(4.31)$$

Zauważmy, że prostokąty N_3 i N_4 są symetryczne do prostokątów N_1 i N_2 względem początku układu współrzędnych (rys. 4.13a).

Jako pionowe krawędzie prostokątów N_i wybieramy odcinek o(0.4, 6)o(0.4, -6)oraz krawędzie równoległe do niego. Pas L definiujemy jako domknięty pas zawarty między prostymi równoległymi o(0.4, 6)o(1.6, 6) i o(0.4, -6)o(1.6, -6).

Przy pomocy komputera udowodnione zostało następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.5. Odwzorowanie P jest dobrze zdefiniowane i ciągle na $N_1 \cup N_2$. Zachodzą następujące relacje nakrywające: $N_1 \stackrel{\text{P}}{\Rightarrow} N_2$, $N_1 \stackrel{\text{P}}{\Rightarrow} N_4$, $N_2 \stackrel{\text{P}}{\Rightarrow} N_3$. W celu udowodnienia pierwszej części Twierdzenia 4.5 pokryto zbiór $N_1 \cup N_2$ kostkami i dla każdej z nich obliczono obraz przez odwzorowanie Poincarégo, dowodząc w tej sposób, że P jest ciągłe na $N_1 \cup N_2$.

Do dowodu drugiej części pokryto krawędzie kostkami, obliczono obrazy tych kostek i sprawdzono, że położenie tych obrazów względem zbiorów N_i odpowiada zachodzeniu odpowiednich relacji nakrywających. Pokrycie krawędzi prostokątów N_1 i N_2 za pomocą kostek oraz obliczone obrazy tych kostek przez odwzorowanie Poincarégo zostały przedstawione na rysunku 4.13.



Rys. 4.13. Dynamika symboliczna dla odwzorowania Lorenza: a) prostokąty N_1 , N_2 , N_3 , N_4 ; b) pokrycie "pionowych" krawędzi N_1 kostkami i ich obraz przez odwzorowanie Poincarégo (obraz N_1 nakrywa N_2 i N_4); c) pokrycie "pionowych" krawędzi N_2 kostkami i ich obraz przez odwzorowanie Poincarégo (obraz N_2 nakrywa N_3); d) pokrycie "poziomych" krawędzi $N_1 \cup N_2$ kostkami i ich obraz przez odwzorowanie Poincarégo (obraz zawarty w pasie L)

Warto zwrócić uwagę, że w celu udowodnienia, iż obraz zbioru $N_1 \cup N_2$ jest zawarty w pasie L, wystarczy pokazać, że warunek ten zachodzi dla brzegu zbioru.

Warunek dla całego zbioru wynika z ciągłości i różnowartościowości odwzorowania P. Takie usprawnienie jest istotne ze względów obliczeniowych. Sprawdzenie, że P jest zdefiniowane na zbiorze jest znacznie mniej czasochłonne niż sprawdzenie, że obraz zbioru jest zawarty w pasie L.

Z symetrii układu dynamicznego i zbiorów N_i wynika, że odw
zorowanie Poincarégo P jest dobrze zdefiniowane i ciągłe n
a $N_3 \cup N_4$ oraz że zachodzą relacje nakrywające
 $N_3 \stackrel{\mathrm{P}}{\Rightarrow} N_2, N_3 \stackrel{\mathrm{P}}{\Rightarrow} N_4, N_4 \stackrel{\mathrm{P}}{\Rightarrow} N_1.$

Relacje nakrywające, których istnienie wykazano, odpowiadają następującej macierzy przejścia

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
 (4.32)

Z istnienia relacji nakrywających wynika istnienie punktu okresowej dla każdego okresowego ciągu symboli dozwolonego przez macierz przejścia A oraz semisprzężenie odwzorowania P z przesunięciem skończonego typu o macierzy przejścia A.

Dominująca wartość własna macierzy A jest równa $\lambda = \sqrt{2}$. Na tej podstawie otrzymujemy oszacowanie na entropię topologiczną odwzorowania P

$$H(P) \ge \log \sqrt{2} > 0.346.$$
 (4.33)

Można zauważyć, że kwadrat macierzy A jest równy

$$A^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
 (4.34)

Na tej podstawie wnioskujemy, że w drugiej iteracji zbiory N_1 , N_3 nakrywają każdy ze zbiorów N_1 i N_3 i podobna sytuacja ma miejsce dla zbiorów N_2 i N_4 . Dla każdej pary zbiorów mamy zatem pełną dynamikę symboliczną na dwóch symbolach (wszystkie przejścia dozwolone) i stąd otrzymujemy oszacowanie na entropię topologiczną drugiej iteracji odwzorowania P jako $H(P^2) \ge \log 2$ równoważne oszacowaniu (4.33).

4.6.2. Porównanie metod całkowania

Wyniki porównań metod całkowania przedstawione w rozdziale 2 mogą być nieco mylące. Trudno jest znaleźć jednoznaczne kryterium stwierdzające, która metoda jest lepsza. Metoda dająca dokładniejsze wyniki może być bardzo wymagająca pod względem czasu obliczeń i jej stosowanie może nie mieć sensu.

Obecnie dokonamy porównania różnych metod na przykładzie konkretnego zadania obliczeniowego. Chcemy mianowicie udowodnić, że obraz jednej z krawędzi zbiorów N_i jest położony względem zbiorów N_i , tak aby zachodziły odpowiednie relacje nakrywające. W celach przeprowadzenia testów wybierzmy krawędź: o(-1.6,-6), o(-1.6,6). Przy implementacji każdej z metod podział krawędzi na kostki jest dokonywany automatycznie. Rozpoczynamy z jednego końca i wybieramy ustaloną wielkość kostki. Obliczamy obraz kostki przez odwzorowanie Poincarégo. Jeśli obliczenia zakończyły się powodzeniem i warunek dotyczący obrazu jest spełniony, to przesuwamy się dalej wzdłuż krawędzi nieznacznie zwiększając wielkość następnej kostki. W przypadku niepowodzenia zmniejszamy wielkość kostki i powtarzamy obliczenia.

Tabela 4.4

Porównanie metod obliczania trajektorii układu ciągłego w sposób ścisły na przykładzie dowodu istnienia dynamiki symbolicznej dla układu Lorenza

Metoda	Rząd	Krok całkowania	Liczba wywołań ${\cal P}$	Czas obliczeń
Taylor	4	0.01		
LogNorm Max	4	0.01	_	
LogNorm Eucl	4	0.01	57301	370.73
Lohner IV	4	0.01	25576	322.48
Lohner PAR	4	0.01	_	
Lohner QR	4	0.01	184	2.53
Lohner QRS	4	0.01	184	2.60
Lohner IE	4	0.01	137	1.95
LogNorm Eucl	4	0.003	12665	254.71
LogNorm Eucl	4	0.005	15823	195.90
LogNorm Eucl	4	0.008	27281	216.52
Lohner IE	3	0.005	107	2.52
Lohner IE	3	0.008	133	2.00
Lohner IE	3	0.01	182	2.21
Lohner IE	4	0.005	106	3.01
Lohner IE	4	0.008	119	2.06
Lohner IE	4	0.012	143	1.71
Lohner IE	4	0.015	196	1.87
Lohner IE	4	0.016	234	2.13
Lohner IE	5	0.005	106	3.47
Lohner IE	5	0.008	119	2.47
Lohner IE	5	0.012	136	1.91
Lohner IE	5	0.015	163	1.82
Lohner IE	5	0.016	170	1.82
Lohner IE	5	0.0165	231	2.37

Decydującym kryterium jakości metody jest dla nas czas obliczeń niezbędny do udowodnienia założeń na temat wybranej krawędzi. Testowane były metody opisane w rozdziale 2. Wyniki zostały przedstawione w tabeli 4.4. W pierwszej części tabeli porównane są wszystkie metody dla ustalonego kroku całkowania i rzędu metody. Metoda Taylora nie jest w stanie obliczyć obrazu punktu przez odwzorowanie Poincarégo. Jej zastosowanie do dowodu jest niemożliwe bez względu na wybór kroku całkowania. Metoda oparta na normie maksimum działa tylko dla bardzo małych rozmiarów kostek. Czas obliczeń przy użyciu tej normy można oszacować na ponad 10⁹ s. Dla normy euklidesowej czas obliczeń wynosi ok. 370 s. Jest ona znacznie szybsza od poprzednich metod i jej zastosowanie pozwoliło na przeprowadzenie dowodu istnienia dynamiki symbolicznej w pracy [44]. Wersja IV metody Lohnera daje porównywalny czas obliczeń, natomiast wersje QR oraz IE są ponad stukrotnie szybsze.

W drugiej części tabeli porównujemy dla wybranych metod czas obliczeń przy różnym wyborze rzędu metody i kroku całkowania. Okazuje się, że w każdym przypadku obserwujemy minimum przy pewnej wartości kroku całkowania. Dla metody wykorzystującej normę euklidesową minimum czasu obliczeń wypada w okolicy $\tau \approx 0.005$, zaś dla metody Lohnera czwartego rzędu dla $\tau \approx 0.012$. Wynika to z faktu, że dla dużego kroku całkowania błędy metody są decydujące. Przy zmniejszaniu kroku całkowania początkowo obserwujemy skrócenie czasu obliczeń związane ze zmniejszeniem błędów wprowadzanych przez metodę całkowania. Jednak dalsze zmniejszanie kroku całkowania powoduje jedynie nieznaczne zmniejszenie błędów metody i jest to działanie nieopłacalne z punktu widzenia czasu obliczeń, gdyż przy mniejszym kroku czasowym dłużej trwa obliczenie wartości odwzorowania Poincarégo.

Podobnie obserwuje się minimum ze względu na rząd metody. W naszym przypadku najmniejsze czasy obliczeń występują dla metody czwartego rzędu. Przy rzędzie metody równym 2 metoda Lohnera nie działa. Zwiększenie rzędu metody powyżej 5 nie powoduje znacznego zmniejszenia błędów (a zatem liczba wywołań funkcji P jest prawie taka sama), rośnie natomiast czas obliczeń.

Przy wyższym rzędzie metody optymalny krok całkowania staje się większy. Dla metody trzeciego rzędu najkrótszy czas obliczeń obserwuje się przy $\tau \approx 0.008$, dla metody czwartego rzędu przy $\tau \approx 0.012$, zaś dla metody piątego rzędu przy $\tau \approx 0.015$.

Metoda	Rząd	Krok całkowania	Liczba wywołań ${\cal P}$	Czas obliczeń		
dowód warunków dla krawędzi prostokątów $N_{\rm 1}$ i $N_{\rm 2}$						
LogNorm Eucl	4	0.005	268662	3809.34		
Lohner IE	4	0.005	936	29.85		
Lohner IE	4	0.01	1312	21.41		
Lohner IE	4	0.012	1322	17.91		
Lohner IE	4	0.015	2227	24.54		
dowód ciągłości na zbiorze $N_1 \cup N_2$						
Lohner IE	4	0.005	4516	139.26		
Lohner IE	4	0.01	5850	91.56		
Lohner IE	4	0.012	6535	85.43		
Lohner IE	4	0.015	8098	85.07		

 Tabela 4.5

 Porównanie całkowitego czasu obliczeń

W tabeli 4.5 porównano całkowity czas przeprowadzenia wspieranego komputerowo dowodu istnienia dynamiki symbolicznej dla metody opartej na normie euklidesowej i dla metody Lohnera. Widać wyraźną przewagę tej ostatniej. Całkowity czas obliczeń przy użyciu metody Lohnera wyniósł kilka minut, podczas gdy obliczenia przy użyciu pierwszej metody trwały kilkanaście godzin.

Podsumowanie

W niniejszej pracy przedstawione zostały wybrane aspekty analizy układów nieliniowych. Opisano szereg metod wykorzystujących jako podstawowe narzędzie arytmetykę przedziałową. Wykazano, że możliwość implementacji tych metod na komputerze umożliwia ścisłą analizę szerokiej klasy układów nieliniowych.

Opisano metody obliczania trajektorii układu, dowodu istnienia orbit okresowych oraz dynamiki symbolicznej, otrzymywania ścisłych oszacowań na entropię topologiczną, znajdowania części niezmienniczej i niewędrującej danego zbioru oraz basenu przyciągania stabilnej orbity okresowej. Wykorzystując opisane metody, przeprowadzono analizę dynamiki wybranych układów dyskretnych i ciągłych. W niektórych przypadkach uzyskano w miarę kompletną charakteryzację dynamiki układu, w innych pozostawiono otwarte problemy dotyczące istnienia chaotycznego atraktora, pełnej charakteryzacji krótkich orbit okresowych, otrzymania lepszego oszacowania entropii topologicznej itd. W celu rozwiązania tych problemów niezbędne wydaje się opracowanie nowych metod lub ulepszenie metod istniejących.

W dziedzinie zastosowań metod arytmetyki przedziałowej do analizy układów nieliniowych prowadzone są obecnie prace nad opracowaniem algorytmów pozwalających na automatyczną analizę dowolnego układu nieliniowego niskiego wymiaru.

Inny kierunek prac dotyczy możliwości analizy układów wyższego rzędu lub układów nieskończenie wymiarowych.

Wydaje się, że rozwój metod arytmetyki przedziałowej pozwoli na rozwiązanie przynajmniej części tych problemów. Duże nadzieje wiąże się z rozwojem ulepszonych wersji arytmetyki przedziałowej, w których dzięki specjalnemu sposobowi reprezentacji danych oraz prowadzenia obliczeń uzyskuje się znacznie zmniejszenie szerokości przedziału zawierającego rzeczywisty wynik.

Literatura

- Adams E., Ames W., Kühn W., Rufeger W., Spreuer H.: Computational chaos may be due to a single local error. J. Comp. Phys., vol. 104, 1993, 241–249
- [2] Alefeld G.: Inclusion Methods for Systems of Nonlinear Equations The Interval Newton Method and Modifications. [w:] Herzberger J. (Ed.), Topics in Validated Computations, Proceedings of the IMACS-GAMM International Workshop on Validated Computation, Elsevier 1994, 7–26
- [3] Alefeld G., Herzberger J.: Introduction to interval computations. New York, Academic Press 1983
- [4] Auerbach D., Cvitanović P., Eckmann J., Gunaratne G., Procaccia I.: Exploring chaotic motion through periodic orbits. Phys. Rev. Lett., vol. 58, No. 23, 1987, 2387–2389
- Bendtsen C., Stauning O.: FADBAD, a flexible C++ package for automatic differentiation. Tech. Rep. IMM-REP-1996-17, Technical University of Denmark, IMM, Department of Mathematical Modelling 1996
- Bendtsen C., Stauning O.: TADIFF, a flexible C++ package for automatic differentiation. Tech. Rep. IMM-REP-1997-07, Technical University of Denmark, IMM, Department of Mathematical Modelling 1997
- [7] Berz M., Makino K.: Verified integration of ODEs and flows using differential algebraic methods on high order Taylor models. Reliable Computing, vol. 4, 1998, 361–369
- [8] Berz M., Makino K.: New methods for high-dimensional verified quadrature. Reliable Computing, vol. 5, 1999, 13–22
- Berz M., Makino K., Hoefkens J.: Verified integration of dynamics in the solar system. Nonlinear Analysis, vol. 47, 2001, 179–190
- [10] Bhatia N., Szegö G.: Stability theory of dynamical systems. New York, Springer Verlag 1970
- Biham O., Wenzel W.: Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellers. Physical Review Letters, vol. 63, No. 8, 1989, 819–822
- [12] Bowen R.: Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms. Trans. Amer. Math. Soc., vol. 154, 1971, 377–397
- [13] Bowen R.: ω-limit sets for axiom A diffeomorphisms. J. Diff. Eq., vol. 18, 1975, 339–339
- [14] Chen G., Dong X.: From chaos to order, methodologies, perspectives and applications. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, vol. 24, Singapore, World Scientific 1998

- [15] Chua L., Lin G.: Canonical realisation of Chua's circuit family. IEEE Trans. Circ. Syst., vol. CAS-37, No. 7, 1990, 885–902
- [16] Coomes B., Koçak H., Palmer K.: Rigorous computational shadowing of orbits of ordinary differential equations. Numer. Math., vol. 69, 1995, 401–421
- [17] Coomes B., Koçak H., Palmer K.: Shadowing in discrete dynamical systems. [w:] Aubach A., Colonius F. (Eds), Six Lectures on Dynamical Systems, World Scientific 1996, 163–211
- [18] Cvitanović P.: Invariant measurement of strange sets in terms of cycles. Phys. Rev. Lett., vol. 61, No. 24, 1988, 2729–2732
- [19] Davidchack R., Lai Y.-C., Klebanoff A., Bollt E.: Towards complete detection of unstable periodic orbits in chaotic systems. Physics Letters A, vol. 287, 2001, 99–104
- [20] Dedieu H., Ogorzałek M.: Identification and control of nonlinear dynamics for signal coding and compression. [w:] Proc. European Conference on Circuit Theory and Design, vol. 2, Istambul, Elsevier 1995, 1137–1140
- [21] Dellnitz M., Hohmann A.: A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors. Numerische Mathematik, vol. 75, 1997, 293–317
- [22] Dellnitz M., Hohmann A., Junge O., Rumpf M.: Exploring invariant sets and invariant measures. Chaos: and Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, vol. 7, No. 2, 1997, 221–228
- [23] Dellnitz M., Schütze O., Sertl S.: Finding zeros by multilevel subdivision techniques. IMA Journal of Numerical Analysis, vol. 22, No. 2, 2002, 167–185
- [24] Easton R.: Isolating blocks and symbolic dynamics. J. Diff. Eqs., vol. 17, 1975, 96–118
- [25] Easton R.: Isolating blocks and epsilon chains for maps. Physica D, vol. 39, 1989, 95–110
- [26] Eckman J., Koch H., Wittwer P.: A computer-assister proof of universality in areapreserving maps. Memoirs of the AMS, vol. 47, No. 289, 1984
- [27] Eckmann J., Ruelle D.: Ergodic theory of chaos and strange attractors. Rev. Mod. Phys., vol. 57, No. 3, 1985, 617–656
- [28] Figueiredo L., Stolfi J.: Adaptive enumeration of implicit surfaces with affine arithmetic. Computer Graphic Forum, vol. 15, 1996, 287–296
- [29] Fomin S., Kornfeld I., Sinaj J.: Teoria ergodyczna. Warszawa, PWN 1987
- [30] Froyland G., Junge O., Ochs G.: Rigorous computation of topological entropy with respect to a finite partition. Physica D, vol. 154, 2001, 68–84
- [31] Galias Z.: Positive topological entropy of Chua's circuit: A computer assisted proof. Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 7, No. 2, 1997, 331–349
- [32] Galias Z.: Existence and uniqueness of low-period cycles and estimation of topological entropy for the Hénon map. [w:] Proc. Int. Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, NOLTA'98, vol. 1, Crans-Montana, 1998, 187–190
- [33] Galias Z.: Investigations of periodic orbits in electronic circuits with interval Newton's method. [w:] Proc. IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems, ISCAS'98, vol. 3, Monterey, 1998, 370–373
- [34] Galias Z.: Rigorous numerical studies of the existence of periodic orbits for the Hénon map. J. of Universal Computer Science, Springer, vol. 4, No. 2, 1998, 114–124. http://www.jucs.org/jucs_4_2/rigorous_numerical_studies_of

- [35] Galias Z.: Comparison of interval methods for finding periodic orbits. [w:] Proc. Int. Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, NOLTA'99, vol. 2, Hawaii, 1999, 439–442
- [36] Galias Z.: Proving the existence of periodic solutions using global interval Newton method. [w:] Proc. IEEE Int. Symposium on Circuits and Systems, ISCAS'99, vol. VI, Orlando, 1999, 294–297
- [37] Galias Z.: Rigorous investigations of periodic orbits in an electronic circuit by means of interval methods. [w:] Proc. Int. Workshop, Nonlinear Dynamics of Electronics Systems, NDES'99, Rønne, 1999, 41–44
- [38] Galias Z.: Interval methods for rigorous investigations of periodic orbits. Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 11, No. 9, 2001, 2427–2450
- [39] Galias Z.: Obtaining rigorous bounds for topological entropy for discrete time dynamical systems. [w:] Proc. Int. Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, NOL-TA'02, Xi'an, PRC, 2002, 619–622
- [40] Galias Z.: Proving the existence of long periodic orbits in 1D maps using Newton method and backward shooting. Topology and its Applications, vol. 124, No. 1, 2002, 25–37
- [41] Galias Z.: Rigorous investigations of Ikeda map by means of interval arithmetic. Nonlinearity, vol. 15, 2002, 1759–1779
- [42] Galias Z.: Study of Poincaré map associated with the Chua'a circuit using interval arithmetic. [w:] Proc. Int. Symposium on Nonlinear Theory and its Applications, NOLTA'02, Xi'an, PRC, 2002, 779–782
- [43] Galias Z., Nossek J., Ogorzałek M.: Negative results on control of chaotic circuits. [w:] Proc. Int. Workshop, Nonlinear Dynamics of Electronics Systems, NDES'94, Kraków, 1994, 174–178
- [44] Galias Z., Zgliczyński P.: Computer assisted proof of chaos in the Lorenz equations. Physica D, vol. 115, 1998, 165–188
- [45] Galias Z., Zgliczyński P.: Abundance of homoclinic and heteroclinic orbits and rigorous bounds for the topological entropy for the Hénon map. Nonlinearity, vol. 14, 2001, 909– 932
- [46] Garfinkel A., Spano M., Ditto W., Weiss J.: Controlling cardiac chaos. Science, vol. 257, 1992, 1230–1235
- [47] Gibbons A.: Algorithmic graph theory. Cambridge, Cambridge University Press 1985
- [48] Grassberger P., Kantz H.: Generating partitions for the dissipative Hénon map. Physica, vol. 17D, 1985, 235–238
- [49] Grassberger P., Kantz H., Moenig U.: On the symbolic dynamics of the Hénon map. J. Phys. A, vol. 22, 1989, 5217–5230
- [50] Grebogi C., Hammel S., Yorke J. A.: Do numerical orbits of chaotic dynamical processes represent true orbits? J. Complexity, vol. 3, 1987, 136–145
- [51] Grebogi C., Hammel S., Yorke J. A., Sauer T.: Shadowing of physical trajectories in chaotic dynamics: Containment and refinement. Physical Review Letters, vol. 65, No. 13, 1990, 1527–1530
- [52] Grebogi C., Ott E., Pelikan S., Yorke J. A.: Strange atractors that are not chaotic. Physica 13D, 1984, 261–268

- [53] Guckenheimer J., Holmes P.: Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields. New York, Springer Verlag 1983
- [54] Hairer E., Nørsett S., Wanner G.: Solving ordinary differential equations. I. Nonstiff problems. New York, Springer Verlag 1993
- [55] Hammel S., Jones C., Moloney J.: Global dynamical behavior of the optical field in a ring cavity. J. Opt. Soc. Am. B, vol. 2, No. 4, 1985, 552–564
- [56] Hammer R., Hocks M., Kulisch U., Ratz D.: Numerical toolbox for verified computing. New York, Springer-Verlag 1993
- [57] Hassard B., Hastings S., Troy W., Zhangk J.: A computer proof that the Lorenz equations have "chaotic" solutions. Appl. Math. Letters, vol. 7, 1994, 79–83
- [58] Hayes S., Grebogi C.: Using chaos for digital communication. [w:] Carroll T., Pecora L. (Eds), Nonlinear Dynamics in Circuits, World Scientific 1995, 325–335
- [59] Hénon M.: A two dimensional map with a strange attractor. Commun. Math. Phys., vol. 50, 1976, 69–77
- [60] Hsu C.: Cell-to-cell mapping. Applied Mathematical Sciences, vol. 64, Springer Verlag 1988
- [61] Hsu C.: Global analysis by cell mapping. Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 4, No. 2, 1992, 727–771
- [62] Juedes D.: A taxonomy of automatic differentiation tools. [w:] Griewank A., Corliss G. (Eds), Automatic Differentiation of Algorithms, SIAM 191, 315–329
- [63] Kearfott R., Dawande M., Du K., Hu C.: Algorithm 737: INTLIB: A portable Fortran-77 elementary function library. ACM Transactions on Mathematical Software, vol. 20, No. 4, 1994, 447–459
- [64] Kearfott R., Novoa M.: Algorithm 681: INTBIS, a portable interval Newton/bisection package. ACM Trans. Math. Software, vol. 16, No. 2, 1990, 152–157
- [65] Khibnik A., Roose D., Chua L.: On periodic and homoclinic bifurcations in Chua's circuits with a smooth nonlinearity. Int. J. Bifurcation and Chaos, vol. 3, No. 2, 1993, 363–384
- [66] Klatte R., Kulisch U., Lawo C., Rauch M., Wiethoff A.: C-XSC: A C++ class library for entended scientific computations. Berlin, Springer-Verlag 1993
- [67] Klatte R., Kulisch U., Neaga M., Ratz D., Ullrich C.: PASCAL-XSC: A PASCAL extension for scientific computation. Berlin, Springer-Verlag 1991
- [68] Knüppel O.: BIAS Basic Interval Arithmetic Subroutines. Tech. Rep. 93.2, Technical University Hamburg – Harburg 1993
- [69] Knüppel O.: PROFIL Programmer's Runtime Optimized Fast Interval Library. Tech. Rep. 93.4, Technical University Hamburg – Harburg 1993
- [70] Knüppel O.: PROFIL/BIAS—a fast interval library. Computing, vol. 53, No. 3–4, 1994, 277–287
- [71] Krasnosielskij M.: Wektornyje pola na ploskosti. Moscow, FM 1963
- [72] Kühn W.: Rigorously computed orbits of dynamical systems without the wrapping effect. Computing, vol. 61, No. 1, 1998, 47–67

- [73] Kühn W.: Zonotope dynamics in numerical quality control. [w:] Hege H. (Ed.), Mathematical visualization. Algorithms, applications and numerics. International workshop Visualization and Mathematics, Berlin, Springer Verlag 1998, 125–134
- [74] Kulisch U., Rall L.: Numerics with automatic result verification. Mathematics and Computers in Simulation, vol. 35, No. 5, 1993, 435–450
- [75] Lasota A., Mackey M.: Chaos, fractals, and noise, stochastic aspects of dynamics. Applied mathematical sciences, vol. 97, New York, Springer Verlag 1994
- [76] Lathrop D., Kostelich E.: Characterisation of an experimental strange attractor by periodic orbits. Phys. Rev. A, vol. 40, No. 7, 1989, 4028–4031
- [77] Lohner R.: Enclosing the solutions of ordinary initial and boundary value problems. [w:] Computerarithmetic, Scientific Computation and Programming Languages, Stuttgart, Teubner 1987, 225–286
- [78] Lohner R.: Computation of guaranteed enclosures for the solutions of ordinary initial and boundary value problems. [w:] Cash J., Gladwell I. (Eds), Computational ordinary differential equations, Oxford, Clarendon Press 1992
- [79] Lorenz E.: Deterministic non-periodic flow. J. Atmos. Sci., vol. 20, 1963, 130
- [80] Matsumoto T., Chua L., Ayaki K.: Reality of chaos in the double scroll circuit: a computer-assisted proof. IEEE Trans. Circ. Syst., vol. CAS-35, No. 7, 1988, 909-925
- [81] Matsumoto T., Chua L., Komuro M.: The double scroll. IEEE Trans. Circ. Syst., vol. CAS-32, No. 8, 1985, 798-817
- [82] Matsumoto T., Chua L., Komuro M.: The double scroll family. IEEE Trans. Circ. Syst., vol. CAS-32, No. 11, 1986, 1073–1117
- [83] Miranda C.: Un'osservazione su un teorema di Brouwer. Boll. Un. Mat. Ital., vol. 2, No. 3, 1940, 5–7
- [84] Mischaikow K., Mrozek M.: Chaos in the Lorenz equations: a computer assisted proof. Bull. Amer. Math. Soc., vol. 32, No. 1, 1995, 66–72
- [85] Mischaikow K., Mrozek M.: Isolating neighborhoods and chaos. Jap. J. Ind. Appl. Math., vol. 12, 1995, 205–236
- [86] Misiurewicz M., Szewc B.: Existence of a homoclinic point for the Hénon map. Comm. Math. Phys., vol. 75, 1980, 285–291
- [87] Moore R.: Interval analysis. Englewood Cliffs, NJ, Prentice Hall 1966
- [88] Moore R.: Methods and applications of interval analysis. Philadelphia, SIAM 1979
- [89] Moser J.: Stable and random motions in dynamical systems. Princeton Univ. Press 1973
- [90] Mrozek M.: Rigorous numerics of chaotic dynamical systems. [w:] Garbaczewski P., Wolf M., Weron A. (Eds), Chaos — the interplay between stochastic and deterministic behaviour, New York, Springer Verlag 1996, 283–296
- [91] Neumaier A.: Interval methods for systems of equations. Cambridge University Press 1990
- [92] Newhouse S., Pignataro T.: On the estimation of topological entropy. Journal of Statistical Physics, vol. 72, 1993, 1331–1351
- [93] Nusse H., Yorke J.: Dynamics: Numerical explorations. New York, Springer Verlag 1997
- [94] Nusse H., Yorke J.: Dynamika, badania numeryczne. Warszawa, PWN 1998

- [95] Ogorzałek M.: Drgania chaotyczne w autonomicznych obwodach elektrycznych. Zeszyty Naukowe, Elektrotechnika, vol. 20, Kraków, Wydawnictwo AGH 1991
- [96] Ogorzałek M.: Taming chaos part II: Control. IEEE Trans. Circ. Syst., vol. 40, No. 10, 1993, 700–706
- [97] Ogorzałek M.: Chaos and complexity in nonlinear electronic circuits. World Scientific Series on Nonlinear Science, Series A, vol. 22, Singapore, World Scientific 1997
- [98] Okumura K., Higashino S.: A method for solving complex linear equation of AC networks by interval computation. [w:] Proc. IEEE Int. Symposium on Circ. and Syst., ISCAS'94, New York, 1994, 121–124
- [99] Osipenko G.: Symbolic analysis of the chain recurrent trajectories of dynamical systems. Differential Equations and Control Processess, vol. 4, 1998
- [100] Ott E., Grebogi C., Yorke J.: Controlling chaotic dynamical systems. [w:] Campbell D. (Ed.), Chaos — Soviet-American Perspectives on Nonlinear Science, New York, American Institute of Physics 1990, 153–172
- [101] Parker T., Chua L.: Practical numerical algorithms for chaotic systems. New York, Springer Verlag 1989
- [102] Rall L.: Automatic differentiation: Techniques and applications. Lecture Notes in Computer Science, vol. 120, Berlin, Springer Verlag 1981
- [103] Robinson C.: Dynamical systems: Stability, symbolic dynamics, and chaos. USA, CRC Press 1995
- [104] Roy R., Murphy T., Maier T., Gills Z., Hunt E.: Dynamical control of a chaotic laser: Experimental stabilization of a globally coupled system. Phys. Rev. Lett., vol. 68, No. 9, 1990, 1259–1262
- [105] Sauer T., Yorke J. A.: Rigorous verification of trajectories for the computer simulation of dynamical systems. Nonlinearity, vol. 4, 1991, 961–979
- [106] Schuster H.: Chaos deterministyczny. Warszawa, PWN 1993
- [107] Seydel R.: Practical bifurcation and stability analysis. New York, Springer Verlag 1994
- [108] Sparrow C.: The Lorenz equations: Bifurcations, chaos, and strange attractors. New York, Springer Verlag 1982
- [109] Spreuer H., Adams E.: On the strange attractor and transverse homoclinic orbits for Lorenz equations. J. Math. Anal. and Appl., vol. 190, 1995, 329–360
- [110] Stoer J., Bulirsch R.: Wstęp do analizy numerycznej. Warszawa, PWN 1987
- [111] Stoffer D., Palmer K.: Rigorous verification of chaotic behavior of maps using validated shadowing. Nonlinearity, vol. 12, 1999, 1683–1698
- [112] Szlenk W.: An introduction to the theory of smooth dynamical systems. Warszawa, Chichester, PWN, John Wiley and Son 1984
- [113] Szymczak A.: A combinatorial procedure for finding isolating neighborhoods and index pairs. Proc. Royal Society of Edinburgh, vol. 127A, 1997, 1075–1088
- [114] Tresser C.: About some theorems by L.P. Šil'nikov. Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 40, No. 4, 1984, 441–461
- [115] Tucker W.: The Lorenz attractor exists. C. R. Acad. Sci. Paris, vol. 328, 1999, 1197–1202
- 176

- [116] Walter W. V.: ACRITH-XSC a Fortran-like language for verified scientific computing.
 [w:] Adams E., Kulisch U. (Eds), Scientific computing with automatic result verification, Mathematics in science and engineering, vol. 189, New York, USA, Academic Press 1993, 45–70
- [117] Weiss J., Garfinkel A., Spano M., Ditto W.: Chaos and chaos control in biology. J. Clin. Invest., vol. 93, 1994, 1355–1360
- [118] Wiggins S.: Global bifurcations and chaos. New York, Springer Verlag 1988
- [119] Zgliczyński P.: Fixed point index for iterations of maps, topological horseshoe and chaos. Topological Methods in Nonlinear Analysis, vol. 8, No. 1, 1996, 169–177
- [120] Zgliczyński P.: Computer assisted proof of chaos in the Rössler equations and the Hénon map. Nonlinearity, vol. 10, No. 1, 1997, 243–252
- [121] Zgliczyński P.: $C^1 \ Lohner \ algorithm.$ Found. Comput. Math., vol. 2, 2002, 429–465
- [122] Zhong G.: Implementation of Chua's circuit with a cubic nonlinearity. IEEE Trans. Circ. Syst. I, vol. 41, No. 12, 1994, 934–941
- [123] Zou F., Nossek J.: Bifurcation and chaos in cellular neural network. IEEE Trans. Circ. Syst., vol. CAS-40, No. 3, 1993, 166–172